

новится формально осуществимым требование сшивки всех сферических гармоник в отдельности. Можно показать, что в P_N -приближении вследствие упомянутого свойства функций $y_{kk}(r, \Omega, 0)$ формальная сшивка всех гармоник фактически эквивалентна выполнению граничных условий, сформулированных в работе [4].

Выводы

Полученное общее точное выражение для гармоник любого номера, с одной стороны, упрощает аналитический переход к P_N -приближениям метода сферических гармоник. Это упрощение особенно существенно в многомерных задачах. Как видно из предыдущего, P_N -приближения получают путем аппроксимации бесконечного множества характеристических чисел ν и функций $y_{kk}(r, \Omega, \nu)$ конечным набором значений ν_{ki} и соответственно функций $y_{kk}(r, \Omega, \nu_{ki})$. При этом граничные условия, введенные ранее в работе [4], остаются в силе, но приобретают новый математический смысл.

С другой стороны, предположение $Y_{N+1} = 0$, лежащее в основе общепринятых P_N -приближений, теперь уже не является обязатель-

ным. Следовательно, не исключена возможность развития новых приближенных форм метода сферических гармоник, основанных на других, менее грубых, предположениях. Задача состоит в том, чтобы выбор функций y_{kk} корректным образом поставить в соответствие с выбором граничных условий. Наряду с этим, по-видимому, важным будет вопрос и об определении критерия, позволяющего судить о характере сходимости приближенных результатов к точному решению. В общем виде эта проблема представляется пока довольно сложной.

Поступила в Редакцию 18/V 1964 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Г а л а н и н. Теория ядерных реакторов на тепловых нейтронах. М., Атомиздат, 1959.
2. Г. И. М а р ч у к. Методы расчета ядерных реакторов. М., Госатомиздат, 1961.
3. А. В е й н б е р г, Е. В и г н е р. Физическая теория ядерных реакторов. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
4. Г. Я. Р у м я н ц е в. «Атомная энергия», 10, 26 (1961).
5. Г. Я. Р у м я н ц е в. Диссертация, МИФИ, 1961.
6. Б. Д э в и д с о н. Теория переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1960.

УДК 621.039.51

Расчет слабых автоколебательных режимов ядерных реакторов

Б. З. Торлин

Излагается методика приближенного расчета параметров автоколебательных режимов ядерных реакторов с малыми амплитудами колебаний мощности. Получено уравнение, позволяющее в рамках сделанных приближений определить частоты возможных автоколебательных состояний реактора, а также амплитуды колебаний реактивности и мощности и разность фаз между этими колебаниями.

Первый вопрос, который обычно ставится при исследовании динамики реактора с обратными связями, — это вопрос об устойчивости системы. Если исследуются достаточно малые отклонения от равновесного состояния, то ответ сравнительно просто можно получить с помощью разработанных методов линейного анализа. При устойчивости системы после любого достаточно малого возмущения отклонение или амплитуда отклонения ее от равновесного

состояния будет асимптотически убывать до нуля. Если система неустойчива, то линейный анализ не может дать никакой информации о ее асимптотическом поведении. Вместе с тем за пределами области линейной устойчивости реактор может иметь практически весьма интересные устойчивые автоколебательные состояния с незначительной амплитудой. Действительно, если амплитуда колебаний не превышает, например, уровня шума в системе, то практически это означает расширение области устойчивости и, следовательно, области рабочих режимов реактора.

По-видимому, этим не исчерпывается та полезная информация, которая может быть получена в результате решения задачи об устойчивых автоколебательных режимах реактора с небольшой амплитудой колебаний.

Воспользуемся для рассмотрения средней по объему реактора плотности нейтронов N при средних концентрациях c_j источников всех m групп запаздывающих нейтронов уравнениями вида

$$\frac{dN}{dt} = \beta \frac{\rho - 1}{T} N + \sum_{j=1}^m \lambda_j c_j;$$

$$\frac{dc_j}{dt} = \frac{\beta_j}{T} N - \lambda_j c_j; \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (1)$$

где ρ — реактивность системы в долларах; T — среднее время жизни нейтронов; β_j и λ_j — соответственно выход и константа распада j -й группы запаздывающих нейтронов; $\beta = \sum_{j=1}^m \beta_j$. Для исследования небольших отклонений плотности нейтронов от некоторого расчетного значения N_0 введем новые обозначения

$$N = \bar{N} (1 + n) \quad (2)$$

(\bar{N} — среднее значение плотности нейтронов, вообще говоря не равное N_0) и приведем систему (1) к виду

$$w_1(p) n = \rho (1 + n), \quad (3)$$

где $p = \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования, а

$$w_1(p) = p \left(\frac{T}{\beta} + \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{p + \lambda_j} \right) \text{ — линейный оператор,} \quad (4)$$

в котором $\alpha_j = \frac{\beta_j}{\beta}$.

В дальнейшем для простоты будем исследовать систему с линейной обратной связью*

$$w_2(p) n \frac{\bar{N}}{N_0} = \rho, \quad (5)$$

где $w_2(p)$ — линейный оператор, а коэффициент \bar{N}/N_0 обусловлен тем, что $w_2(p)$ определяется для расчетной плотности нейтронов N_0 , а n относится к средней плотности нейтронов \bar{N} .

Поскольку интерес представляют лишь периодические решения этой системы, задача может быть решена на две части:

1. Отыскание периодических решений $n(\omega t)$ нелинейного уравнения (3) при заданном периодическом воздействии $\rho(\omega t)$. При этом оказывается, что функция $\rho(\omega t)$ должна удов-

летворять определенным требованиям, чтобы уравнение (3) имело периодические решения $n(\omega t)$.

2. Выбор таких $\rho(\omega t)$, чтобы соответствующие им функции $n(\omega t)$ после воздействия на них оператором $w_2(p)$ дали функцию $\rho(\omega t)$.

Решение первой задачи для $|n| < 1$ легко получить методом последовательных приближений [1]. Если представить функцию $\rho(\omega t)$ в виде

$$\rho(\omega t) = a_0 + \sum_{k \neq 0}^{\infty} a_k e^{ik\omega t}; \quad (6)$$

и искать $n(\omega t)$ в виде

$$n(\omega t) = \sum_{l \neq 0}^{\infty} A_l e^{il\omega t}; \quad l \neq 0, \quad (7)$$

то выражение для $A_l^{(v+1)}$ каждого последующего $(v+1)$ приближения через предыдущее (v) будет иметь вид

$$A_l^{(v+1)} = \frac{a_l + \sum_{k \neq 0}^{\infty} a_k A_k^{(v)} l}{w_1(i\omega l)}. \quad (8)$$

Для осуществления периодического решения уравнения (3) необходимо выполнить условие

$$a_0 = -2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\infty} a_l A_{-l} \quad (9)$$

или, если воспользоваться методом последовательных приближений,

$$a_0^{(n+1)} = -2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\infty} a_l A_{-l}^{(v)}. \quad (10)$$

В качестве нулевого приближения используется линейное приближение.

Вторая часть задачи также может быть решена методом последовательных приближений. При этом в качестве первого приближения естественно использовать выражение (6), сохранив в нем лишь первую гармонику. Последующие приближения для $\rho(\omega t)$ могут быть получены подстановкой соответствующих решений $n(\omega t)$ уравнения (3) в выражение (5).

Следует иметь в виду, что для обеспечения отрицательного смещения реактивности a_0 необходимо, чтобы в реакторе средняя плотность нейтронов \bar{N} отклонилась от расчетного стационарного значения N_0 . Связь между ними устанавливается соотношением:

$$\bar{N} = N_0 (1 - \kappa_0 a_0), \quad (11)$$

где κ_0 — коэффициент усиления отрицательной обратной связи на «нулевой частоте».

* Эта же методика может быть использована и в случае, когда в уравнениях обратной связи содержатся нелинейные члены.

С помощью выражений (8) и (10) легко во втором приближении получить выражения

$$A_1^{(2)} = a_1 w_1^{-1}(i\omega) \{1 + |a_1|^2 w_1^{-1}(i\omega) [w_1^{-1}(2i\omega) - 2 \operatorname{Re} w_1^{-1}(i\omega)] + |a_1|^4 O_1(i\omega)\}; \quad (12)$$

$$A_2^{(2)} = a_1^2 w_1^{-1}(i\omega) w_1^{-1}(2i\omega) [1 + |a_1|^2 O_2(i\omega)]. \quad (13)$$

Выражение (13) указывает на возникновение в системе колебаний с частотой, вдвое большей частоты основного возмущения. Через обратную связь (5) колебания с этой частотой начнут воздействовать на n в уравнении (3). Вклад этого эффекта в выражение $A_1^{(2)}$ оказывается равным

$$w_1^{-1}(i\omega) w_2^{-2}(2i\omega) w_2(2i\omega) a_1 |a_1|^2. \quad (14)$$

Если этот член по величине порядка отбрасываемых членов, им можно пренебречь. Практически это можно осуществить, когда $|w_2(2i\omega)| \ll 1$. В дальнейшем этот член будем отбрасывать только для упрощения изложения методики.

Выражение для $a_0^{(2)}$ во втором приближении имеет вид

$$a_0^{(2)} = -2 |a_1|^2 \operatorname{Re} w_1^{-1}(i\omega). \quad (15)$$

Используя выражения (5), (11), (15) для отношения комплексных амплитуд основных гармоник функций q и n , получим

$$\frac{a_1}{A_1} = w_2(i\omega) [1 + \kappa_0 \cdot 2 |a_1|^2 \operatorname{Re} w_1^{-1}(i\omega)]. \quad (16)$$

Подставляя (12) в (16) и разрешая полученное выражение относительно $|a_1|^2$, получим выражение

$$\frac{|a_1|^2}{1 + \frac{w_2(i\omega)}{w_1(i\omega)}} = \frac{w_2(i\omega)}{w_1(i\omega)} \left[\frac{w_1^{-1}(2i\omega) - 2 \operatorname{Re} w_1^{-1}(i\omega)}{w_1(i\omega)} + 2\kappa_0 \cdot \operatorname{Re} w_1^{-1}(i\omega) \right]. \quad (17)$$

Приравняв нулю мнимую часть выражения (17), получим алгебраическое уравнение для определения частоты автоколебательного режима. Действительная часть выражения (17) определяет амплитуду основной гармоники колебания реактивности.

Амплитуда колебания плотности нейтронов и сдвиг фаз между колебаниями реактивности и плотности нейтронов могут быть определены с помощью выражений (12) и (16).

Из выражений (12), (13) и (16) легко видеть, что приближение, в котором получено уравнение (17), справедливо лишь при выполнении условия $|a_1|^2 \ll 1$. При этом из выражения (8) следует, что применение метода последовательных приближений оправдано, по крайней мере, если $|A_1| < 1$. Поэтому среди совокупности всех решений уравнения (17) физический смысл должны иметь лишь те решения, которые удовлетворяют указанным требованиям.

Для иллюстрации развитой выше методики исследуем слабые автоколебательные режимы в кипящем гомогенном реакторе с одной эффективной группой запаздывающих нейтронов, пренебрегая механической инерцией воды.

Как следует из работы [2], частотная характеристика системы обратных связей кипящего гомогенного реактора с учетом перегрева жидкой фазы и без учета ее механической инерции имеет вид

$$\psi_2(i\omega) = -\frac{K}{1 - \theta\theta\omega^2 + i\theta\omega}. \quad (18)$$

В работе [2] показано, что постоянная времени перегрева жидкой фазы θ связана с ее теплоемкостью C , стационарным перегревом t_0 и стационарной мощностью реактора N_0 соотношением

$$\theta = \frac{C t_0}{N_0}. \quad (19)$$

Постоянная времени выхода паровой фазы θ почти не зависит от параметров, входящих в соотношение (19). Паровой коэффициент реактивности K пропорционален стационарной мощности:

$$K = K_0 N_0. \quad (20)$$

Подставив (18) в (17), получим уравнения, определяющие частоту ω и амплитуду $|a_1|$ колебания реактивности в исследуемом автоколебательном режиме,

$$|a_1|^2 = -\frac{1}{K} \frac{1 + K - \theta\theta\omega^2 + i \left(\theta\omega - K \frac{\lambda}{\omega} \right)}{2K - 1 + i \left(\frac{\lambda^3}{2\omega^3} + \frac{3}{2} \frac{\lambda}{\omega} - 2K \frac{\lambda}{\omega} \right)}. \quad (21)$$

Выражение (21) анализировалось как в области переменных $(K; \theta)$, так и в области переменных $(N_0; t_0)$ при различных значениях θ .

Граница области линейной устойчивости определяется из выражения (21) при $|a_1| = 0$ и имеет вид

$$\theta\lambda - 1 = \frac{1}{K}. \quad (22)$$

в координатах $(K; \theta\lambda)$ или

$$K_0 N_0 + 1 = K_0 \lambda C t_0 \quad (23)$$

в координатах $(N_0; t_0)$.

Из выражения (21) можно также определить амплитуду $|a_1|$ и частоту ω колебания реактивности в слабом автоколебательном режиме:

$$|a_1|^2 = -\frac{1}{K} \cdot \frac{1 - \theta\theta\omega^2 + K}{2K - 1} \quad (24)$$

или

$$|a_1|^2 = -\frac{2}{K} \cdot \frac{\theta\lambda - Kx}{x^2 - (4k - 3)x}, \quad (25)$$

где

$$x = \frac{\lambda^2}{\omega^2} = -\frac{1}{2} \frac{3(1-K) - \lambda^2\theta\theta}{1+K} \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2} \frac{3(1-K) - \lambda^2\theta\theta}{1+K} \right]^2 - \frac{\theta\lambda^2 - 4K - 3\lambda\theta + 4K\lambda\theta}{1+K}} \quad (26)$$

Из выражений (24)–(26) прежде всего следует, что при фиксированных значениях параметров и в данном приближении исследуемая система уравнений может иметь не более двух периодических решений, из которых одно должно быть устойчивым. Следовательно, возможны ситуации, когда будет существовать одно, два периодических решения или вообще не будет решения. Определим в координатах $(K; \theta\lambda)$ области, в которых реализуются указанные ситуации. Для этого проведем в этих координатах характерные кривые.

Приняв $|a_1| = 0$, получим уравнение кривой $\frac{1}{K_{\text{крит}}} = \theta\lambda - 1$, являющейся границей области линейной устойчивости (кривая β на рис. 1). В терминах нелинейного анализа граница области линейной устойчивости характеризуется тем, что на ней по крайней мере один из возможных автоколебательных режимов (устойчивый или неустойчивый) имеет нулевую амплитуду. Два значения x , соответствующие границе области линейной устойчивости, оказываются равными

$$x_1 = \frac{\theta\lambda}{K_{\text{крит}}} \quad (27)$$

и

$$x_2 = 3 \frac{K_{\text{крит}} - 1}{K_{\text{крит}} + 1}, \quad (28)$$

причем x_1 соответствует $|a_1| = 0$, а x_2

$$|a_1|^2 = \theta\lambda \cdot \frac{x_1 - 1}{2K - 1}. \quad (29)$$

Поскольку x по определению больше нуля, то при $K < 1$ величина x_2 не имеет физического смысла. Второе условие существования x_2 также очевидно: $x_1 > x_2$.

Полезная информация о поведении амплитуды периодического решения вблизи границы области линейной устойчивости может быть получена с помощью выражения

$$\frac{d|a_1|^2}{d\theta} = \frac{2K}{K+1} \frac{1}{x_1 - x_2} \quad (30)$$

при $\theta = \frac{K+1}{K}$, из которого следует, что в случае $x_1 > x_2$, т. е. при $K < K_1$, где K_1

определяется из соотношения

$$\theta\lambda = 3K_1 \cdot \frac{K_1 - 1}{K_1 + 1}, \quad (31)$$

амплитуда автоколебательного режима должна постепенно увеличиваться за пределами области линейной устойчивости по мере удаления от границы (так называемый мягкий режим). В противном случае реализуется так называемый жесткий режим. При этом в пределах области линейной устойчивости по мере приближения к ее границе повышается вероятность возникновения автоколебательного режима сразу со значительной амплитудой.

Другой характерной кривой на рис. 1 является кривая a , соответствующая $\omega \rightarrow \infty$. При

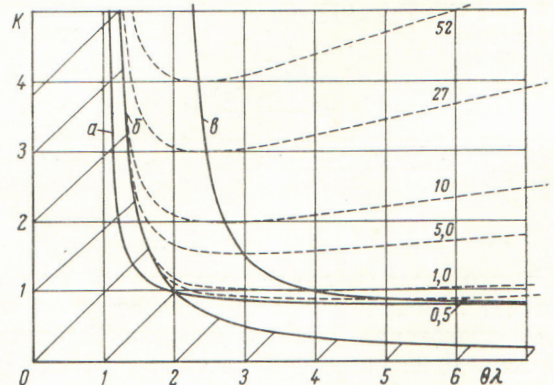


Рис. 1. Область линейной устойчивости (заштрихована) и характерные кривые в координатах $K - \lambda\theta$:

a — граница области автоколебательных состояний с малой амплитудой; b — граница области линейной устойчивости; c — кривая, проходящая через минимумы пунктирных кривых одинаковых корней x [см. уравнение (33)] при различных значениях $\lambda\theta$, указанных на каждой кривой.

этом также и $|a_1| \rightarrow \infty$. Уравнение этой кривой имеет вид

$$\theta_0 \lambda = \frac{4K-2}{4K-3}; K \geq \frac{3}{4}. \quad (32)$$

Область II (см. рис. 3), заключенная между кривыми a и b , характеризуется тем, что во всех ее точках возможно лишь одно колебательное состояние с малой амплитудой. Слева (см. рис. 1 и 2) от этой области находится область I, в которой автоколебательные режимы с малой амплитудой отсутствуют совсем.

В точках $K_{\text{крит}} = K_1$ кривой b касается серия кривых, вдоль которых оба значения x оказываются равными (на рис. 1 эти кривые для различных значений $\theta\lambda$ показаны пунктиром). Уравнение этой серии кривых имеет вид

$$\theta\lambda\theta = (8K^2 - K - 3) \pm \sqrt{8(K+1)(2K-1)[K(4K-3) - \theta\lambda]}. \quad (33)$$

Очевидно, что при $K = K_y$ [K_y удовлетворяет уравнению $\theta\lambda = K_y(4K_y - 3)$] оба значения θ , определяемые выражением (33), совпадают, а при $K < K_y$ выражение (33) не имеет действительных решений. Кривая c соединяет минимумы кривых, описываемых выражением (33). Между областью, ограниченной кривыми a и b , и кривой, описываемой уравнением (33) [(для конкретного $\lambda\theta$), находится область III, в каждой точке которой имеется два положительных значения $|a_1|^2$.

Выше кривой, описываемой уравнением (33), оказывается область IV, в которой отсутствуют действительные значения $|a_1|$. Эта область

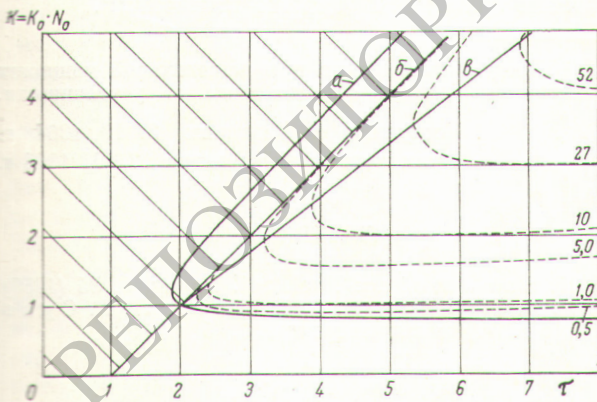


Рис. 2. Область линейной устойчивости (заштрихована) и характерные кривые в координатах $K - \tau$: a — граница области автоколебательных состояний с малой амплитудой; b — граница области линейной устойчивости; c — прямая, проходящая через минимальные значения τ кривых одинаковых корней (аналогичных пунктирным кривым на рис. 1).

характеризуется отсутствием как устойчивых, так и автоколебательных режимов.

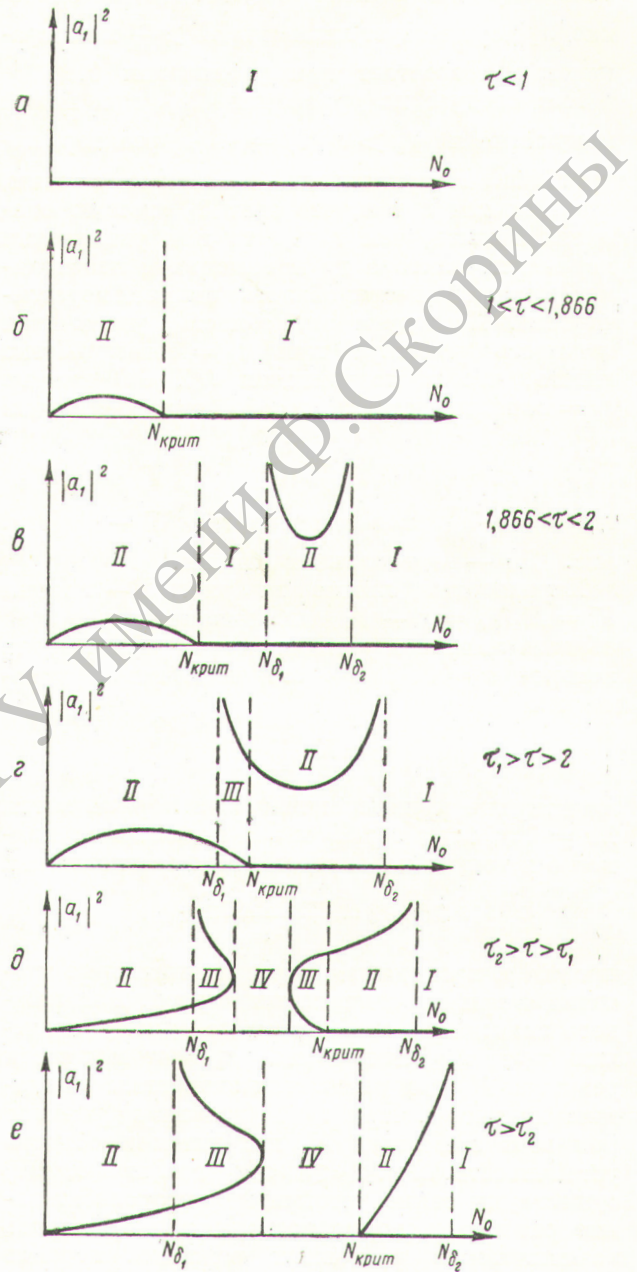


Рис. 3. Зависимость квадрата амплитуды колебания реактивности $|a_1|^2$ от стационарной мощности реактора N_0 при различных значениях τ . Римскими цифрами обозначены области различной устойчивости реактора:

$N_{\text{крит}}$ — граница области линейной устойчивости; N_{δ_1} и N_{δ_2} — границы области автоколебательных состояний с малой амплитудой.

Из выражений (24)–(26) легко видеть, что при $\theta \rightarrow \infty$ значение $|a_1|$, соответствующее большему x , стремится к нулю. Второе значение $|a_1|$ существует лишь при $K > \frac{3}{4}$ и неограниченно возрастает при увеличении θ .

Как следует из уравнения (23), при малой мощности и $t_0 > t_0(0) = \frac{1}{K_0 \lambda C}$ реактор неустойчив. Неприятности, связанные с этим, заключаются в том, что если t_0 системы окажется больше, чем $t_0(0)$, то при увеличении мощности реактора до номинальной необходимо будет пройти через область линейной неустойчивости. Исследуем эту область, увеличивая мощность реактора при $t_0 = \text{const}$. Легко видеть, что в координатах $(K, \theta \lambda)$ кривые $t_0 = \text{const}$ представляют собой гиперболы вида

$$K = \frac{\tau}{\theta \lambda},$$

где $\tau = \frac{t_0}{t_0(0)}$, а в координатах $(K - \tau)$ [см. рис. 2] — вертикальные линии.

Характерные линии на рис. 2 — прямая $K = K_0 N_0 = \tau - 1$, являющаяся границей области линейной устойчивости; кривая, вдоль которой $x = 0$, $|a_1| \rightarrow \infty$, описываемая уравнением

$$\tau_0 = K \cdot \frac{4K - 2}{4K - 3};$$

пунктирные кривые одинаковых корней x для $\lambda \theta = 0,5; 1; 5; 10; 27$ и 52 , касающиеся прямой b в точках τ_2 , определяемых соотношением

$$\lambda \theta = 3 \frac{(\tau_2 - 1)(\tau_2 - 2)}{\tau_2},$$

прямая e , проходящая через минимальные значения τ кривых одинаковых корней. Для каждого значения θ существует по одному значению τ_1 и τ_2 . Зависимость $|a_1|^2$ от мощности реактора N_0 при различных значениях τ показана на рис. 3. При $\tau \leq 1$ (график a) реактор при всех значениях N_0 находится в области устойчивости. При $1 < \tau < \tau_1$ (графики b, e, z) существуют такие устойчивые автоколебательные режимы, которые позволяют, не опасаясь возникновения разгонных режимов, перейти

в область устойчивой работы реактора. При $\tau > \tau_1$ (графики d и e) есть такая область значений N_0 , в которой отсутствуют автоколебательные режимы с малыми амплитудами. К тому же при $\tau > \tau_2$ на границе линейной устойчивости существует опасный жесткий режим.

Таким образом, с помощью развитой в работе методики приближенного расчета параметров слабых автоколебательных режимов в рамках гидродинамической модели кипения [2] показано следующее:

1. При достаточно больших значениях K $K > K_2 = \frac{3 + \theta \lambda + \sqrt{9 + 18 \lambda \theta + \theta^2 \lambda^2}}{6}$ на границе линейной устойчивости (ограничивающей область линейной устойчивости со стороны низких значений мощности) имеется жесткий режим.

2. При значениях парового коэффициента реактивности $K < K_2$ область устойчивой работы реактора может оказаться несколько больше области его линейной устойчивости.

3. При значениях стационарного перегрева t_0 , превышающих $t_0(0)$, но меньших $t_1 = \tau_1 t_0(0)$, увеличение мощности реактора до номинального значения* должно проходить вполне безопасно.

4. При достаточно больших значениях стационарного перегрева $t_0 > t_1$ увеличение мощности реактора может вызвать опасные пульсации, а при $t_0 > t_2 = \tau_2 t_0(0)$ приближение к границе линейной устойчивости становится опасным из-за появления жесткого режима.

Автор благодарен Б. Р. Бергельсону, П. П. Благоволину, А. Д. Галанину, Е. Ф. Сабаеву, С. М. Файнбергу и Я. В. Шевелеву за обсуждение работы и ценные замечания.

* Предполагается, что при номинальной мощности реактор находится в области линейной устойчивости.

Поступила в Редакцию 24/II 1964 г.
В окончательной редакции 17/VII 1964 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Sandmeier. Nucl. Sci. Engng, 6, 85 (1959).
2. Б. В. Эршлер, Б. З. Горлин, Л. А. Суворов. «Атомная энергия», 9, 5 (1960).

