ФИЗИКА

УДК 539.12:530.145

О ВНУТРЕННИХ СИММЕТРИЯХ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА В ГРАФЕНЕ

П.П. Андрусевич[1], **В.А. Плетюхов**[2], **В.И. Стражев**[1]

[1]*Белорусский государственный университет, Минск*
[2]*Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина, Брест*

ON INTERNAL SYMMETRIES OF THE DIRAC EQUATION IN GRAPHENE

P.P. Andrusevich[1],**V.A. Pletyukhov**[2], **V.I. Strazhev**[1]

[1]*Belarusian State University, Minsk*
[2]*Brest State University, Brest*

Исследованы свойства внутренней симметрии уравнений Дирака для безмассового и массивного микрообъекта в пространстве размерности 2+1. При этом используется метод, основанный на приведении рассматриваемых уравнений к вещественной форме. Показано, что безмассовой частице соответствует 12-параметрическая симметрия; при этом в число параметров симмметрии включаются параметры симметрии, соответствующие 10-параметрической группе Ли, изоморфной группе SO(3,2). Рассмотрены также симметрии уравнения Дирака при условии $m \neq 0$ и разных способах учёта массового слагаемого.

Ключевые слова*: внутренняя симметрия, дираковское поле, генераторы, группа, инвариантность.*

The internal symmetries of massless and massive Dirac equations in space-time 2+1 are investigated. It is shown that the massless Dirac equation has 12-parameter symmetry group which as a subgroup contains 10-parameter group Lee SO(3,2). The massive equation $(m \neq 0)$ has the symmetry group SO(2,2).

Keywords*: internal symmetry, Dirac field, generators, group, invariance.*

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф.СКОРИНЫ

Введение

По понятным причинам в начале XXI века появилось большое количество публикаций, в которых проводится теоретическое описание свойств графена и в частности показано, что состояния квазичастиц в решеточной структуре графена в низкоэнергетическом пределе могут быть определены на основе безмассового уравнения Дирака в пространстве размерности 2+1 (см., напр., [1], [2]). В этих публикациях существенное внимание уделяется изучению внутренних симметрий как безмассового, так и массивного уравнений Дирака в указанном пространстве, однако полученные результаты не коррелируют с хорошо известными результатами оценки параметров симметрии для уравнения Дирака в пространстве размерности 3+1. В настоящей работе описан метод исследования внутренней симметрии, разработанный в [3], [4], который основывается на использовании вещественной формы подобных уравнению Дирака релятивистских волновых уравнений. На основе его применения можно установить наличие групп внутренней симметрии лагранжианов безмассового и массивного уравнений Дирака в пространстве размерности 2+1, более широких по числу элементов симметрии чем те, которые обсуждаются в вышеуказанных и других публикациях по данному вопросу и полностью согласующихся с выводами о числе параметров симметрии дираковского поля в пространстве размерности 3+1.

1 Основная часть

Рассмотрим безмассовое уравнение Дирака

$$\gamma_\mu \partial_\mu \psi = 0 \quad (\mu = 0,1,2) \tag{1.1}$$

в пространстве 2+1 с метрикой

$$g_{\mu\nu} = diag(1,1,1). \tag{1.2}$$

Матрицы γ_μ в (1.1) выберем в виде

$$\gamma_0 = \sigma_3 \otimes I_2, \gamma_1 = \sigma_2 \otimes \sigma_1, \gamma_2 = \sigma_2 \otimes \sigma_2, \tag{1.3}$$

где σ_i – матрицы Паули.

Записывая выражение, комплексно сопряженное (1.1), получим уравнение для функции ψ^* :

$$\left(-\gamma_0\partial_0 - \gamma_1\partial_1 + \gamma_2\partial_2\right)\psi^* = 0. \tag{1.4}$$

Рассматривая уравнения (1.1) и (1.4) совместно, придем к 8-компонентной системе, которую можно представить в аналогичной (1.1) форме:

$$\Gamma_\mu \partial_\mu \Psi = 0. \tag{1.5}$$

При выборе волновой функции Ψ в (1.5) в виде матрицы-столбца

$$\Psi = (\psi, \psi^*) \tag{1.6}$$

для матриц Γ_μ будем иметь выражения:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \sigma_3 \otimes \gamma_0, \\ \Gamma_1 &= \sigma_3 \otimes \gamma_1, \\ \Gamma_2 &= I_2 \otimes \gamma_2. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Для дальнейшего рассмотрения удобно перейти к представлению, в котором вещественные и мнимые компоненты волновой функции разделены:

© Андрусевич П.П., Плетюхов В.А., Стражев В.И., 2011

$$\Psi = \Psi = (\psi^r, \psi^i) - \text{столбец},$$

$$\psi^r = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi + \psi^*\right), \quad \psi^i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi - \psi^*\right). \quad (1.8)$$

Указанный переход от представления (1.6) осуществляется посредством унитарного преобразования базиса:

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_4 & I_4 \\ I_4 & -I_4 \end{pmatrix}, \quad u^{-1} = u^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_4 & I_4 \\ I_4 & -I_4 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Матрицы Γ_μ при этом принимают вид:

$$\Gamma_0 = \sigma_1 \otimes \gamma_0, \quad \Gamma_1 = \sigma_1 \otimes \gamma_1, \quad \Gamma_2 = I_2 \otimes \gamma_2. \quad (1.10)$$

Лагранжиан уравнения (1.5)

$$L = -\bar{\Psi}\Gamma_\mu \partial_\mu \Psi = -\Psi^+ \eta \Gamma_\mu \partial_\mu \Psi \quad (1.11)$$

эквивалентен лагранжиану

$$L = -\bar{\psi}\gamma_\mu \partial_\mu \psi = -\psi^+ \gamma_0 \gamma_\mu \partial_\mu \psi \quad (1.12)$$

исходного уравнения (1.1) при выборе в базисе (1.8) матрицы билинейной формы η в виде:

$$\eta = I_2 \otimes \gamma_0. \quad (1.13)$$

Уравнение (1.5) с волновой функцией (1.8), матрицами Γ_μ (1.10) и лагранжианом (1.11), (1.13), следуя [3], [4], будем называть вещественной формой безмассового уравнения Дирака в пространстве размерности 2+1, так как соответствующая система спинорных уравнений, записанная в явном виде, является вещественной. Данную форму мы и будем использовать при установлении группы внутренней симметрии безмассового уравнения Дирака в пространстве размерности 2+1.

Для решения поставленной задачи на начальном этапе будем использовать фермионный базис, в котором матрицы Γ_μ, по определению, имеют структуру:

$$\Gamma_\mu = I_2 \otimes \gamma_\mu. \quad (1.14)$$

Переход от представления (1.10) к представлению (1.14) матриц Γ_μ осуществляется посредством унитарного преобразования в пространстве волновой функции Ψ:

$$A = \frac{1}{2}[I_2 \otimes (I_4 + i\gamma_2) + \sigma_1 \otimes (I_4 - i\gamma_2)],$$
$$A^{-1} = A^+ = \frac{1}{2}[I_2 \otimes (I_4 - i\gamma_2) + \sigma_1 \otimes (I_4 + i\gamma_2)]. \quad (1.15)$$

Матрица билинейной формы η в фермионном базисе принимает вид:

$$\eta = \sigma_1 \otimes \gamma_0. \quad (1.16)$$

Инвариантность уравнения (1.5) с матрицами Γ_μ (1.14) относительно преобразований внутренней симметрии $\Psi'(x_\mu) = Q\Psi(x_\mu)$ обеспечивается операторами четырех типов:

$$Q_1 = q^{(1)} \otimes I_4, \; Q_2 = q^{(2)} \otimes i\gamma_3\gamma_5, \quad (1.17)$$

$$Q_3 = q^{(3)} \otimes \gamma_3, \; Q_4 = q^{(4)} \otimes \gamma_5, \quad (1.18)$$

где $q^{(\alpha)} = q^{(\alpha)}_{mn}$ ($\alpha = 1 \div 4; m, n = 1, 2$) – произвольные комплексные матрицы 2x2; γ_3, γ_5 – матрицы Дирака

$$\gamma_3 = \sigma_2 \otimes \sigma_3, \; \gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3. \quad (1.19)$$

При этом операторы (1.17) удовлетворяют условиям коммутации

$$[Q_1, \Gamma_\mu]_- = [Q_2, \Gamma_\mu]_- = 0, \quad (1.20)$$

а операторы (1.18) – условиям антикоммутации с матрицами Γ_μ:

$$[Q_3, \Gamma_\mu]_+ = [Q_4, \Gamma_\mu]_+ = 0. \quad (1.21)$$

Параметризуя матрицы $q^{(\alpha)}$ посредством матриц I_2, σ_i, получим следующие 16 базисных операторов преобразований внутренней симметрии уравнения (1.5), (1.14):

$$\begin{aligned}
&J^0 = I_8, \; J^1 = \sigma_1 \otimes I_4, \\
&J^2 = \sigma_2 \otimes I_4, \; J^3 = \sigma_3 \otimes I_4, \\
&J^4 = iI_2 \otimes \gamma_3\gamma_5, \; J^5 = i\sigma_1 \otimes \gamma_3\gamma_5, \\
&J^6 = i\sigma_2 \otimes \gamma_3\gamma_5, \; J^7 = i\sigma_3 \otimes \gamma_3\gamma_5, \\
&J^8 = I_2 \otimes \gamma_3, \; J^9 = \sigma_1 \otimes \gamma_3, \\
&J^{10} = \sigma_2 \otimes \gamma_3, \; J^{11} = \sigma_3 \otimes \gamma_3, \\
&J^{12} = I_2 \otimes \gamma_5, \; J^{13} = \sigma_1 \otimes \gamma_5, \\
&J^{14} = \sigma_2 \otimes \gamma_5, \; J^{15} = \sigma_3 \otimes \gamma_5.
\end{aligned} \quad (1.22)$$

(Множитель i здесь введён для обеспечения эрмитовости матриц (1.22)).

Возвращаясь теперь снова в базис (1.8), получим для операторов (1.22) выражения:

$$\begin{aligned}
&J^0 = I_8, \; J^1 = \sigma_1 \otimes I_4, \\
&J^2 = -\sigma_3 \otimes \gamma_2, \; J^3 = \sigma_2 \otimes \gamma_2, \\
&J^4 = iI_2 \otimes \gamma_3\gamma_5, \; J^5 = i\sigma_1 \otimes \gamma_3\gamma_5, \\
&J^6 = -i\sigma_3 \otimes \gamma_0\gamma_1, \; J^7 = i\sigma_2 \otimes \gamma_0\gamma_1, \\
&J^8 = \sigma_1 \otimes \gamma_3, \; J^9 = I_2 \otimes \gamma_3, \\
&J^{10} = -i\sigma_2 \otimes \gamma_2\gamma_3, \; J^{11} = -i\sigma_3 \otimes \gamma_2\gamma_3, \\
&J^{12} = \sigma_1 \otimes \gamma_5, \; J^{13} = I_2 \otimes \gamma_5, \\
&J^{14} = -i\sigma_2 \otimes \gamma_2\gamma_5, \; J^{15} = -i\sigma_3 \otimes \gamma_2\gamma_5.
\end{aligned} \quad (1.23)$$

Условие сохранения структуры (1.8) волновой функции (условие вещественности) относительно преобразований, задаваемых базисными операторами (1.23), накладывает ограничения на соответствующие параметры ω_N ($N = 0 \div 15$):

$$\begin{aligned}
&\omega_0, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6, \\
&\omega_7, \omega_8, \omega_{10}, \omega_{11}, \omega_{13} - \text{вещественные}, \\
&\omega_1, \omega_5, \omega_9, \omega_{12}, \omega_{14}, \omega_{15} - \text{мнимые}.
\end{aligned} \quad (1.24)$$

Требование инвариантности лагранжиана (1.11) относительно матричных преобразований (1.17), (1.18)

$$Q^+ \eta \Gamma_\mu Q = \eta \Gamma_\mu \quad (1.25)$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

накладывает на эти преобразования, помимо (20), (21), дополнительные ограничения

$$Q_1^+\eta Q_1 = \eta,\ Q_2^+\eta Q_2 = \eta, \qquad (1.26)$$

$$Q_3^+\eta Q_3 = -\eta,\ Q_4^+\eta Q_4 = -\eta, \qquad (1.27)$$

после учёта в которых ограничений (1.24) получим следующие четыре условия, связывающие параметры ω_N :

$$\omega_0^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2 = 1\,, \qquad (1.28)$$

$$\omega_4^2 - \omega_5^2 - \omega_6^2 - \omega_7^2 = 1\,, \qquad (1.29)$$

$$\omega_8^2 - \omega_9^2 - \omega_{10}^2 - \omega_{11}^2 = 1\,, \qquad (1.30)$$

$$-\omega_{12}^2 + \omega_{13}^2 + \omega_{14}^2 + \omega_{15}^2 = 1. \qquad (1.31)$$

Таким образом, внутренняя симметрия лагранжиана безмассового уравнения Дирака в пространстве размерности 2+1 описывается 12-параметрической группой матричных преобразований, которая получается в результате требования выполнения условий (1.24), (1.27) для параметров, соответствующих базисным операторам (1.23) этой группы.

Отметим, что шестипараметрическая группа симметрии Паули–Гюрши [5]–[7], характерная для безмассового дираковского поля в пространстве размерности 3+1, содержится здесь в качестве подгруппы и может быть задана, например, базисными операторами $J^1, J^2, J^3, J^{13}, J^{14}, J^{15}$.

Чтобы выделить из полученных преобразований те, которые представимы в форме Ли $Q = e^{\omega J}$, где в качестве генераторов J выступают матрицы (1.23), условия (1.26), (1.27) надо записать для бесконечно малых преобразований $Q = 1 + \omega J$. В результате получим условия

$$(\omega J)^+ \eta = \mp \omega \eta J, \qquad (1.32)$$

где знак «–» соответствует генераторам $J^0, ..., J^7$, коммутирующим с матрицами Γ_μ, а знак «+» – генераторам $J^8, ..., J^{15}$, антикоммутирующим с Γ_μ. Условия (1.32) с учётом (1.24) выполняются для десяти однопараметрических преобразований, определяемых (эрмитовскими) генераторами J^1, J^2, J^3, J^5, J^6, J^7, J^9, J^{10}, J^{11}, J^{12}, которые удовлетворяют правилам алгебры генераторов группы SO(5). Учитывая же, что из десяти параметров данных преобразований шесть ($\omega_2, \omega_3, \omega_6, \omega_7, \omega_{10}, \omega_{11}$) являются вещественными и четыре ($\omega_1, \omega_5, \omega_9, \omega_{12}$) – мнимыми, приходим к выводу: группа Ли преобразований внутренней симметрии лагранжиана безмассового уравнения Дирака в пространстве размерности 2+1 изоморфна группе SO(3,2).

Вводя в уравнение (1.1) стандартный массовый член $m\psi$ и переходя к вещественной форме записи, получим 8-компонентное уравнение

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + m)\Psi = 0 \qquad (1.33)$$

с теми же матрицами Γ_μ, что и в безмассовом варианте. Очевидно, что группу внутренней симметрии соответствующего уравнению (1.33) лагранжиана

$$L = -\bar{\Psi}(\Gamma_\mu \partial_\mu + m)\Psi = -\Psi^+ \eta(\Gamma_\mu \partial_\mu + m)\Psi \qquad (1.34)$$

можно определить, если исключить преобразования Q_3, Q_4, антикоммутирующие с матрицами Γ_μ, из группы симметрии безмассового лагранжиана (1.11). В результате остаются преобразования, задаваемые генераторами J^1, J^2, J^3, J^5, J^6, J^7. Используя для удобства обозначения, $J^5 = I^1, J^6 = I^2, J^7 = I^3$, $\omega_5 = \theta_1, \omega_6 = \theta_2, \omega_7 = \theta_3$, нетрудно убедиться, что эрмитовские генераторы J^i, I^i удовлетворяют соотношениям коммутации:

$$[J^i, J^i] = 2i\varepsilon_{ijk} J^k,$$
$$[I^i, I^i] = 2i\varepsilon_{ijk} J^k, \qquad (1.35)$$
$$[J^i, I^i] = 2i\varepsilon_{ijk} I^k.$$

Учитывая, что этим генераторам соответствуют четыре вещественных ($\omega_2, \omega_3, \theta_2, \theta_3$) и два мнимых ($\omega_1, \theta_1$) параметра, получаем группу Ли, изоморфную группе SO(2,2). Генераторы J^i образуют в ней подгруппу SO(2,1) зарядовой симметрии, свойственную массивному полю Дирака в пространстве размерности 3+1 [7], [8].

В пространстве размерности 2+1 существуют другие способы введения массового члена в уравнение Дирака, например, такой:

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m\gamma_3)\psi = 0\,. \qquad (1.36)$$

Переходя к вещественной форме уравнения (1.36) и учитывая, что матрица γ_3 мнимая, получим в представлении (1.8) уравнение

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + m\Gamma_3)\Psi = 0, \qquad (1.37)$$

где

$$\Gamma_3 = \sigma_1 \otimes \gamma_3\,. \qquad (1.38)$$

Группа внутренней симметрии лагранжиана, соответствующая уравнению (1.37)

$$L = -\bar{\Psi}(\Gamma_\mu \partial_\mu + m\Gamma_3)\Psi, \qquad (1.39)$$

формируется из преобразований типа Q_1 и Q_4, соответственно коммутирующих и антикоммутирующих со всеми матрицами Γ в уравнении (1.37), в том числе и с матрицей Γ_3. Другими словами, речь идёт о базисных операторах J^0, J^1, J^2, J^3, J^{12}, J^{13}, J^{14}, J^{15}, на параметры которых накладываются два условия: (1.28), (1.31). В результате получается шестипараметрическая группа, которая совпадает с упоминаемой выше группой Паули – Гюрши. Преобразования в форме Ли определяются в данном случае

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

генераторами J^1, J^2, J^3, J^{12} и образуют группу $SO(2,1) \otimes U(1)$.

Рассмотрим также уравнение

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m\gamma_5)\psi = 0, \qquad (1.40)$$

вещественная форма которого имеет вид:

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + m\Gamma_5)\Psi = 0, \;\; \Gamma_5 = I_2 \otimes \gamma_5. \qquad (1.41)$$

Инвариантность лагранжиана

$$L = -\bar{\Psi}(\Gamma_\mu \partial_\mu + m\Gamma_5)\Psi \qquad (1.42)$$

обеспечивается преобразованиями, соответствующими базисным операторам $J^0, J^1, J^6, J^7, J^8, J^9, J^{14}, J^{15}$ при двух ограничениях на соответствующие им параметры. Следовательно, опять получаем шестипараметрическую группу. Преобразования, представимые в форме Ли, определяются здесь генераторами J^1, J^6, J^7, J^9 и образуют, как и в предыдущем случае, группу $SO(2,1) \otimes U(1)$.

Наконец, лагранжиан

$$L = -\bar{\Psi}(\Gamma_\mu \partial_\mu + im\Gamma_3\Gamma_5)\Psi$$

уравнения

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + im\gamma_3\gamma_5)\psi = 0,$$

записанного в вещественной форме, инвариантен, как нетрудно убедиться, относительно всех преобразований, соответствующих базисным операторам (1.23), с учётом ограничений (1.28)–(1.31). Следовательно, группа внутренней симметрии лагранжиана (1.42) для массивного поля в пространстве размерности 2+1 совпадает с группой симметрии лагранжиана (1.11) безмассового поля.

Заключение

Итак, наиболее полная группа матричных преобразований внутренней симметрии безмассового уравнения Дирака в пространстве размерности 2+1 содержит 12 независимых параметров и содержит известную 6-параметрическую группу Паули – Гюрши в качестве подгруппы. При этом преобразования, представимые в форме Ли, описываются 10-параметрической группой, изоморфной группе SO(3,2). Установленная симметрия значительно шире U(2)-симметрии, которая обычно сопоставляется безмассовому уравнению Дирака в работах других авторов на данную тему (см., напр., [1], [2] и цитированную там литературу). Группа симметрии массивного уравнения Дирака зависит от способа введения массового члена.

Полученные результаты являются новыми и могут оказаться полезными при описании решёточной структуры графена методами релятивистской квантовой механики в континууме.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Magnetic field driven metal-insulator phase transition in planar systems* / E.V. Gorbar [et al.] // arXiv: cond-mat/0202422v3 26 Aug 2002.

2. *Gusynin, V.P.* AC Conductivity of graphene: from tight-binding model to 2+1-dimensional quantum electrodynamics / V.P. Gusynin, S.G. Sharapov, J.P. Carbotte // arXiv: 0706. 3016v2 [cond-mat. mess-hall] 27 Nov 2007.

3. *Плетюхов, В.А.* Вещественное поле Дирака-Кэлера и дираковские частицы / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Вестник БГУ. Серия 1. – 2009. – № 2. – С. 3–7.

4. *Плетюхов, В. А.* Внутренняя симметрия восьмикомпонентного дираковского поля / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев, П.П. Андрусевич // Весці НАНБ, сер. фіз.-мат. навук. – 2010. – № 4. – С. 89–94.

5. *Pauli, W.* On the conservation of the lepton charge / W. Pauli // Nuovo Cim. – 1957. – Vol. 6, № 1. – P. 204–215.

6. *Gürsey, F.* Connection of charge independence and barion number conservation with the Pauli transformation / F. Gürsey // Nuovo Cim. – 1958. – Vol. 8. – P. 411–415.

7. *Нишиджима, К.* Фундаментальные частицы / К. Нишиджима // М. : Мир, 1965. – 462 с.

8. *Стражев, В. И.* О группе зарядовой симметрии релятивистских волновых уравнений / В.И. Стражев, П. Л. Школьников // Известия вузов. Физика. – 1981. – № 11. – С. 115–117.

Поступила в редакцию 01.06.11.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ