СТАТЬИ

УДК 533.9.07

О равновесии пространственного плазменного шнура в продольном магнитном поле в стационарных условиях

В. Д. Шафранов

Определяются условия равновесия плазмы в тороидальных камерах типа восьмерки для случая, когда длительность удержания плазмы превышает время проникновения магнитного поля через обмотку соленоида. В этом случае часть силовых линий магнитного поля пронизывает обмотку соленоида, замыкаясь вне его. Поэтому радиус сечения крайней тороидальной магнитной поверхности, находящейся целиком внутри камеры, оказывается всегда меньше радиуса сечения соленоида. При давлении плазмы, превышающем некоторое критическое значение, тороидальные магнитные поверхности отсутствуют и удержание плазмы в принципе невозможно.

Простейшей системой для удержания плотной плазмы во внешнем, заранее созданном магнитном поле является замкнутый соленоид, имеющий форму пространственной кривой (например, восьмерки). Такая система была предложена Спитцером [1], который получил также качественную оценку условий равновесия плазмы в соленоиде, имеющем форму восьмерки. Более точный вывод условий равновесия, основанный на расчете равновесного положения плазменного шнура внутри соленоида заданной формы, был сделан в работах [2, 3]. Однако в этих работах предполагалось, что поверхность соленоида (камеры) является идеальным проводником и, следовательно, совпадает с крайней тороидальной магнитной поверхностью равновесной конфигурации. В этом случае равновесие возможно в принципе при любом значении параметра $\beta = 8\pi p/B^2$, как это следует, например, из работы [4]. Практически же сильное искажение магнитных поверхностей, возникающее при относительно больших значениях β, нежелательно. Из требования малости искажения магнитных поверхностей можно определить условное критическое значение $\beta_{кр}$ для равновесия плазмы в идеальном соленоиде. Это условное критическое значение и определялось в работах [2, 3].

Условие идеальности соленоида, изготовленного из обычных (несверхпроводящих) материалов, выполняется лишь для промежутков времени, малых по сравнению с временем проникновения магнитного поля через стенки соленоида, которое в эксперименте составляет сотые доли секунды. Поэтому, если время удержания плазмы порядка или больше десятка миллисекунд (такие масштабы времени удержания уже встречаются в экспериментах), условия равновесия, полученные в предположении идеальной проводимости камеры, становятся недействительными.

Цель настоящей работы — выяснить условия равновесия именно для достаточно большого времени удержания, когда конфигурация магнитного поля определяется не положением проводящих поверхностей, а заданным распределением тока на этих поверхностях (стационарные условия). Формально это выражается в том, что вместо условия обращения в нуль нормальной компоненты магнитного поля на поверхности соленоида следует использовать условие, выражающее разность тангенциальных составляющих магнитного поля через заданную величину поверхностной плотности тока в соленоиде (толщиной обмоток соленоида будем пренебрегать), и условие непрерывности нормальной компоненты магнитного поля.

Если витки соленоида расположены в плоскостях, перпендикулярных к его оси, то, как известно, в тороидальном осесимметричном соленоиде все силовые линии магнитного поля проходят внутри соленоида. В соленоиде же, осью которого является пространственная кривая, в стационарных условиях часть силовых

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорины

линий пронизывает его поверхность, замыкаясь во внешней области. Процесс установления магнитного поля в таком соленоиде происходит следующим образом. При быстром включении тока внутри соленоида устанавливается магнитное поле такой же конфигурации, как и при идеальной проводимости соленоида. Затем магнитное поле частично продиффундирует через обмотку соленоида, так что наружные тороидальные магнитные поверхности в соленоиде разрушаются. Если в такое магнитное поле поместить плазму, то по мере увеличения давления плазмы магнитные поверхности не прижимаются к стенкам камеры, как это было бы при идеальной электропроводности, а беспрепятственно пронизывают поверхность камеры (соленоида). При достаточно большом давлении плазмы тороидальные магнитные поверхности полностью исчезнут, когда магнитная ось сместится до поверхности соленоида. Таким образом, в стационарных условиях в отличие от случая идеально проводящей камеры, где равновесие возможно при любом давлении плазмы, существует критическое значение $\beta_{кр}$, выше которого равновесие в принципе невозможно (отсутствуют тороидальные магнитные поверхности).

Метод расчета равновесия плазмы в пространственных соленоидах описан в работах [2, 3]. Он основан на использовании квазицилиндрической ортогональной системы координат ϱ, s, ω [5], в которой ϱ — расстояние, отсчитываемое от оси соленоида; s — длина дуги оси; ω — азимутальный угол, отсчитываемый на поверхности $\varrho = \mathrm{const}$ от линии, перпендикулярной сечениям $s = \mathrm{const}$. Тороидальные поправки ко всем величинам разлагаются в ряды Фурье:

$$\mathbf{B}^{(1)} = Re \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{B}_n(\varrho)\, e^{i(\omega - \varkappa_0 s) + i\frac{2\pi}{L}ns}. \quad (1)$$

Уравнение магнитной поверхности с радиусом сечения ϱ' имеет вид

$$\varrho = \varrho' + \xi(\varrho', \omega, s) = \varrho' + Re \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n(\varrho')\, e^{i(\omega - \varkappa_0 s) + i\frac{2\pi}{L}ns}, \quad (2)$$

здесь $\varkappa_0$ — среднее значение угла поворота $\alpha(s)$ главной нормали к оси соленоида относительно линии $\omega = \mathrm{const}$:

$$\varkappa_0 = \frac{\alpha(L)}{L}, \quad (3)$$

где L — полная длина оси.

В работе [3] получено уравнение для определения $\xi_n(\varrho)$ и найдены выражения Фурье-компонент тороидальных поправок к магнитному полю, давлению плазмы и плотности тока в плазме через $\xi_n(\varrho)$ и $d\xi_n/d\varrho$. Все эти формулы выглядят наиболее просто в случае, когда кривизна $k(s)$ и угол поворота главной нормали $\alpha(s)$ являются плавными функциями дуги s. Рассмотрим именно этот случай. Для восьмерки, составленной из дуг окружности, приведенные ниже результаты пригодны всюду, за исключением окрестности точек соединения дуг с длиной интервала, равной примерно диаметру соленоида ($\Delta s \approx 2b$). В указанном приближении уравнение для $\xi_n(\varrho)$ в отсутствие продольного тока получится из уравнения (102) работы [3] в виде

$$\frac{d\xi_n(\varrho)}{d\varrho} = \frac{k_n}{\varkappa_n^2 \varrho} \cdot \frac{8\pi[\langle p\rangle_\varrho - p_0(\varrho)]}{B_{s0}^2} - \frac{3}{4}k_n\varrho. \quad (4)$$

Здесь $\langle p\rangle_\varrho$ — давление, усредненное по сечению радиуса ϱ; величина $\varkappa_n$ связана с $\varkappa_0$ [см. уравнение (3)] соотношением

$$\varkappa_n = \varkappa_0 - \frac{2\pi}{L}n. \quad (5)$$

Условие плавности функций $k(s)$ и $\alpha(s)$, о котором говорилось выше, соответствует использованию ограничения

$$\varkappa_n\varrho \ll 1. \quad (6)$$

Фурье-компоненты тороидальных поправок к магнитному полю, плотности тока и давлению плазмы выражаются формулами:

$$B_{\varrho n} = -i\varkappa_n\xi_n B_{s0}; \quad (7)$$

$$B_{\omega n} = \left[k_n\varkappa_n\varrho^2 + \varkappa_n\left(\xi_n + \varrho\frac{d\xi_n}{d\varrho}\right)\right]B_{s0}; \quad (8)$$

$$B_{sn} = \frac{4\pi}{c}\xi_n j_{\omega 0} + k_n\varrho B_{s0}; \quad (9)$$

$$j_{\varrho n} = i\frac{\xi_n}{\varrho}j_{\omega 0}; \quad (10)$$

$$j_{\omega n} = -\frac{dj_{\omega 0}}{d\varrho}\xi_n - j_{\omega 0}\left(\frac{d\xi_n}{d\varrho} + k_n\varrho\right); \quad (11)$$

$$j_{sn} = -2\frac{k_n}{\varkappa_n}j_{\omega 0}; \quad (12)$$

$$p_n = -\xi_n\frac{dp_0}{d\varrho}. \quad (13)$$

Здесь k_n — Фурье-компонента относительной кривизны $K(s)$:

$$k_n = \frac{1}{L}\int_0^L K(s)\, e^{-i\frac{2\pi}{L}ns}\, ds; \quad (14)$$

$$K(s) = k(s)\, e^{i[\varkappa_0 s - \alpha(s)]}, \quad (15)$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

которая легко рассчитывается по известным функциям $k(s)$ и $\alpha(s)$ [3].

Обозначим через a радиус плазменного шнура, т. е. радиус сечения некоторой магнитной поверхности, на которой плотность тока и градиент давления пренебрежимо малы. Тогда при $\varrho \geqslant a$ входящее в формулу (4) среднее давление

$$\langle p \rangle_\varrho = \langle p \rangle_a \frac{a^2}{\varrho^2}; \tag{16}$$

смещение плазменного шнура радиуса a в идеально проводящем соленоиде радиуса b, определяемое интегрированием выражения (4) от b до a примет вид [3]:

$$\xi_n(a) = \frac{3}{8} k_n (b^2 - a^2) - \frac{k_n}{2\varkappa_n^2} \beta \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right), \tag{17}$$

где

$$\beta = \frac{8\pi \langle p \rangle_a}{B_{s0}^2}. \tag{18}$$

В случае же рассматриваемого нами плохо проводящего соленоида, когда крайняя тороидальная магнитная поверхность имеет радиус сечения меньше радиуса сечения соленоида, для определения равновесного положения плазменного шнура необходимо решить задачу по определению магнитного поля со следующими условиями:

1) на поверхности плазменного шнура нормальная компонента магнитного поля согласно определению этой поверхности равна нулю;

2) тангенциальные составляющие магнитного поля на поверхности плазменного шнура определяются значениями (8) и (9), полученными из решения внутренней задачи;

3) на поверхности соленоида нормальная компонента магнитного поля непрерывна;

4) скачок тангенциальной составляющей определяется заданным распределением токов на поверхности соленоида.

Так как процедура решения весьма проста, ограничимся приведением полученных результатов. Выражения для компонент магнитного поля между шнуром и соленоидом можно взять из работы [2]:

$$B_{\varrho n} = -i \frac{k_n}{\varkappa_n} B_{s0} + A_n I_1'(\varkappa_n \varrho) + B_n K_1'(\varkappa_n \varrho); \tag{19}$$

$$B_{\omega n} = \frac{k_n}{\varkappa_n} B_{s0} + \frac{i}{\varkappa_n \varrho} [A_n I_1(\varkappa_n \varrho) + B_n K_1(\varkappa_n \varrho)]; \tag{20}$$

$$B_{sn} = -i [A_n I_1(\varkappa_n \varrho) + B_n K_1(\varkappa_n \varrho)], \tag{21}$$

где I_1 и K_1 — функции Бесселя от мнимого аргумента. Вне соленоида:

$$B_{\varrho n} = C_n K_1'(\varkappa_n \varrho);$$

$$B_{\omega n} = \frac{i}{\varkappa_n \varrho} C_n K_1(\varkappa_n \varrho);$$

$$B_{sn} = -i C_n K_1(\varkappa_n \varrho). \tag{22}$$

Константы A_n и B_n получаются из первых двух условий с учетом соотношений (4), (8) и (9), взятых при $\varrho = a$, в виде

$$A_n = -i\varkappa_n^2 a^2 B_{s0} \left(\varkappa_n \xi_n - \frac{k_n}{\varkappa_n}\right) K_2(\varkappa_n a) + i k_n \varkappa_n a^2 K_1'(\varkappa_n a) \frac{8\pi \langle p \rangle_a - \frac{3}{2} \varkappa_n^2 a^2 B_{s0}^2}{B_{s0}}; \tag{23}$$

$$B_n = -i\varkappa_n^2 a^2 B_{s0} \left(\varkappa_n \xi_n - \frac{k_n}{\varkappa_n}\right) I_2(\varkappa_n a) - i k_n \varkappa_n a^2 I_1'(\varkappa_n a) \frac{8\pi \langle p \rangle_a - \frac{3}{2} \varkappa_n^2 a^2 B_{s0}^2}{B_{s0}}. \tag{24}$$

Так как соотношения (4), (8) и (9) получены в предположении $\varkappa_n \varrho \ll 1$, то для определения A_n и B_n следует также использовать разложение модифицированных функций Бесселя по $\varkappa_n a$. Из третьего и четвертого условий находим C_n и ξ_n. Предположим, что на поверхности соленоида кроме тока, создающего основное продольное поле, имеется еще продольный ток дипольного типа, с помощью которого можно регулировать положение магнитных поверхностей:

$$i_s = Re \sum_{n=-\infty}^{\infty} i_{sn} e^{i(\omega - \varkappa_n s) + i \frac{2\pi}{L} ns}. \tag{25}$$

Тогда выражение для C_n примет вид

$$C_n = i \left\{ \frac{k_n \varkappa_n^3 b^4}{8} B_{s0} - \frac{k_n \varkappa_n a^2}{2} \beta B_{s0} + \frac{2\pi}{c} i_{sn} \varkappa_n^2 b^2 \right\}, \tag{26}$$

а искомая Фурье-компонента смещения

$$\xi_n = \frac{k_n b^2}{4} \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{a^2}{b^2}\right) - \frac{k_n}{2\varkappa_n^2} \beta + \frac{2\pi}{c} \cdot \frac{b}{\varkappa_n} \cdot \frac{i_{sn}}{B_{s0}}. \tag{27}$$

Характерной особенностью равновесия в рассматриваемых условиях плохо проводящего соленоида является независимость смещения, обязанного давлению плазмы (второй член в выражении для ξ_n), от радиуса плазменного шнура. При некотором критическом значении параметра β смещение становится сравнимым с радиусом сечения соленоида. При этом радиус

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорины

сечения крайней тороидальной магнитной поверхности, касающейся стенок соленоида, обращается в нуль, и равновесие становится принципиально невозможным. Из сравнений выражений (27) и (17) видно, что смещение, связанное с давлением, в идеально проводящем кожухе отличается от смещения в плохо проводящем соленоиде коэффициентом $1-\frac{a^2}{b^2}$. Это обстоятельство позволяет не производить здесь численного расчета смещения $\xi\,(a,\ \omega,\ s)$ для плохо проводящего соленоида, а использовать результаты расчета для идеального кожуха, приведенные для некоторых конфигураций в работе [3].

Другой характерной особенностью равновесия в плохо проводящем соленоиде является принципиальная возможность экспериментального определения энергии плазмы по измерению магнитного поля вне соленоида. Это поле (дипольного типа) определяется формулами

$$B_{\varrho n}=-\frac{C_n}{\varkappa_n^2\varrho^2}\,;\quad B_{\omega n}=i\,\frac{C_n}{\varkappa_n^2\varrho^2}\,, \tag{28}$$

т. е., согласно уравнению (1),

$$\frac{B_\omega\,(\varrho,\ \omega,\ s)}{B_{s0}}=\frac{b^2}{\varrho^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(-\frac{k_n\varkappa_n b^2}{8}+\right.$$

$$\left.+\beta\,\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{k_n}{2\varkappa_n}\right)\cos\left(\omega-\varkappa_0 s+\frac{2\pi}{L}\,ns\right)\,; \tag{29}$$

$$\frac{B_\varrho\,(\varrho,\ \omega,\ s)}{B_{s0}}=\frac{b^2}{\varrho^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(-\frac{k_n\varkappa_n b^2}{8}+\right.$$

$$\left.+\beta\,\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{k_n}{2\varkappa_n}\right)\sin\left(\omega-\varkappa_0 s+\frac{2\pi}{L}\,ns\right)\,. \tag{30}$$

По порядку величины $k_0/\varkappa_0\approx 1$. Следовательно, это дипольное поле вблизи поверхности соленоида составляет примерно долю β от основного поля в соленоиде и его, по-видимому, нетрудно измерить. При этом по формуле (29) или (30) можно найти величину βa^2, пропорциональную тепловой энергии плазмы. Детальный расчет наружного поля, связанный с суммированием рядов, входящих в уравнения (29) и (30), нетрудно выполнить в каждом конкретном случае по аналогии с расчетом смещения, проведенного в работе [3].

В заключение отметим, что при наличии продольного тока J в плазме и связанного с ним поля $B_\omega^0\,(\varrho)=\frac{2J}{c\varrho}$ формула для смещения усложняется. Приведем ее для справок без вывода:

$$\xi_n=\frac{2\pi}{c}\cdot\frac{b}{\varkappa_n}\cdot\frac{i_{sn}}{B_{s0}}+\frac{k_n b^2}{4}\left(1-\frac{3}{2}\cdot\frac{a^2}{b^2}\right)+$$

$$+\frac{k_n a}{2\varkappa_n}\cdot\frac{B_\omega^0\,(a)}{B_{s0}}\left(\ln\frac{b}{a}-1\right)-\frac{k_n a\left[8\pi\,\langle p\rangle_a+\langle B_\omega^2\rangle_a/2+\langle\varkappa_n\varrho B_\omega B_s\rangle_a-\frac{3}{4}\,\varkappa_n a B_\omega^0\,(a)\,B_{s0}\right]}{2\varkappa_n B_{s0}\,[\varkappa_n a B_{s0}-B_\omega^0\,(a)]}\,. \tag{31}$$

Эта формула, как и формула (27), получена при условиях 72

$$\varkappa_n b\ll 1\ \text{и}\ \varkappa_n a B_\omega^0\ll B_{s0}.$$

Поступила в Редакцию 5/IX 1964 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Спитцер. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии (Женева, 1958)». Избр. докл. иностр. ученых. Т. 1. М., Атомиздат, 1959, стр. 505.
2. В. Д. Шафранов. «Ядерный синтез», 4, 114 (1964).
3. В. Д. Шафранов. Там же, стр. 232.
4. М. Крупская, Р. Кульсруд. См. [1], стр. 221.
5. С. Mercier. «Ядерный синтез», 3, 89 (1963).

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ