Проблемы физики, математики и техники, № 2 (7), 2011

МАТЕМАТИКА

УДК 512.548

ВЕКТОР-ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВЕКТОР-МАТРИЦ

А.М. Гальмак

Могилёвский государственный университет продовольствия, Могилёв

VECTOR-DETERMINANTS AND DETERMINANTS OF VECTOR-MATRICES

A.M. Gal'mak

Mogilev State University of Food Technologies, Mogilev

В статье определяются и изучаются вектор-определители и определители вектор-матриц.

Ключевые слова: *вектор-матрица, определитель, вектор-определитель, n-арная группа.*

The vector-determinants and determinants of vector-matrices are defined and studied in this paper.

Keywords: *vector-matrice, determinant, vector-determinant, n-ary group.*

Введение

Понятие вектор-матрицы над произвольным кольцом введено в [1], [2] как обобщение понятия m-арной матрицы Э. Поста [3]. В [1], [2] для произвольных целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки σ из S_k на множестве всех k-компонентных вектор-матриц над ассоциативным кольцом была определена частичная l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$, которая является l-арным аналогом бинарной операции умножения обычных матриц. Первоначально l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ определялась [4], [5] на декартовой степени полугруппы, то есть для вектор-матриц первого порядка. Множество всех k-компонентных вектор-матриц над ассоциативным кольцом P, у которых каждая компонента является квадратной матрицей порядка n, обозначается [1], [2] символом $\mathbf{M}(n, k, P)$. Для ассоциативного, коммутативного кольца P с единицей во множестве $\mathbf{M}(n, k, P)$ выделяется [1] подмножество $\mathbf{GL}(n, k, P)$ всех k-компонентных вектор-матриц, у которых все компоненты обратимы в кольце $\mathbf{M}(n, P)$ всех матриц порядка n над P.

Имеет место

Теорема [1], [2]. *Если подстановка* $\sigma \in S_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то* $<\mathbf{M}(n, k, P), [\ ]_{l,\sigma,k}>$ *– l-арная полугруппа, а* $<\mathbf{GL}(n, k, P), [\ ]_{l,\sigma,k}>$ *– l-арная группа. В частности*, если $\sigma = (12\ldots k)$, то $<\mathbf{M}(n, k, P), [\ ]_{k+1,(12\ldots k),k}>$ – $(k+1)$-*арная полугруппа*, а $<\mathbf{GL}(n, k, P), [\ ]_{k+1,(12\ldots k),k}>$ – $(k+1)$-*арная группа*.

В теории обычных матриц каждой квадратной матрице над ассоциативным, коммутативным кольцом с единицей ставится в соответствие ее определитель, являющийся элементом этого кольца. Возникает естественный вопрос: *что считать аналогом обычного определителя для вектор-матрицы*?

В данной работе для каждой вектор-матрицы $\mathbf{A}$ над ассоциативным, коммутативным кольцом с единицей определяются вектор-определитель $\mathbf{detA}$ и определитель $\mathrm{det}\mathbf{A}$, которые для обычной матрицы совпадают с ее определителем. Изучаются свойства $\mathbf{detA}$ и $\mathrm{det}\mathbf{A}$. Рассматривается более общая ситуация, когда для всякой функции u из $\mathbf{M}(n, P)$ в P определяются функции **u** и u из $\underbrace{\mathbf{M}(n, P)\times\ldots\times\mathbf{M}(n, P)}_{k}$ в P^k и P соответственно. В частности, для всякой вектор-матрицы $\mathbf{A}$ над ассоциативным, коммутативным кольцом с единицей определяются вектор-перманент $\mathbf{perA}$ и перманент $\mathrm{per}\mathbf{A}$, которые для обычной матрицы совпадают с ее перманентом.

Сведения об n-арных группах, используемые в данной работе, можно найти у С.А. Русакова [6], а также в книгах [7], [8].

1 Определения

Определение 1.1. Пусть P – ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей. *Векторным определителем* или *вектор-определителем* вектор-матрицы $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_k)$, у которой все компоненты $A_1, \ldots, A_k$ являются квадратными матрицами над P, называется упорядоченный набор

$$\mathbf{detA} = (\mathrm{det}A_1, \ldots, \mathrm{det}A_k) \in P^k$$

определителей $\mathrm{det}A_1, \ldots, \mathrm{det}A_k$ матриц-компонент. *Определителем* той же вектор-матрицы $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_k)$ называется произведение

$$\mathrm{det}\mathbf{A} = \mathrm{det}A_1\mathrm{det}A_2 \ldots \mathrm{det}A_k \in P.$$

Ясно, что при $k = 1$ понятия вектор-определителя и определителя совпадают:

$$\mathbf{detA} = \mathrm{det}\mathbf{A}.$$

***Пример* 1.1.** Если $k = 3$, $P = \mathrm{Z}$,

$$\mathbf{A} = \left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, 5, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right),$$

то

$$\mathbf{detA} = (16, 5, -3),\ \det\mathbf{A} = -240.$$

Далее все вектор-матрицы рассматриваются над ассоциативным, коммутативным кольцом с единицей.

2 Общие свойства вектор-определителей и определителей

Сформулированные ниже свойства вектор-определителей получаются с помощью соответствующих свойств обычных определителей.

Напомним [1], что вектор-матрица $\mathbf{A}'$ называется *транспонированной* для квадратной вектор-матрицы $\mathbf{A}$, если все её компоненты являются транспонированными для соответствующих компонент вектор-матрицы $\mathbf{A}$.

***Предложение* 2.1**. *Если* $\mathbf{A}'$ *– транспонированная вектор-матрица для квадратной вектор-матрицы* $\mathbf{A}$, *то*

$$\mathbf{detA}' = \mathbf{detA},\quad \det\mathbf{A}' = \det\mathbf{A}.$$

***Предложение* 2.2**. *Если в каждой компоненте квадратной вектор-матрицы* $\mathbf{A}$ *над* P *имеется строка или столбец, состоящий целиком из нулей кольца* P, *то*

$$\mathbf{detA} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}) = \mathbf{0} \in P^k,\ \det\mathbf{A} = 0 \in P,$$

где 0 *– нуль кольца* P.

Напомним [1], [2], что *произведением* $\lambda \in P$ *на вектор-матрицу* $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_k)$ называется вектор-матрица

$$\lambda\mathbf{A} = (\lambda A_1, \ldots, \lambda A_k).$$

***Предложение* 2.3**. *Для любого* $\lambda \in P$ *и любой квадратной вектор-матрицы* $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_k)$ *над* P *верны равенства*

$$\mathbf{det}(\lambda\mathbf{A}) = (\lambda^{n_1}\det A_1, \ldots, \lambda^{n_k}\det A_k),$$
$$\det(\lambda\mathbf{A}) = \lambda^{n_1+\ldots+n_k}\det\mathbf{A}.$$

где $n_1, \ldots, n_k$ *– порядки матриц-компонент* $A_1, \ldots, A_k$ *соответственно*.

Доказательство. Действительно,

$$\mathbf{det}(\lambda\mathbf{A}) = \mathbf{det}(\lambda(A_1, \ldots, A_k)) =$$
$$= \mathbf{det}(\lambda A_1, \ldots, \lambda A_k) =$$
$$= (\det(\lambda A_1), \ldots, \det(\lambda A_k)) =$$
$$= (\lambda^{n_1}\det A_1, \ldots, \lambda^{n_k}\det A_k),$$
$$\det(\lambda\mathbf{A}) = \det(\lambda(A_1, \ldots, A_k)) =$$
$$= \det(\lambda A_1, \ldots, \lambda A_k) =$$
$$= \det(\lambda A_1) \ldots \det(\lambda A_k)) =$$
$$= \lambda^{n_1}\det A_1 \ldots \lambda^{n_k}\det A_k =$$
$$= \lambda^{n_1+\ldots+n_k}\det A_1 \ldots \det A_k = \lambda^{n_1+\ldots+n_k}\det\mathbf{A}.$$

Предложение доказано.

Считая в предложении 2.3 $\mathbf{A}$ квадратной вектор матрицей порядка n, то есть вектор-матрицей, у которой все компоненты – квадратные матрицы порядка n, получим

***Следствие* 2.1**. Для любого $\lambda \in P$ и любой квадратной вектор-матрицы $\mathbf{A}$ порядка n над P верно

$$\mathbf{det}(\lambda\mathbf{A}) = \lambda^n\mathbf{detA},\quad \det(\lambda\mathbf{A}) = \lambda^{kn}\det\mathbf{A}.$$

***Предложение* 2.4**. *Если в каждой компоненте квадратной вектор-матрицы* $\mathbf{A}$ *переставить любые две строки или два столбца, то*:

1) *вектор-определитель полученной вектор-матрицы* $\mathbf{B}$ *равен вектор-определителю вектор-матрицы* $\mathbf{A}$, *взятому со знаком минус*:

$$\mathbf{detB} = -\,\mathbf{detA};$$

2) *определитель полученной вектор-матрицы* $\mathbf{B}$ *равен определителю вектор-матрицы* $\mathbf{A}$, *если число компонент четное, и равен определителю вектор-матрицы* $\mathbf{A}$, *взятому со знаком минус, если число компонент нечетное*:

$$\det\mathbf{B} = \det\mathbf{A},\ k \text{ – четное},$$
$$\det\mathbf{B} = -\det\mathbf{A},\ k \text{ – нечетное}.$$

Доказательство. Если

$$\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_k),\ \mathbf{B} = (B_1, \ldots, B_k),$$

то

$$\mathbf{detB} = (\det B_1, \ldots, \det B_k) =$$
$$= (-\det A_1, \ldots, -\det A_k) =$$
$$= -(\det A_1, \ldots, \det A_k) = -\,\mathbf{detA},$$

то есть верно равенство из 1);

$$\det\mathbf{B} = \det B_1 \ldots \det B_k = -\det A_1 \ldots (-\det A_k) =$$
$$=(-1)^k\det A_1 \ldots \det A_k = (-1)^k\det\mathbf{A},$$

то есть верны равенства из 2). Предложение доказано.

***Пример* 2.1.** Если

$$\mathbf{A} = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\right),$$

$$\mathbf{B} = \left(\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}\right),$$

то есть вектор-матрица $\mathbf{B}$ получена из вектор-матрицы $\mathbf{A}$ перестановкой столбцов в первой компоненте и перестановкой первой и третьей строк во второй компоненте, то

$$\mathbf{detB} = -\,\mathbf{detA},\ \det\mathbf{A} = \det\mathbf{B}.$$

Если же

$$\mathbf{C} = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right),$$

$$\mathbf{D} = \left(\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ c_2 & c_1 & c_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y & x \\ t & z \end{pmatrix}\right),$$

то есть вектор-матрица $\mathbf{D}$ получена из вектор-матрицы $\mathbf{C}$ перестановкой строк в первой компоненте, перестановкой первого и второго столбцов во второй компоненте и перестановкой столбцов в третьей компоненте, то

$$\det\mathbf{C} = -\det\mathbf{D}.$$

***Предложение* 2.5**. *Справедливы следующие утверждения*:

1) *если в каждой компоненте квадратной вектор-матрицы* $\mathbf{A}$ *имеются две одинаковые строки или два одинаковых столбца, то*

$$\mathbf{det}\mathbf{A} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}) = \mathbf{0} \in P^k;$$

2) *если в некоторой компоненте квадратной вектор-матрицы* **A** *имеются две одинаковые строки или два одинаковых столбца, то*

$$\det\mathbf{A} = 0 \in P.$$

***Предложение* 2.6**. *Пусть* $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_k)$ – *квадратная k-компонентная вектор-матрица*,

$$0 \le r \le k,\ 0 \le s \le k,\ 0 \le t \le k,\ r + s + t = k.$$

Если у вектор-матрицы **A** *r компонент* $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ *оставить неизменными, в s компонентах* $A_{j_1}, \ldots, A_{j_s}$ *к некоторой строке прибавить соответственные элементы любой другой строки, умноженные на произвольный элемент из P, в оставшихся t компонентах* $A_{m_1}, \ldots, A_{m_t}$ *к некоторому столбцу прибавить соответственные элементы любого другого столбца, умноженные на произвольный элемент из P, то*:

1) *вектор-определитель полученной вектор-матрицы* **B** *будет равен вектор-определителю вектор-матрицы* **A**:

$$\mathbf{detA} = \mathbf{detB};$$

2) *определитель полученной вектор-матрицы* **B** *будет равен определителю вектор-матрицы* **A**:

$$\det\mathbf{A} = \det\mathbf{B}.$$

Заметим, что в предыдущем предложении в каждой из компонент $A_{j_1}, \ldots, A_{j_s}$ суммируемые строки должны быть разными. Кроме того, номера суммируемых строк в различных компонентах не обязаны совпадать. Сказанное относится и к столбцам в компонентах $A_{m_1}, \ldots, A_{m_t}$.

3 Аналог теоремы о произведении определителей

Следующая теорема обобщает бинарный результат о равенстве определителя произведения матриц произведению определителей этих матриц.

***Теорема* 3.1.** *Пусть* $\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \ldots, A_{ik})$, $i = 1, \ldots, l$ – *k-компонентные вектор-матрицы*, *у которых для любого* $j \in \{1, \ldots, k\}$ *компоненты*

$$A_{1j}, A_{2\sigma(j)}, \ldots, A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}, A_{l\sigma^{l-1}(j)}$$

– *квадратные матрицы одного и того же порядка*. *Тогда*

$$\mathbf{det}[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} = [\mathbf{detA}_1 \ldots \mathbf{detA}_l]_{l,\sigma,k}, \quad (3.1)$$

$$\det[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} = \det\mathbf{A}_1 \ldots \det\mathbf{A}_l. \quad (3.2)$$

Доказательство. Докажем (3.1). Из условия теоремы вытекает, что вектор-матрица $[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k}$ существует. Отметим также, что в правой и левой частях равенства (3.1) одним и тем же символом обозначены различные l-арные операции: в левой части l-арная операция определена на вектор-матрицах, а в правой части на элементах из P^k, где P – кольцо, над которым рассматриваются вектор-матрицы.

Положим

$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} = (Y_1, \ldots, Y_k),$$
$$\mathbf{det}[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} = (y_1, \ldots, y_k),$$
$$[\mathbf{detA}_1 \ldots \mathbf{detA}_l]_{l,\sigma,k} = (z_1, \ldots, z_k).$$

Используя определение l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ (определение 1.2 из [1]) и бинарный результат о равенстве определителя произведения матриц произведению их определителей, получим

$$y_j = \det Y_j = \det(A_{1j}A_{2\sigma(j)} \ldots A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}A_{l\sigma^{l-1}(j)}) =$$
$$= \det A_{1j}\det A_{2\sigma(j)} \ldots \det A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}\det A_{l\sigma^{l-1}(j)},$$

то есть

$$y_j = \det A_{1j}\det A_{2\sigma(j)} \ldots \det A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}\det A_{l\sigma^{l-1}(j)}. \quad (3.3)$$

Так как

$$[\mathbf{detA}_1 \ldots \mathbf{detA}_l]_{l,\sigma,k} =$$
$$= [(\det A_{11}, \ldots, \det A_{1k}) \ldots (\det A_{l1}, \ldots, \det A_{lk})]_{l,\sigma,k},$$

то, согласно определению операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ на множестве P^k [4], [5],

$$z_j = \det A_{1j}\det A_{2\sigma(j)} \ldots \det A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}\det A_{l\sigma^{l-1}(j)}. \quad (3.4)$$

Из (3.3) и (3.4) вытекает $y_j = z_j$ для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$. Следовательно, верно (3.1).

Докажем теперь (3.2). Так как, согласно определению 1.1,

$$\det\mathbf{A}_1 = \det A_{11} \ldots \det A_{1k}, \ldots,$$
$$\det\mathbf{A}_l = \det A_{l1} \ldots \det A_{lk},$$

то

$$\det\mathbf{A}_1 \ldots \det\mathbf{A}_l =$$
$$= \det A_{11} \ldots \det A_{1k} \ldots \det A_{l1} \ldots \det A_{lk}. \quad (3.5)$$

Согласно тому же определению 1.1

$$\det[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} = y_1 \ldots y_k,$$

где $y_1, \ldots, y_k$ определяются с помощью (3.3), то есть

$$\det[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} = \det A_{11}\det A_{2\sigma(1)} \ldots$$
$$\ldots \det A_{(l-1)\sigma^{l-2}(1)} \det A_{l\sigma^{l-1}(1)} \ldots$$
$$\ldots \det A_{1k}\det A_{2\sigma(k)} \ldots \det A_{(l-1)\sigma^{l-2}(k)} \det A_{l\sigma^{l-1}(k)}. \quad (3.6)$$

Правые части в (3.5) и (3.6) состоят из kl сомножителей. Так как $\sigma \in S_k$, то для любого $i = 1, \ldots, l-1$ множество $\{\sigma^i(1), \ldots, \sigma^i(k)\}$ совпадает с множеством $\{1, \ldots, k\}$. Поэтому в правой части (3.6) для любого $i = 1, \ldots, l$ присутствуют в качестве сомножителей компоненты $A_{i1}, \ldots, A_{ik}$. Это означает, что правые части в (3.5) и (3.6) состоят из одних и тех же сомножителей. А так как P – коммутативное кольцо, то правые части в (3.5) и (3.6) совпадают. Следовательно, равны и левые части в (3.5) и (3.6), то есть верно (3.2). Теорема доказана.

***Следствие* 3.1.** *Пусть* σ –*цикл длины k из* S_k,

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \ldots, A_{ik}),\ i = 1, \ldots, k+1$$

– *k-компонентные вектор-матрицы*, *у которых для любого* $j \in \{1, \ldots, k\}$ *компоненты*

$$A_{1j}, A_{2\sigma(j)}, \ldots, A_{k\sigma^{k-1}(j)}, A_{(k+1)j}$$

– *квадратные матрицы одного и того же порядка*. *Тогда*

$$\mathbf{det}[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{k+1}]_{k+1,\sigma,k} = [\mathbf{detA}_1 \ldots \mathbf{detA}_{k+1}]_{k+1,\sigma,k},$$

$$\det[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{k+1}]_{k+1,\,\sigma,\,k} = \det\mathbf{A}_1 \ldots \det\mathbf{A}_{k+1}.$$

Полагая в следствии 3.1 $\sigma = (12\ldots k)$, получим

***Следствие* 3.2.** *Пусть*

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \ldots, A_{ik}),\ i = 1, \ldots, k + 1$$

– k-компонентные вектор-матрицы, у которых для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$ компоненты

$$A_{1j}, A_{2(j+1)}, \ldots, A_{(k+1-j)k}, A_{(k+2-j)1}, \ldots, A_{k(j-1)}, A_{(k+1)j}$$

– квадратные матрицы одного и того же порядка. Тогда

$$\mathbf{det}[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{k+1}]_{k+1,\,(12\ldots k),\,k} =$$
$$= [\mathbf{detA}_1 \ldots \mathbf{detA}_{k+1}]_{k+1,\,(12\ldots k),\,k},$$
$$\det[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{k+1}]_{k+1,\,(12\ldots k),\,k} = \det\mathbf{A}_1 \ldots \det\mathbf{A}_{k+1}.$$

4 Гомоморфизмы из $<\mathbf{GL}(n, k, P), [\ ]_{l,\,\sigma,\,k}>$

***Лемма* 4.1.** *Пусть A – абелева группа, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда отображение*

$$\delta\colon (a_1, \ldots, a_k) \to a_1 \ldots a_k$$

является гомоморфизмом l-арной группы $<A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k}>$ на l-арную группу $<A, [\ ]_l>$, производную от группы A.

Доказательство. Согласно теореме 3.6.2 [5], универсальная алгебра $<A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k}>$ действительно является l-арной группой.

Так как для любого $a \in A$

$$\delta : (a, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-1}) \to a\,\underbrace{1 \ldots 1}_{k-1} = a,$$

где 1 – единица группы A, то δ отображает A^k на A. Для произвольных

$$a_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1k}), \ldots, a_l = (a_{l1}, \ldots, a_{lk}) \in A^k,$$

используя абелевость группы A и совпадение множеств

$$\{1, \ldots, k\}, \{\sigma(1), \ldots, \sigma(k)\}, \ldots, \{\sigma^{l-1}(1), \ldots, \sigma^{l-1}(k)\},$$

будем иметь

$$\delta([a_1 \ldots a_l]_{l,\,\sigma,\,k}) =$$
$$= \delta([(a_{11}, \ldots, a_{1k}) \ldots (a_{l1}, \ldots, a_{lk})]_{l,\,\sigma,\,k}) =$$
$$= \delta((a_{11}a_{2\sigma(1)} \ldots a_{l\sigma^{l-1}(1)}, \ldots, a_{1k}a_{2\sigma(k)} \ldots a_{l\sigma^{l-1}(k)})) =$$
$$= (a_{11}a_{2\sigma(1)} \ldots a_{l\sigma^{l-1}(1)}) \ldots (a_{1k}a_{2\sigma(k)} \ldots a_{l\sigma^{l-1}(k)}) =$$
$$= a_{11} \ldots a_{1k}a_{2\sigma(1)} \ldots a_{2\sigma(k)} \ldots a_{l\sigma^{l-1}(1)} \ldots a_{l\sigma^{l-1}(k)} =$$
$$= (a_{11} \ldots a_{1k})(a_{21} \ldots a_{2k}) \ldots (a_{l1} \ldots a_{lk}) =$$
$$= \delta(a_1)\delta(a_2) \ldots \delta(a_l) = [\delta(a_1)\delta(a_2) \ldots \delta(a_l)]_l,$$

то есть

$$\delta([a_1 \ldots a_l]_{l,\,\sigma,\,k}) = [\delta(a_1)\delta(a_2) \ldots \delta(a_l)]_l.$$

Лемма доказана.

В следующей теореме символом P^* обозначается группа всех обратимых элементов кольца P.

***Теорема* 4.1.** *Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то:*

1) *отображение $\gamma\colon \mathbf{A} \to \mathbf{detA}$ является гомоморфизмом l-арной группы $<\mathbf{GL}(n, k, P), [\ ]_{l,\,\sigma,\,k}>$ на l-арную группу $<P^{*k}, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k}>$;*

2) *отображение $\beta\colon \mathbf{A} \to \det\mathbf{A}$ является гомоморфизмом l-арной группы $<\mathbf{GL}(n, k, P), [\ ]_{l,\,\sigma,\,k}>$* на *l-арную группу $<P^*, [\ ]_l>$, производную от группы P^*.*

Доказательство. 1) Ясно, что γ отображает

$$\mathbf{GL}(n, k, P) = \underbrace{\mathbf{GL}(n, P) \times \ldots \times \mathbf{GL}(n, P)}_{k}$$

на всё P^{*k}. Пусть

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \ldots, A_{ik}) \in \mathbf{GL}(n, k, P),\ i = 1, \ldots, l,$$
$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\,\sigma,\,k} = (Y_1, \ldots, Y_k).$$

Тогда

$$\gamma([\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\,\sigma,\,k}) =$$
$$= \gamma([(A_{11}, \ldots, A_{1k}) \ldots (A_{l1}, \ldots, A_{lk})]_{l,\,\sigma,\,k}) =$$
$$= \gamma(Y_1, \ldots, Y_j = A_{1j}A_{2\sigma(j)} \ldots A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}A_{l\sigma^{l-1}(j)}, \ldots, Y_k) =$$
$$= (\det Y_1, \ldots, \det Y_j = \det A_{1j}\det A_{2\sigma(j)} \ldots$$
$$\ldots \det A_{l\sigma^{l-1}(j)}, \ldots, \det Y_k) =$$
$$= [(\det A_{11}, \ldots, \det A_{1k}) \ldots (\det A_{l1}, \ldots, \det A_{lk})]_{l,\,\sigma,\,k} =$$
$$= [\mathbf{detA}_1 \ldots \mathbf{detA}_l]_{l,\,\sigma,\,k} = [\gamma(\mathbf{A}_1) \ldots \gamma(\mathbf{A}_l)]_{l,\,\sigma,\,k},$$

то есть

$$\gamma([\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\,\sigma,\,k}) = [\gamma(\mathbf{A}_1) \ldots \gamma(\mathbf{A}_l)]_{l,\,\sigma,\,k}.$$

Следовательно, γ – искомый гомоморфизм.

2) Достаточно заметить, что β может быть представлено композицией гомоморфизмов $\gamma\colon \mathbf{GL}(n, k, P) \to P^{*k}$ из 1) и $\delta\colon P^{*k} \to P$ из леммы 4.1. Теорема доказана.

***Следствие* 4.1.** *Если* σ – цикл длины k из S_k, *то отображения* γ и β из теоремы 4.1 *являются гомоморфизмами* (k+1)*-арной группы* $<\mathbf{GL}(n, k, P), [\ ]_{k+1,\,\sigma,\,k}>$ соответственно *на* (k+1)*-арные группы* $<P^{*k}, [\ ]_{k+1,\,\sigma,\,k}>$ и $<P^*, [\ ]_{k+1}>$.

***Следствие* 4.2.** *Отображения* γ и β из теоремы 4.1 *являются гомоморфизмами* (k+1)*-арной группы* $<\mathbf{GL}(n, k, P), [\ ]_{k+1,\,(12\ldots k),\,k}>$ соответственно *на* (k+1)*-арные группы* $<P^{*k}, [\ ]_{k+1,\,(12\ldots k),\,k}>$ и $<P^*, [\ ]_{k+1}>$.

5 Вектор-определитель и определитель косой вектор-матрицы

В теории n-арных групп для обозначения косого элемента для элемента a n-арной группы $<A, [\ ]>$ традиционно используют символ $\overline{a}$. В [1] для обозначения косой вектор-матрицы для вектор-матрицы $\mathbf{A}$ использовался символ $\tilde{\mathbf{A}}$, так как символом $\overline{\mathbf{A}}$ обозначается комплексно-сопряженная вектор-матрица. Косую вектор-матрицу можно обозначать и символом $\mathbf{A}^{[-1]}$, чем мы и будем пользоваться в данной работе. Объяснение будет дано ниже.

***Теорема* 5.1.** *Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_k)$ – произвольный элемент l-арной группы $<\mathbf{GL}(n, k, P), [\ ]_{l,\,\sigma,\,k}>$. Тогда*

$$\mathbf{detA}^{[-1]} = (\mathbf{detA})^{[-1]}, \tag{5.1}$$

где в левой части присутствует косой элемент для $\mathbf{A}$ в $<\mathbf{GL}(n, k, P), [\ ]_{l,\,\sigma,\,k}>$, а правая часть является косым элементом для элемента $\mathbf{detA}$ *l-арной группы $<P^{*k}, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k}>$;*

$$\det\mathbf{A}^{[-1]} = ((\det\mathbf{A})^{-1})^{l-2}, \tag{5.2}$$

где снова в левой части присутствует косой элемент для $\mathbf{A}$ в $<\mathbf{GL}(n, k, P), [\ ]_{l,\,\sigma,\,k}>$, а в *правой части присутствует обратный элемент для элемента группы* P^*.

Доказательство. По лемме 4.1 [1]

$$\mathbf{A}^{[-1]} = (A^{-1}_{\sigma^{l-2}(1)} \ldots A^{-1}_{\sigma(1)}, \ldots, A^{-1}_{\sigma^{l-2}(k)} \ldots A^{-1}_{\sigma(k)}).$$

Тогда

$$\mathbf{detA}^{[-1]} = (\det(A^{-1}_{\sigma^{l-2}(1)}\ldots A^{-1}_{\sigma(1)}),\ldots,\det(A^{-1}_{\sigma^{l-2}(k)}\ldots A^{-1}_{\sigma(k)})),$$

откуда

$$\mathbf{detA}^{[-1]} = (\det A^{-1}_{\sigma^{l-2}(1)}\ldots\det A^{-1}_{\sigma(1)},\ldots,\det A^{-1}_{\sigma^{l-2}(k)}\ldots\det A^{-1}_{\sigma(k)}). \quad (5.3)$$

Снова применяя лемму 4.1 [1] и соответствующий бинарный результат, получим

$$(\mathbf{detA})^{[-1]} = (\det A_1, \ldots, \det A_k)^{[-1]} =$$
$$= ((\det A_{\sigma^{l-2}(1)})^{-1}\ldots(\det A_{\sigma(1)})^{-1},\ldots$$
$$\ldots, (\det A_{\sigma^{l-2}(k)})^{-1}\ldots(\det A_{\sigma(k)})^{-1}) =$$
$$= (\det A^{-1}_{\sigma^{l-2}(1)}\ldots\det A^{-1}_{\sigma(1)},\ldots,\det A^{-1}_{\sigma^{l-2}(k)}\ldots\det A^{-1}_{\sigma(k)}),$$

то есть

$$(\mathbf{detA})^{[-1]} =$$
$$= (\det A^{-1}_{\sigma^{l-2}(1)}\ldots\det A^{-1}_{\sigma(1)},\ldots,\det A^{-1}_{\sigma^{l-2}(k)}\ldots\det A^{-1}_{\sigma(k)}). \quad (5.4)$$

Сравнивая (5.3) и (5.4), видим, что верно (5.1).

Докажем теперь равенство (5.2). Применяя лемму 4.1 [1], и, используя определение 1.1, получим

$$\det\mathbf{A}^{[-1]} = \det(A^{-1}_{\sigma^{l-2}(1)}\ldots A^{-1}_{\sigma(1)})\ldots\det(A^{-1}_{\sigma^{l-2}(k)}\ldots A^{-1}_{\sigma(k)}),$$

откуда, используя соответствующие бинарные результаты, коммутативность кольца P и уже упоминавшееся совпадение множеств

$\{1, \ldots, k\}$, $\{\sigma(1), \ldots, \sigma(k)\}$, …, $\{\sigma^{l-1}(1), \ldots, \sigma^{l-1}(k)\}$,

Получим

$$\det\mathbf{A}^{[-1]} = \det A^{-1}_{\sigma^{l-2}(1)}\ldots\det A^{-1}_{\sigma(1)}\ldots\det A^{-1}_{\sigma^{l-2}(k)}\ldots\det A^{-1}_{\sigma(k)} =$$
$$= (\det A_{\sigma^{l-2}(1)})^{-1}\ldots(\det A_{\sigma(1)})^{-1}\ldots$$
$$\ldots(\det A_{\sigma^{l-2}(k)})^{-1}\ldots(\det A_{\sigma(k)})^{-1} =$$
$$=(\det A_{\sigma(k)}\ldots\det A_{\sigma^{l-2}(k)}\ldots\det A_{\sigma(1)}\ldots\det A_{\sigma^{l-2}(1)})^{-1} =$$
$$= (\det A_{\sigma(1)}\ldots\det A_{\sigma(k)}\ldots\det A_{\sigma^{l-2}(1)}\ldots\det A_{\sigma^{l-2}(k)})^{-1} =$$
$$= (\underbrace{\det A_1\ldots\det A_k\ldots\det A_1\ldots\det A_k}_{l-2})^{-1} =$$
$$= ((\det\mathbf{A})^{l-2})^{-1} = ((\det\mathbf{A})^{-1})^{l-2}.$$

Следовательно, верно (5.2). Теорема доказана.

***Следствие* 5.1.** *Если* σ – цикл длины k из S_k, $\mathbf{A}$ – *произвольный элемент* $(k+1)$*-арной группы* $<\mathbf{GL}(n, k, P), [\ ]_{k+1, \sigma, k}>$, то верны формулы (5.1) и (5.2).

***Следствие* 5.2.** *Если* $\mathbf{A}$ – *произвольный элемент* $(k+1)$*-арной группы* $<\mathbf{GL}(n, k, P), [\ ]_{k+1, (12\ldots k), k}>$, то верны формулы (5.1) и (5.2).

6 Вектор-определитель и определитель степени вектор-матрицы

Для всякого элемента a l-арной полугруппы $<A, [\ ]>$ естественным образом определяются натуральные степени

$$a^{[0]} = a,\ a^{[1]} = [\underbrace{a\ldots a}_{l}],$$
$$a^{[2]} = [\underbrace{a\ldots a}_{2l-1}],\ \ldots,\ a^{[s]} = [\underbrace{a\ \ldots\ a}_{s(l-1)+1}],\ \ldots$$

В частности, $\mathbf{A}^{[0]} = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{[s]} = [\underbrace{\mathbf{A}\ldots\mathbf{A}}_{s(l-1)+1}]_{l, \sigma, k}$

для всякого натурального s и любой вектор-матрицы $\mathbf{A}$ l-арной полугруппы $<\mathbf{M}(n, k, P), [\ ]_{l, \sigma, k}>$.

Теорема 3.1 позволяет сформулировать

***Предложение* 6.1.** *Пусть подстановка* $\sigma \in S_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_k)$ – *произвольный элемент* l*-арной полугруппы* $<\mathbf{M}(n, k, P), [\ ]_{l, \sigma, k}>$. *Тогда:*

$$\mathbf{detA}^{[s]} = (\mathbf{detA})^{[s]}, \quad (6.1)$$
$$\det\mathbf{A}^{[s]} = (\det\mathbf{A})^{s(l-1)+1}. \quad (6.2)$$

***Замечание* 6.1.** В правой части равенства (6.1) присутствует степень элемента l-арной полугруппы $<P^k, [\ ]_{l, \sigma, k}>$, а в правой части равенства (6.2) – обычная степень элемента полугруппы P.

Для всякого элемента a l-арной группы $<A, [\ ]>$ помимо положительных степеней, определяются [3], [6] и отрицательные степени: для любого целого $s < 0$ степень $a^{[s]}$ есть решение уравнения

$$[x\underbrace{a\ \ldots\ a}_{-s(l-1)}] = a.$$

Отрицательную степень можно определить [7] с помощью косого элемента:

$$a^{[s]} = [\underbrace{\bar{a}\ldots\bar{a}}_{-2s}\ \underbrace{a\ \ldots\ a}_{-s(l-3)+1}],\ s < 0.$$

Так как при $s = -1$

$$a^{[-1]} = [\bar{a}\bar{a}\ \underbrace{a\ldots a}_{l-2}] = \bar{a},$$

то $\bar{a} = a^{[-1]}$, что отмечалось выше.

Таким образом, $\mathbf{A}^{[-1]} = \bar{\mathbf{A}}$,

$$\mathbf{A}^{[s]} = [\underbrace{\mathbf{A}^{[-1]}\ldots\mathbf{A}^{[-1]}}_{-2s}\ \underbrace{\mathbf{A}\ \ldots\ \mathbf{A}}_{-s(l-3)+1}]_{l, \sigma, k},\ s < 0 \quad (6.3)$$

для всякого натурального s и любой вектор-матрицы $\mathbf{A}$ l-арной группы $<\mathbf{GL}(n, k, P), [\ ]_{l, \sigma, k}>$.

***Теорема* 6.1.** *Для любого целого* s, *любой подстановки* $\sigma \in S_k$, *удовлетворяющей условию* $\sigma^l = \sigma$, *и любой вектор-матрицы* $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_k)$ l*-арной группы* $<\mathbf{GL}(n, k, P), [\ ]_{l, \sigma, k}>$ *верны равенства* (6.1) *и* (6.2).

Доказательство. Если $s \geq 0$, то применяется предложение 6.1. Для $s < 0$, используя теоремы 3.1 и 5.1, а также (6.3), получим

$$\mathbf{detA}^{[s]} = \mathbf{det}[\underbrace{\mathbf{A}^{[-1]}\ldots\mathbf{A}^{[-1]}}_{-2s}\ \underbrace{\mathbf{A}\ \ldots\ \mathbf{A}}_{-s(l-3)+1}]_{l, \sigma, k} =$$
$$= [\underbrace{\mathbf{detA}^{[-1]}\ldots\mathbf{detA}^{[-1]}}_{-2s}\ \underbrace{\mathbf{detA}\ \ldots\ \mathbf{detA}}_{-s(l-3)+1}]_{l, \sigma, k} =$$
$$=[\underbrace{(\mathbf{detA})^{[-1]}\ldots(\mathbf{detA})^{[-1]}}_{-2s}\ \underbrace{\mathbf{detA}\ \ldots\ \mathbf{detA}}_{-s(l-3)+1}]_{l, \sigma, k} =$$
$$=(\mathbf{detA})^{[s]},$$

то есть верно (6.1).

Аналогично,

$$\det\mathbf{A}^{[s]} = \det[\,\underbrace{\mathbf{A}^{[-1]}\ldots\mathbf{A}^{[-1]}}_{-2s}\ \underbrace{\mathbf{A}\ \ldots\ \mathbf{A}}_{-s(l-3)+1}\,]_{l,\,\sigma,\,k} =$$

$$= \underbrace{\det\mathbf{A}^{[-1]}\ldots\det\mathbf{A}^{[-1]}}_{-2s}\ \underbrace{\det\mathbf{A}\ \ldots\ \det\mathbf{A}}_{-s(l-3)+1} =$$

$$= (((\det\mathbf{A})^{-1})^{l-2})^{-2s}(\det\mathbf{A})^{-s(l-3)+1} =$$

$$= (\det\mathbf{A})^{2s(l-2)}(\det\mathbf{A})^{-s(l-3)+1} = (\det\mathbf{A})^{s(l-1)+1},$$

то есть верно (6.2). Теорема доказана.

7 Аналогии и обобщения

Определитель $\det A$ матрицы $A \in \mathbf{M}(n, P)$ можно рассматривать как значение функции det, определенной на $\mathbf{M}(n, P)$, со значениями в P. Точно также вектор-определитель **detA** вектор-матрицы $\mathbf{A} \in \mathbf{M}(n, k, P)$ можно считать значением функции **det**, определенной на декартовой степени $\underbrace{\mathbf{M}(n, P)\times\ldots\times\mathbf{M}(n, P)}_{k}$, со значениями в P^k, а определитель $\det\mathbf{A}$ той же вектор-матрицы – значением функции det, определенной на той же декартовой степени со значениями в P.

Беря за основу какую-либо функцию u: $\mathbf{M}(n, P) \to P$, отличную от функции det, можно определить функции

$$\mathbf{u}\colon \underbrace{\mathbf{M}(n, P)\times\ldots\times\mathbf{M}(n, P)}_{k} \to P^k,$$

$$\mathrm{u}\colon \underbrace{\mathbf{M}(n, P)\times\ldots\times\mathbf{M}(n, P)}_{k} \to P$$

аналогично тому, как это было сделано для функции det: $\mathbf{M}(n, P) \to P$.

В качестве примера рассмотрим функцию per: $\mathbf{M}(n, P) \to P$, где

$$\mathrm{per}A = \sum_{\sigma\in S_n} a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)}$$

для матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbf{M}(n, P)$. Значение per$A$ называют перманентом матрицы A. Перманентам посвящена книга Х. Минка [9].

***Определение* 7.1.** Пусть P – ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей. *Векторным перманентом* или *вектор-перманентом* вектор-матрицы $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_k)$, у которой все компоненты $A_1, \ldots, A_k$ являются квадратными матрицами над P, называется упорядоченный набор

$$\mathbf{perA} = (\mathrm{per}A_1, \ldots, \mathrm{per}A_k) \in P^k$$

перманентов $\mathrm{per}A_1, \ldots, \mathrm{per}A_k$ матриц-компонент. *Перманентом* той же вектор-матрицы $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_k)$ называется произведение

$$\mathrm{per}\mathbf{A} = \mathrm{per}A_1\mathrm{per}A_2 \ldots \mathrm{per}A_k \in P.$$

Ясно, что при $k = 1$ понятия вектор-перманента и перманента совпадают:

$$\mathbf{perA} = \mathrm{per}\mathbf{A}.$$

Используя свойства перманентов обычных матриц, можно получить их аналоги для вектор-перманентов и перманентов вектор-матриц. В частности, предложения 2.1 – 2.3 и следствие 2.1 останутся верными, если в них вектор-определители и определители вектор-матриц заменить соответственно вектор-перманентами и перманентами. Гораздо больше свойств вектор-перманентов и перманентов вектор-матриц не имеют аналогов для вектор-определителей и определителей.

Так как перманент определяется [9] не только для квадратных матриц, но и для матриц размера $m \times n$, где $m < n$, то можно определить и изучать вектор-перманент и перманент k-компонентной вектор-матрицы размера $(m_1 \times n_1, \ldots, m_k \times n_k)$, где $m_1 < n_1, \ldots, m_k < n_k$.

Множество $\mathbf{GL}(m, n \mid N)$ всех квадратных матриц $K = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, где блоки A и D – обратимые матрицы порядков m и n соответственно, состоящие из четных элементов грассмановой алгебры $\mathfrak{G}_N$ с N образующими, а блоки B и C – прямоугольные матрицы, состоящие из нечетных элементов $\mathfrak{G}_N$, является группой [10]. *Супердетерминантом* называется [10] функция sdet из $\mathbf{GL}(m, n \mid N)$ со значениями в $\mathfrak{G}_N$, определяемая равенством

$$\mathrm{sdet}K = \det(A - BD^{-1}C)\det D^{-1}.$$

Положим

$$\mathbf{GL}(m, n \mid N, k) = \underbrace{\mathbf{GL}(m, n \mid N)\times\ldots\times\mathbf{GL}(m, n \mid N)}_{k}.$$

Так как $\mathbf{GL}(m, n \mid N)$ – группа, то, ввиду теоремы 3.6.2 из [5] , верна

***Теорема* 7.1.** *Если подстановка* $\sigma \in S_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то* $< \mathbf{GL}(m, n \mid N, k), [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$ – *l-арная группа. В частности,* $< \mathbf{GL}(m, n \mid N, k), [\ ]_{k+1,\,(12\ldots k),\,k} >$ – *$(k + 1)$-арная группа.*

***Замечание* 7.1.** Из соответствующих результатов книги [5] следует, что l-арная группа $< \mathbf{GL}(m, n \mid N, k), [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$ не имеет единиц, а при $n \geq 2$ является неполуабелевой, в частности неабелевой.

***Определение* 7.2.** *Вектор-супердетерминантом* элемента

$$\mathbf{K} = (K_1, \ldots, K_k) \in \mathbf{GL}(m, n \mid N, k)$$

называется упорядоченный набор

$$\mathbf{sdetK} = (\mathrm{sdet}K_1, \ldots, \mathrm{sdet}K_k) \in \mathfrak{G}_N^k$$

супердетерминантов $\mathrm{sdet}K_1, \ldots, \mathrm{sdet}K_k$ компонент элемента **K**. *Супердетерминантом* этого же элемента **K** называется произведение

$$\mathrm{sdet}\mathbf{K} = \mathrm{sdet}K_1\mathrm{sdet}K_2 \ldots \mathrm{sdet}K_k \in \mathfrak{G}_N.$$

Для супердетерминантов имеет место полный аналог теоремы 3.1.

***Теорема* 7.2.** *Если подстановка* $\sigma \in S_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то для любых* $\mathbf{K}_1, \ldots, \mathbf{K}_l \in \mathbf{GL}(m, n \mid N, k)$ верны равенства

$$\mathbf{sdet}[\mathbf{K}_1 \ldots \mathbf{K}_l]_{l,\,\sigma,\,k} = [\mathbf{sdetK}_1 \ldots \mathbf{sdetK}_l]_{l,\,\sigma,\,k}, \quad (7.1)$$

$$\mathrm{sdet}[\mathbf{K}_1 \ldots \mathbf{K}_l]_{l,\,\sigma,\,k} = \mathrm{sdet}\mathbf{K}_1 \ldots \mathrm{sdet}\mathbf{K}_l. \quad (7.2)$$

Доказательство теоремы 7.2 почти дословно повторяет доказательство теоремы 3.1. Отличие состоит только в том, что при доказательстве равенства (7.1) вместо мультипликативности функции det используется мультипликативность функции sdet [10]:

$$\mathrm{sdet}(K_1K_2) = \mathrm{sdet}K_1 \cdot \mathrm{sdet}K_2.$$

Кроме того, при доказательстве равенства (7.2) коммутативность кольца заменяется коммутированием четных элементов грассмановой алгебры. При этом используется также тот факт, что все значения функции sdet являются в этой алгебре четными элементами.

Можно ввести и понятие квантового вектор-детерминанта, являющегося обобщением понятия квантового детерминанта, который определяется [11] для квантовой матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n над полем P и элемента $q \in P$, удовлетворяющего некоторым дополнительным условиям, следующим образом:

$$\det{}_q A = \sum_{\sigma \in S_n} (-q)^{\mathrm{inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)},$$

где $\mathrm{inv}(\sigma)$ – число инверсий подстановки σ.

Если для каждой компоненты A_r вектор-матрицы $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_k)$ определен квантовый детерминант $\det_{q_r} A_r$, то *квантовым вектор-детерминантом* вектор-матрицы $\mathbf{A}$ называется упорядоченный набор

$$\mathbf{det}_{q_1,\ldots,q_k} \mathbf{A} = (\det{}_{q_1} A_1, \ldots, \det{}_{q_k} A_k),$$

а *квантовым детерминантом* той же вектор-матрицы $\mathbf{A}$ называется произведение

$$\det{}_{q_1,\ldots,q_k} \mathbf{A} = \det{}_{q_1} A_1 \ldots \det{}_{q_k} A_k.$$

Если $q_1 = \ldots = q_k = q$, то рассматривают квантовый вектор-детерминант вида

$$\mathbf{det}_q\mathbf{A} = (\det{}_qA_1, \ldots, \det{}_qA_k)$$

и квантовый детерминант вида

$$\det{}_q\mathbf{A} = \det{}_qA_1 \ldots \det{}_qA_k.$$

В связи с существованием различных обобщений понятия определителя на случай некоммутативных колец возникает задача определения и изучения их векторных аналогов. Подобные векторные аналоги могут быть определены для квазидетерминантов [12], [13], которые находят широкое применение в физике, для детерминанта Дьёдонне [14], [15], детерминанта Мура [16], строчных и столбцовых определителей [17], а также и для других обобщений классического детерминанта.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гальмак, А.М.* Транспонированные вектор-матрицы / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1 (6). – С. 52–56.

2. *Гальмак, А.М.* Вектор-матрицы / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2011. – № 1 (37), серия В. – С. 30–37.

3. *Post, E.L.* Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.

4. *Гальмак, А.М.* Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.

5. *Гальмак, А.М.* Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

6. *Русаков С.А.* Алгебраические *n*-арные системы / С.А. Русаков. – Мінск.: Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.

7. *Гальмак, А.М.* *n*-Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.

8. *Гальмак, А.М.* *n*-Арные группы. Часть 2 / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2007. – 324 с.

9. *Минк, Х.* Перманенты / Х. Минк. – М.: Мир., 1982. – 213 с.

10. *Березин, Ф.А.* Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными / Ф.А. Березин. – М.: Изд-во МГУ, 1983. – 208 с.

11. *Manin, Y.* Multiparametric quantum deformation of the general linear supergroup / Y. Manin // Math. Phys. – 1989. – V. 123. – P. 163–175.

12. *Гельфанд, И.М.* Детерминанты матриц над некоммутативными кольцами / И.М. Гельфанд, В.С. Ретах // Функциональный анализ и его приложения. – 1991. – Т. 25, № 2. – С. 13–35.

13. *Гельфанд, И.М.* Теория некоммутативных детерминантов и характеристических функций графов / И.М. Гельфанд, В.С. Ретах // Функциональный анализ и его приложения. – 1993. – Т. 26, № 4. – С. 33–45.

14. *Dieudonne, J.* Les determinants sur un corps non commutatif / J. Dieudonne // Bull. Math. Soc. France. – 1943. – V. 71. – P. 27–45.

15. *Дьёдонне, Ж.* Геометрия классических групп / Ж. Дьёдонне. – М.: Мир., 1974. – 204 с.

16. *Moore, E.H.* On the determinant of an Hermitian matrix of quaternionic elements / E.H. Moore // Bull. Amer. Math. Soc. – 1922. – V. 28. – P. 161–162.

17. Кирчей, И.И. Правило Крамера для кватернионных систем линейных уравнений / И.И. Кирчей // Фундаментальная и прикладная математика. – 2007. – Т. 13, № 4. – С. 67–94.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

Поступила в редакцию 03.03.11.