Константы A_i составляют примерно десятую часть от C_i. Как видно из (12), колебания размеров сгустка в адиабатической области ($v \gg 1$) происходят на удвоенной частоте колебаний центра сгустка, причем в процессе ускорения фазовые размеры сгустка Ψ адиабатически затухают, а энергетический разброс V адиабатически увеличивается. Разлагая функции Бесселя в ряды, находим значения размеров сгустка в критической точке:

$$(\Psi)_{v\to 0} \to \frac{2^{4/3}}{\Gamma^2(1/3)} A_3;$$

$$\left(\frac{V}{E_s^2}\right)_{v\to 0} \to \frac{2^{2/3} eV_0 \sin\varphi_s g A_1}{\Gamma^2(2/3)\, 2\pi q E_s K'};$$

$$\left(\frac{W}{E_s}\right)_{v\to 0} \to \frac{g^2 A_2}{\Gamma(1/3)\,\Gamma(2/3)\, q\omega_s K'}. \qquad (13)$$

Подсчитаем увеличение орбиты, соответствующее возрастанию энергетического разброса сгустка в критической точке:

$$\frac{\overline{\Delta R^2}}{R^2} = \alpha^2 \left(\frac{eV_0 \sin\varphi_s \omega_s}{2\pi E_s q}\right)^2 \frac{2^{2/3}}{\Gamma^2(2/3)} A_1. \qquad (14)$$

Выбираем $\alpha \approx 10^{-2}$; $eV_0 = 10^4$ *эв*; $E_s = 5\cdot 10^9$ *эв*; $\omega_s = 10^6$ *гц*; $g \approx 3\cdot 10^2$; $R \approx 3\cdot 10^4$ *см*, тогда $\overline{\Delta R^2} \approx 0{,}1 A_1$. Отсюда можно сделать вывод, что увеличение размеров сгустка в критической области неопасно, поскольку даже в критической точке размеры не превышают квадрата амплитуды свободных колебаний центра сгустка вне критической области в отсутствие системы автоуправления.

В линейном приближении система автоуправления не влияет на размеры сгустка. С учетом нелинейности вне критической области в работе [8] при равномерном распределении по энергиям получено выражение для частоты колебаний размеров сгустка

$$\omega = 2 - \frac{\bar{\varepsilon}}{2}\left(1 + \frac{5}{3}\operatorname{ctg}^2\varphi_s\right) - i\operatorname{ctg}\varphi_s\bar{\varepsilon} \times$$

$$\times \frac{\left[\frac{\operatorname{ctg}\varphi_s}{6}\left(\omega_0\beta_\eta \pm \frac{2i\gamma^2}{\gamma^2-1}\cdot\frac{\beta_\lambda}{K(t)}\right) \pm \beta_\Psi \mp \beta_V - i\beta_W\right]}{3 + 2i\omega_0\beta_\eta \mp \frac{\gamma}{\gamma^2-1}\cdot\frac{\beta_\lambda}{K(t)}}.$$

В этой формуле частота выражена в единицах частоты линейных синхротронных колебаний и принято во внимание изменение знаков у коэффициентов обратной связи по импульсу и размерам после критической точки. Из уравнения (15) следует, что при $|\beta| > 1$ имеется возможность обеспечить устойчивость сгустка за счет только системы автоуправления по центру $|\beta_\lambda, \beta_\eta|$ как до, так и после перехода. Устойчивость сгустка можно повысить введением обратной связи по размерам. При других распределениях, когда имеется собственное затухание, необходимо анализировать параметр ξ [5, 6] до и после критической энергии примерно так же, как это сделано в работе [6]. Вследствие нелинейности уравнений центр сгустка не совпадает с равновесной фазой, а сдвинут относительно ее на величину равновесных размеров сгустка [5]. Смещать надо центр сгустка. Полученные результаты справедливы для сгустка малых размеров в линейном приближении. Для решения нелинейной задачи необходимо особое рассмотрение.

Автор выражает искреннюю благодарность А. Н. Лебедеву за руководство работой, А. А. Коломенскому и Э. Л. Бурштейну за обсуждение результатов.

Поступило в Редакцию 15/VI 1964 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Johnsen, C. Schmelzer. Proc. of Int. Conf. on High Energy Accel. CERN, 1956, p. 395;
2. W. Schnell. Proc. of Int. Conf. on High Energy Accel. CERN, 1959, p. 485.
3. Ю. С. Иванов, А. А. Кузьмин. «Приборы и техника эксперимента», № 4, 106 (1962).
4. H. Hereward. Proc. of Int. Conf. on High Energy Accel. Brookhaven, 1961, p. 236.
5. Э. А. Жильков, А. Н. Лебедев. «Атомная энергия», 18, 22 (1965).
6. Э. А. Жильков. «Приборы и техника эксперимента», № 1, 17 (1965).
7. А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев. Теория циклических ускорителей. Гл. IV. М., Физматгиз, 1962.
8. Э. А. Жильков. «Атомная энергия», 18, 58 (1965).

УДК 621.384.61

О потерях частиц, вызванных прохождением нелинейных резонансов в ускорителях и накопителях

А. А. Коломенский

В последнее время появляются сообщения о проектах больших накопительных систем для протонов, предназначенных для реализации метода встречных соударений пучков [1, 2]. Цель настоящей работы — анализ одного из возможных механизмов потерь частиц, который необходимо учитывать при разработке и использовании систем такого рода.

Характерное свойство циклических ускорителей и накопителей — опасные резонансные комбинации параметров, определяемые соотношениями

$$q_r\nu_r + q_z\nu_z = m \quad (q_{r,\,z},\ m \text{ — целые числа}), \qquad (1)$$

где ν_r, ν_z — частоты радиальных и вертикальных бетатронных колебаний, выраженные в единицах частоты обращения ω. Порядок резонанса k определяется как $k = |q_r| + |q_z|$. При задании допусков исходят из требования, чтобы рабочая точка ν_r, ν_z на диаграмме устойчивости не приближалась к границам ячейки, определяемой полосами линейных резонансов ($k \leqslant 2$). Эту ячейку пересекают полосы нелинейных резонансов ($k > 2$), вызванные возмущениями магнитного поля. Влияние этих резонансов обычно не очень опасно, поскольку при неподвижной рабочей точке оно компенсируется нелинейным сдвигом частоты колебаний. Однако если рабочая точка, оставаясь в пределах ячейки, будет перемещаться и проходить через полосы нелинейных резонансов из-за нестабильностей магнитного поля, то амплитуды бетатронных колебаний могут возрастать до опасных значений, ведущих к потерям частиц. Особенно опасными такие потери, связанные с многократным прохождением нелинейных резонансов, могут оказаться в накопителях, где частицы должны циркулировать в течение весьма продолжительного времени (порядка часа и больше), которое на несколько порядков больше, чем это обычно бывает в ускорителях.

Мы ограничимся рассмотрением систем с сильной фокусировкой, имея в виду протонные накопители. Для электронов важную роль играет релятивистское электромагнитное излучение, которое при должном выборе типа фокусирующей системы приводит к затуханию колебаний и существенно ограничивает влияние различных возмущающих факторов. Для протонов это излучение практически отсутствует и какого-нибудь затухания колебаний не происходит, поскольку в накопителях энергия частиц и магнитное поле остаются практически постоянными.

При достаточно медленном прохождении нелинейного резонанса может происходить «затягивание» доли частиц в резонанс, сопровождаемое существенным возрастанием амплитуды даже при однократном прохождении [3]. Однако оценки показывают, что на практике прохождение происходит сравнительно быстро. При этом затягивания нет, и возрастание амплитуды будет обязано тем коротким промежуткам времени, в течение которых существует синхронизм между колебаниями частиц и гармониками возмущений магнитного поля.

Возрастание амплитуды в результате быстрого прохождения нелинейного резонанса можно вычислить, пользуясь известными формулами (см. [3], гл. III, § 8).

Оно характеризуется коэффициентом $J = \frac{a^2}{a_i^2}$, где a_i, a — соответственно амплитуды колебаний до и после прохождения. Используя метод стационарной фазы, для J получим выражение

$$J = \left[1 - \left(\frac{k}{2} - 1 \right) G \sqrt{\frac{2\pi}{|\delta'|}} \sin \left(k w_0 \pm \frac{\pi}{4} \right) \right]^{\frac{2}{2-k}}. \tag{2}$$

Здесь k — порядок резонанса ($k > 2$); w_0 — фаза в момент прохождения;

$$G = 2k \, | \langle u_{q,\,k,\,k} \rangle | \left(\frac{2 p a_i^2}{2R} \right)^{\frac{k}{2} - 1}, \tag{3}$$

где $\langle u_{q,\,k,\,k} \rangle$ — усредненные коэффициенты, которые выражаются через функции Флоке f и пропорциональны q-й (резонансной) гармонике возмущения (см. табл. 3 в работе [3]); p — импульс частицы; R — радиус орбиты.

Входящая в выражение (2) величина $\delta' = \frac{d\delta}{d\vartheta}$ определяет скорость изменения расстройки $\delta = \nu - \nu_{\text{рез}}$ в зависимости от пройденного азимутального угла ϑ. Эта величина может быть выражена следующим образом:

$$\delta \approx \nu \frac{\Omega}{\omega} \cdot \frac{\Delta B}{B}, \tag{4}$$

где ΔB, Ω — амплитуда и частота возмущающих осцилляций в магнитном поле, значение которого на орбите обозначено через B. Пользуясь выражением (4), легко оценить скорость прохождения резонанса и убедиться в том, что в большинстве практически встречающихся случаев действительно можно отвлечься от «затягивания» в резонанс и считать прохождение быстрым, удовлетворяющим условию (8.5) работы [3] (гл. III, § 8).

Для упрощения выкладок ограничимся рассмотрением кубичного резонанса $k = 3$, $\nu = q/3$. Используя (2), (3), а также указанную таблицу работы [3], получаем

$$J = \left[1 - \sqrt{\frac{3}{|\delta'|}} \frac{a_i R}{12B} \left| f^3 \frac{\partial^2 b_q}{\partial r^2} \right| \sin \left(3w_0 \pm \frac{\pi}{4} \right) \right]^{-2}, \tag{5}$$

где b_q — q-я гармоника азимутальной асимметрии поля. Для характеристики нелинейности идеального поля можно ввести величины

$$n_{k-1} = (-1)^k \frac{R^k}{B} \cdot \frac{\partial^k B}{\partial_r^k}, \tag{6}$$

представляющие собой обобщение обычного показателя поля $n = n_0$. В сильно фокусирующих установках величины n_k обычно удовлетворяют условиям

$$1 \ll |n_0| \ll |n_1| \ll |n_2|. \tag{7}$$

Приближенно можно считать, что величина n_1 постоянна вдоль орбиты, а величины n_2 в соседних секторах одинаковы по величине и противоположны по знаку. Примем, кроме того, что асимметрия поля b зависит от радиуса так же, как идеальное поле B, и используем для функции Флоке приближенное выражение $f \approx \nu^{-1/2}$.

Поскольку при последовательных прохождениях резонансов различные значения фазы w_0 будут встречаться практически случайным образом, то с помощью (5) можно найти среднее квадратичное приращение амплитуды после s прохождений. Согласно (4) — (7) и сделанным предположениям это приращение будет определяться из соотношения

$$\overline{\left(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_s} \right)^2} = \frac{s}{96R^2} \cdot \frac{\omega}{\Omega} \cdot \frac{B}{\Delta B} \left(n_1 \frac{b_q}{B} \nu \right)^2. \tag{8}$$

Отсюда можно найти то число прохождений s_∞, за которое амплитуда существенно вырастет по сравнению с начальным значением ($a_s \to \infty$), а также определить соответствующий промежуток времени

$$\tau_\infty = \frac{2\pi s_\infty}{\Omega a_i^2} \approx 10^2 T_{\text{обр}} \frac{\Delta B}{B} \left(\frac{R}{a_i} \cdot \frac{B}{b_q} \cdot \frac{1}{n_1} \nu \right)^2, \tag{9}$$

где $T_{\text{обр}}$ — период обращения частицы по орбите.

Для оценок можно принять следующие значения параметров: $\nu \approx 10$; $R \approx 10^4$ *см*; $\frac{\Delta B}{B} \approx \frac{B_q}{B} \approx 10^{-3} \div 10^{-4}$; $n_1 \approx 10^3$; $T_{\text{обр}} \approx 10^{-6}$ *сек*. Подставляя эти данные в (9), получим искомую оценку $\tau_\infty \approx \frac{10}{a_i^2}$ *сек*, где a_i берется в сантиметрах. Она показывает, что даже при очень скромных временах накопления те частицы, которые проходят резонансы, обязательно погибнут. Эти частицы соответствуют интервалу $\Delta\nu \approx \nu \dfrac{\Delta p}{p}$. Поэтому, если полный разброс по импульсам, укладывающийся в магнитную дорожку накопителя, составляет Δp_0, то доля частиц, которая погибнет из-за прохождения резонанса, будет равна $\Delta p/\Delta p_0$. Нужно также учитывать, что кроме рассмотренного одномерного кубичного резонанса имеются еще суммовые кубичные резонансы, пересечение которых также может приводить к потерям, и резонансы более высоких порядков. Последним, однако, соответствуют значительно бо́льшие времена нарастания амплитуд до опасных значений.

Для уменьшения потерь из-за пересечения резонансов нужно стремиться свести к минимуму возмущающие осцилляции в магнитном поле $\Delta B \cos \Omega t$, а также по возможности ослабить зависимость ν от импульса p.

Поступило в Редакцию 3/VII 1964 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Johnsen et al. В кн. «Труды Международной конференции по ускорителям (Дубна, 1963)». М., Атомиздат, 1964, стр. 312.
2. E. Courant. Там же, стр. 361.
3. А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев. Теория циклических ускорителей. М., Физматгиз, 1962.

УДК 621.039.51.12

Эффективный метод решения двумерного уравнения диффузии для ячеек квадратной и шестиугольной формы

Г. И. Марчук, В. П. Кочергин

Двумерное одногрупповое уравнение диффузии с постоянным источником замедления в полярной системе координат можно записать в виде

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\, rD\,\frac{\partial \Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial \theta}\, D\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}-$$

$$-\Sigma_c \Phi(r,\ \theta)=-\xi\Sigma_s. \qquad (1)$$

Конечно-разностные методы при решении уравнения (1) с соответствующими граничными условиями (равенство нулю нормальной производной от потока нейтронов на границе ячейки и непрерывность потока и тока нейтронов), особенно при большом числе узлов, требуют проведения большой вычислительной работы. Если же ограничиться рассмотрением ячеек реальной формы, когда внутренние зоны обладают круговой симметрией, то решение уравнения (1) можно найти при значительно меньших затратах труда. Сущность метода состоит в сведении двумерного уравнения (1) к ряду одномерных уравнений диффузии, которые затем решаются методом конечно-разностной факторизации [1].

Учитывая тот факт, что поток нейтронов $\Phi(r, \theta)$ будет периодической функцией θ с периодом $2l$ (для ячеек квадратной формы $l=\pi/4$, для ячеек шестиугольной формы $l=\pi/6$) и симметричной относительно некоторых осей симметрии, представим $\Phi(r, \theta)$ в виде следующего ряда Фурье*:

$$\Phi(r,\ \theta)=\sum_{\nu=0}^{\infty} R_\nu(r)\cos\frac{\pi}{l}\nu\theta. \qquad (2)$$

Последнюю зону ячейки искусственно продолжим до размеров описанного круга. Тогда, подставляя выражение (2) в (1), умножая его на $\cos \pi/l\, \mu\theta$ и интегрируя по θ в пределах $0-2l$, получим ряд одномерных уравнений диффузии для коэффициентов разложения $R_\nu(r)$:

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}rD\cdot\frac{dR_\nu}{dr}-\left[\sum\nolimits_c+\frac{D}{r^2}\left(\frac{\pi}{l}\nu\right)^2\right]R_\nu(r)=$$

$$=-\xi\sum\nolimits_s\delta_{\nu 0}, \qquad (3)$$

где $\delta_{\nu 0}$ — символ Кронекера.

Коэффициенты Фурье $R_\nu(r)$ на границах внутренних зон и в центре ячейки удовлетворяют следующим граничным условиям, которые легко получить из требований, налагаемых на функцию потока нейтронов $\Phi(r, \theta)$:

$$\begin{cases} R_\nu(r), \quad D\dfrac{dR_\nu}{dr} \text{ — непрерывны по } r \\ \left.\dfrac{dR_\nu}{dr}\right|_{r=0}=0 \qquad (\nu=0,\ 1,\ \ldots). \end{cases} \qquad (4)$$

При использовании схемы «непрерывного счета» и метода разностной факторизации система уравнений (3) с граничными условиями (4) представляется следующей системой конечно-разностных соотношений [2]:

$$\beta_{i+1}^{\nu}=\frac{C_{i+1}}{B_i^{\nu}-\beta_i^{\nu}}, \quad \beta_1^{\nu}=C_1;$$

$$Z_{i+1}^{\nu}=\beta_{i+1}^{\nu}\left(Z_i^{\nu}+\frac{\left(\xi\sum_s \Delta r\right)_i}{a_i}\delta_{\nu 0}\right), \quad Z_1^{\nu}=0;$$

$$R_{\nu,\,i}=\frac{\beta_{i+1}^{\nu}R_{\nu,\,i+1}+Z_{i+1}^{\nu}}{C_{i+1}}, \quad R_{\nu,\,n}=\xi_\nu; \qquad (5)$$

$$a_i=\left(1+\frac{\Delta r_{i+1/2}}{2r_i}\right)\frac{D_{i+1/2}}{\Delta r_{i+1/2}};$$

$$C_i=\frac{1-\dfrac{\Delta r_{i-1/2}}{2r_i}}{1+\dfrac{\Delta r_{i+1/2}}{2r_i}}\cdot\frac{D_{i-1/2}\Delta r_{i+1/2}}{D_{i+1/2}\Delta r_{i-1/2}};$$

* Вследствие условий, налагаемых на функцию $\Phi(r, \theta)$ [(см. выше)], ряд (2) сходится равномерно.