УДК 535.42:534.8

# АКУСТООПТИЧЕСКАЯ ДИАГНОСТИКА УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН ЛЭМБА ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ

**А.Е. Анисимова**

*Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина, Мозырь*

# ACOUSTOOPTICAL DIOGNOSTICS OF ULTRASONIC LAMB WAVES OF HIGH-ORDERS

**A.E. Anisimova**

*I.P. Shamyakin Mozyr State Pedagogical University, Mozyr*

Исследована акустооптическая брэгговская дифракция света на волнах Лэмба высших порядков пластины из изотропного твердого тела. Показано, что наибольшая глубина акустооптической амплитудной модуляции достигается для прошедших дифрагированных волн первого порядка. Установлено, что моды Лэмба высших порядков могут быть раздельно диагностированы акустооптическим методом вследствие фотоупругого эффекта.

***Ключевые слова***: *волны Лэмба, акустооптическая дифракция, амплитудная модуляция, коэффициенты отражения и пропускания.*

The acoustooptical Bragg diffraction of light by the Lamb's waves of higher order of a plate from isotropic solid material is investigated. It is shown that acoustooptical modulation deep is reached for diffraction of transmitted waves of the first order. Lamb's modes are stated to be separately diagnosed by means of the acoustooptical method.

***Keywords***: *Lamb's waves, acoustooptical diffraction, amplitude modulation, coefficients of reflection and transmission.*

## *Введение*

В работе [1] теоретически и экспериментально исследованы многослойные акустооптические структуры на основе кристаллов кремния, окиси цинка, кварца и парателлурита. Показано [1], [2], что в многослойных структурах при возбуждении поверхностных акустических волн (ПАВ) интенсивности ультразвуковых (УЗ) волн в тонком слое толщиной $h \sim 1$ мм могут достигать $\sim 1$ МВт/см$^2$ и амплитуда деформации ультразвуковой (УЗ) волны $U \sim 10^{-2}$. В работе [3] впервые исследовано отражение и пропускание дифрагированных волн в плоскопараллельном периодически модулированном (возмущенном) слое. В работе [4] исследована дифракция световых волн в плоскопараллельном слое с однородным распределением упругих деформаций, а в [5] – в слое, возбужденном волнами Лява. К настоящему времени хорошо изучены ультразвуковые волны Лэмба пластины со сложным неоднородным распределением упругих деформаций по ее сечению, широко применяемые для неразрушающего контроля и создания акустоэлектронных устройств обработки сигналов [6]. В работе [7] экспериментально исследована акустооптическая диагностика волн Лэмба высших порядков при их распространении и отражении от края пластины из кварца. При этом теоретические исследования ограничились лишь изучением геометрических соотношений при дифракции света на ультразвуке.

В настоящей работе теоретически исследованы особенности брэгговской акустооптической (АО) дифракции световых волн *s*-поляризации на поверхностных бегущих УЗ волнах Лэмба высоких порядков пластины с целью их диагностики.

## *1 Теоретические результаты*

Положим, что плоскопараллельный слой толщиной $h$ с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_2$ расположен между однородными прозрачными средами с диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_3$. Начало системы координат $XYZ$ расположено на верхней границе слоя, а ось $Y$ перпендикулярна плоскости падения. При условии $h >> \Lambda_t/(2\pi)$, где $\Lambda_t$ – длина волны объемной сдвиговой УЗ волны в слое, в нем распространяются моды Лэмба высших порядков вдоль оси $X$, и искривлением границ слоя можно пренебречь [6]. Другие ограничения на толщину слоя обусловлены условиями брэгговской дифракции света в слое $\dfrac{\lambda_0 h f^2}{2 n_2 \upsilon^2} >> 1$ [2], где $f$ ($\upsilon$) – частота (фазовая скорость) УЗ волны, $\lambda_0$ – длина световой волны в вакууме, $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}$.

Дисперсионные уравнения для волн Лэмба находятся с использованием непрерывности УЗ смещений и напряжений на границах слоя [6]. При этом рассматриваются симметричные ($s$) и антисимметричные ($a$) бегущие волны Лэмба бесконечного плоскопараллельного слоя.

Компоненты вектора смещений для симметричной моды имеют вид:

$$U_x = U_0\left[\frac{\mathrm{ch}(qz)}{\mathrm{sh}(qh)} - \frac{2qs}{(K^2+s^2)}\frac{\mathrm{ch}(sz)}{\mathrm{sh}(sh)}\right]e^{i(Kx-\Omega t)}, \quad (1.1)$$

$$U_z = -iU_0\frac{q}{K}\left[\frac{\mathrm{sh}(qz)}{\mathrm{sh}(qh)} - \frac{2K^2}{(K^2+s^2)}\frac{\mathrm{ch}(sz)}{\mathrm{sh}(sh)}\right]e^{i(Kx-\Omega t)},$$

где $U_0$ – амплитуда волны; $K=\Omega/\upsilon$ ($\Omega$ – циклическая частота, $\upsilon$ – фазовая скорость УЗ волны); $q=(K^2-K_l^2)^{1/2}$, $s=(K^2-K_s^2)^{1/2}$, где $K_l=\Omega/\upsilon_l$, $K_s=\Omega/\upsilon_S$ ($\upsilon_l$ ($\upsilon_S$) – фазовая скорость продольной (сдвиговой) УЗ волны). Поле смещений для антисимметричной моды Лэмба дается соотношениями:

$$U_x = U_0\left[\frac{\mathrm{sh}(qz)}{\mathrm{ch}(qh)} - \frac{2qs}{(K^2+s^2)}\frac{\mathrm{sh}(sz)}{\mathrm{ch}(sh)}\right]e^{i(Kx-\Omega t)}, \quad (1.2)$$

$$U_z = -iU_0\frac{q}{K}\left[\frac{\mathrm{ch}(qz)}{\mathrm{ch}(qh)} - \frac{2K^2}{(K^2+s^2)}\frac{\mathrm{ch}(sz)}{\mathrm{ch}(sh)}\right]e^{i(Kx-\Omega t)}.$$

Фазовую скорость симметричной и антисимметричной моды Лэмба находим соответственно из соотношений:

$$\frac{\mathrm{th}(sh)}{\mathrm{th}(qh)} = \frac{4K^2qs}{(K^2+S^2)^2}, \quad \frac{\mathrm{th}(sh)}{\mathrm{th}(qh)} = \frac{(K^2+S^2)^2}{4K^2qs}. \quad (1.3)$$

УЗ волна (1.1) и (1.2) создает периодическую в пространстве и во времени решетку диэлектрической проницаемости вдоль оси $X$ и пространственно-неоднородную вдоль оси $Z$:

$$\varepsilon_2(x,z,t) = \varepsilon_2 + \Delta\varepsilon_2(z)e^{i(Kx-\Omega t)}, \quad (1.4)$$

где $\Delta\varepsilon_2 = -\varepsilon_2^2 P_{эф}U_{эф}(z)$ ($U_{эф}(z)$ – эффективная амплитуда деформации УЗ волны, $P_{эф}$ – эффективная фотоупругая постоянная).

Предположим, что плоская световая волна с частотой ω>>Ω и волновым вектором

$$\vec{k}_1 = \vec{e}_x k_{1x} + \vec{e}_z k_{1z}$$

($k_{1x}=kn_1\sin\varphi_1$, $k_{1z}=kn_1\cos\varphi_1$, $k=\omega/c$, $n_1=\sqrt{\varepsilon_1}$) имеет $s$–поляризацию. Угол преломления $\varphi_2=\arcsin(\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}\sin\varphi_1)$ близок к углу Брэгга $\varphi_2\approx\varphi_Б\approx K/(2k_2)$, где $k_2=kn_2$.

Решение волнового уравнения для дифрагированного поля электромагнитной волны в слое имеет вид [3]:

$$E = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} A_m(z)\exp[i(K_{mz}z - \omega_m t - \pi m/2)], \quad (1.5)$$

где $k_{mz}=k_{0z}+mK$, $\omega_m=\omega+m\Omega$.

При $k_{0z}\approx K/2$ из совокупности (1.5) дифрагированных волн выделяют две наиболее существенные с дифракционными порядками $m$=0 и $m$=–1. Система неоднородных уравнений связанных волн имеет вид:

$$\frac{d^2A_0}{dz^2} + k_{0z}^2A_0 - i\eta(z)k_2^2A_{-1} = 0,$$

$$\frac{d^2A_{-1}}{dz^2} + k_{-1z}^2A_0 + i\eta(z)k_2^2A_0 = 0, \quad (1.6)$$

где

$$k_{0z}=(k_2^2-k_{0x}^2)^{1/2}, \quad k_{-1z}=(k_2^2-k_{-1x}^2)^{1/2},$$

$$k_{-1x}\approx k_{0x}=k_2\sin\varphi_Б,$$

$$\eta(z) = -\frac{n_2^2P_{эф}U_{эф}(z)}{2\cos\varphi_2}.$$

С учетом результатов работ [3]–[5], решение системы уравнений (1.6) в брэгговском режиме дифракции можно представить в виде:

$$A_0=(U_2+U_1)/2, \quad A_{-1}=(U_2-U_1)/2.$$

Величины $U_{1,2}$ находим из решения неоднородного уравнения:

$$\frac{d^2U_{1,2}}{dz^2} + k_2^2\left[\cos^2\varphi_2 \pm \frac{1}{2}\eta(z)\right]U_{1,2} = 0. \quad (1.7)$$

Решение уравнений (7) в ВКБ-приближении имеет вид [8]:

$$U_{1,2} = C_1^{\pm}e^{ik_2^{\pm}(z)} + C_2^{\pm}e^{-ik_2^{\pm}(z)}, \quad (1.8)$$

где

$$k_2^{\pm}(z) = k_2 z\left[\left(1-\frac{n_1^2}{n_2^2}\right)\sin^2\varphi_1 \pm \right.$$

$$\left. \pm\frac{n_2^2P_{эф}U}{4K\cos\varphi_2}\int_0^z U_{эф}(z)dz\right];$$

$C_{1,2}^{\pm}$ – постоянные коэффициенты, определяемые из граничных условий, $U$ – амплитуда деформации. В рамках приближения ВКБ предполагается, что множители перед экспонентами в (1.8) слабо изменяются по сравнению с экспоненциальными сомножителями, содержащими большой параметр $k_2z>>1$.

Сшивая напряженности электрического и магнитных полей в слое [3]–[5], а также в областях $z$<0 и $z$>$h$, находим коэффициенты отражения и пропускания (относительные интенсивности) дифрагированных волн на границе слоя. Решение системы восьми алгебраических уравнений можно найти в замкнутой форме. Эффективные волновые числа $k_{xs}^{b,a}$ для антисимметричных волн Лэмба даются соотношением:

$$k_{xs}^{b,a} = k_2\left\{\left(1-\frac{n_1^2}{n_2^2}\right)\sin^2\varphi_1 \pm \right.$$

$$\left. \pm\frac{P_{эф}^{\perp}U}{2h\cos\varphi_2}\left[\frac{\mathrm{sh}(qh/2)}{K\,\mathrm{ch}(qh)} - \frac{4qK\,\mathrm{sh}(sh/2)}{s(K^2+s^2)\mathrm{ch}(sh)}\right]\right\}. \quad (1.9)$$

В случае дифракции на симметричных модах Лэмба следует положить:

$$k_{xs}^{b,a} = k_2\left\{\left(1-\frac{n_1^2}{n_2^2}\right)\sin^2\varphi_1 \pm \right.$$

$$\left. \pm\frac{P_{эф}^{\perp}U}{2h\cos\varphi_2}\left[\frac{\mathrm{sh}(qh/2)}{q\,\mathrm{sh}(qh)} - \frac{4q\,\mathrm{sh}(sh/2)}{(K^2+s^2)\mathrm{sh}(sh)}\right]\right\}. \quad (1.10)$$

Коэффициенты отражения ($R_{0s}$) и пропускания ($T_{0s}$) $s$-поляризованных составляющих дифрагированных волн соответственно нулевого и первого ($R_{1s}, T_{1s}$) порядков определяются соотношениями:

$$R_{0s}=\left|\frac{\Delta_{0s}^{r}}{\Delta}\right|^{2},\quad R_{1s}=\left|\frac{2\Delta_{1s}^{r}}{n_1\Delta}\right|^{2},$$
$$T_{0s}=\frac{n_3}{n_1}\left|\frac{2\Delta_{0s}^{t}}{n_3\Delta}\right|^{2},\quad T_{1s}=\frac{n_3}{n_1}\left|\frac{2\Delta_{1s}^{t}}{n_3\Delta}\right|^{2} \qquad (1.11)$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta &= (-\alpha_{1+}^{-}\alpha_{3+}^{+}e_1^{-*}+\alpha_{1-}^{-}\alpha_{3-}^{+}e_1^{-})(\alpha_{1+}^{+}\alpha_{3+}^{+}e_1^{+*}-\alpha_{1-}^{+}\alpha_{3-}^{+}e_1^{+})+\\
&+(\alpha_{1-}^{+}\alpha_{3-}^{+}e_1^{+}-\alpha_{1+}^{+}\alpha_{3+}^{+}e_1^{+*})(\alpha_{1+}^{+}\alpha_{3+}^{+}e_1^{-*}-\alpha_{1-}^{+}\alpha_{3-}^{+}e_1^{-}),\\
\Delta_0^{r} &= (-\alpha_{1+}^{-}\alpha_{3+}^{-}e_1^{-*}+\alpha_{1-}^{-}\alpha_{3-}^{-}e_1^{-})(\alpha_{1-}^{+}\alpha_{3+}^{+}e_1^{+*}-\alpha_{1+}^{+}\alpha_{3-}^{+}e_1^{+})+\\
&+(-\alpha_{1+}^{+}\alpha_{3+}^{+}e_1^{+*}+\alpha_{1-}^{+}\alpha_{3+}^{+}e_1^{+})(\alpha_{1-}^{-}\alpha_{3+}^{-}e_1^{-*}-\alpha_{1+}^{-}\alpha_{3-}^{-}e_1^{-}),\\
\Delta_1^{r} &= (b_1^{-}-b_1^{+})(\alpha_{3-}^{+}\alpha_{3+}^{+}e_1^{+}e_1^{-*}-\alpha_{3+}^{-}\alpha_{3-}^{+}e_1^{-}e_1^{+*})+\\
&+(b_1^{-}-b_1^{+})\left[(\alpha_{3-}^{-})^2e_1^{+}e_1^{-}-(\alpha_{3+}^{+})^2e_1^{-*}e_1^{+*}\right],\\
\Delta_{0,1}^{t} &= \mp\alpha_{1+}^{+}e_1^{+*}\left[\alpha_{3+}^{+}b_1^{-}+n_2\alpha_{3+}^{-}+\alpha_{3-}^{-}(b_1^{-}-b_1^{+})/2\right]\pm\\
&\pm\alpha_{1-}^{+}e_1^{+}\left[\alpha_{3-}^{+}b_1^{-}+n_2\alpha_{3-}^{-}+\alpha_{3+}^{-}(b_1^{-}-b_1^{+})/2\right]-\\
&-\alpha_{1+}^{-}e_1^{-*}\left[\alpha_{3+}^{-}b_1^{+}+n_2\alpha_{3+}^{+}+\alpha_{3-}^{+}(b_1^{+}-b_1^{-})/2\right]+\\
&\alpha_{1-}^{-}e_1^{-}\left[\alpha_{3-}^{-}b_1^{+}+n_2\alpha_{3-}^{+}+\alpha_{3+}^{+}(b_1^{+}-b_1^{-})/2\right].
\end{aligned} \qquad (1.12)$$

Здесь введены обозначения: $\alpha_{1,3+}^{\pm}=(1+n_{1,3}^{-1}b_1^{\pm})$, $\alpha_{1,3-}^{\pm}=(1-n_{1,3}^{-1}b_1^{\pm})$, $b_1^{\pm}=k_{xs}^{b,a}/k$, $e_1^{\pm}=\exp(ihk_{xs}^{b,a})$; знаком «*» обозначено комплексное сопряжение. При рассмотрении дифракции световых волн $p$-поляризации в (1.11), (1.12) следует выполнить замены: $s\to p$, $p_{эф}^{\perp}\to p_{эф}^{\parallel}$, $n_{1,2}\cos\varphi_{1,2}\to\dfrac{1}{n_{1,2}\cos\varphi_{1,2}}$ для коэффициентов пропускания ($T_{0,1p}$) и отражения ($R_{0,1p}$). Из выражений (1.11), (1.12) следует, что выполняются соотношения: $R_{0p,s}+R_{1p,s}+T_{0p,s}+T_{1p,s}=1$.

### *2 Результаты расчетов*

Численные расчеты проводились для плоскопараллельного слоя из плавленого кварца ($SiO_2$) в случае дифракции линейно поляризованного излучения *He-Ne*-лазера $s$-поляризации с длиной волны $\lambda_0$ = 0,6328 мкм на симметричных и антисимметричных УЗ волнах Лэмба различных порядков. Предполагалось, что слой материала ($n_2$=1,457) граничит с воздухом ($n_1 = n_3 = 1$).

Амплитуда тензора деформаций $U=\left(\dfrac{2I_a}{\rho\upsilon_к^3}\right)^{1/2}$,

где $I_a$ – интенсивность УЗ волны Лэмба; $\upsilon_к$ – фазовая скорость УЗ волны Лэмба, причем $к$ – ее порядок [7]; $\rho$ – плотность кристалла. Эффективная фотоупругая постоянная $p_{эф}^{\perp}=p_{12}=0,27$ [2]. В случае дифракции световой волны $p$-поляризации эффективная компонента тензора возмущений диэлектрической проницаемости имеет z- составляющую: $\Delta\varepsilon_3=-\varepsilon_2^2K(P_{11}U_z+P_{12}U_x)$.

Зависимости коэффициентов пропускания $T_{1s}$ дифрагированной волны первого порядка для дифракции на девятой (а) и десятой (б) антисимметричной моде Лэмба, возбуждаемой в пластинке из плавленого кварца, от толщины пластинки $h$ и амплитуды деформации УЗ волны $U$ представлены на рисунке 2.1.

Из рисунка 2.1 следует, что коэффициент пропускания $T_{1s}$ достигает максимального значения лишь в узком интервале толщин пластины $\Delta h\sim0,01$ мм. При увеличении амплитуды деформации $U$ коэффициент пропускания возрастает, достигая максимального значения.

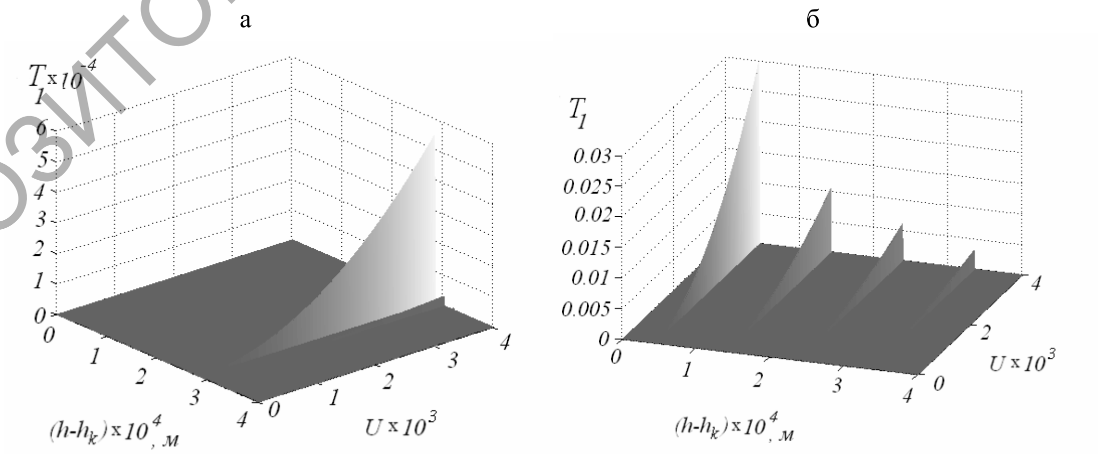


Рисунок 2.1. – Зависимость коэффициента пропускания $T_{1s}$ от амплитуды деформации УЗ волны $U$ и толщин слоя $h$ для антисимметричных мод Лэмба ($\upsilon_9$=8054 м/с, $h_9$=0,2467 мм (а), $\upsilon_{10}$=10798 м/с, $h_{10}$=0,2965 мм (б), $f$ = 700 МГц, $s$ – поляризация; структура: воздух – $SiO_2$ – воздух)

а б

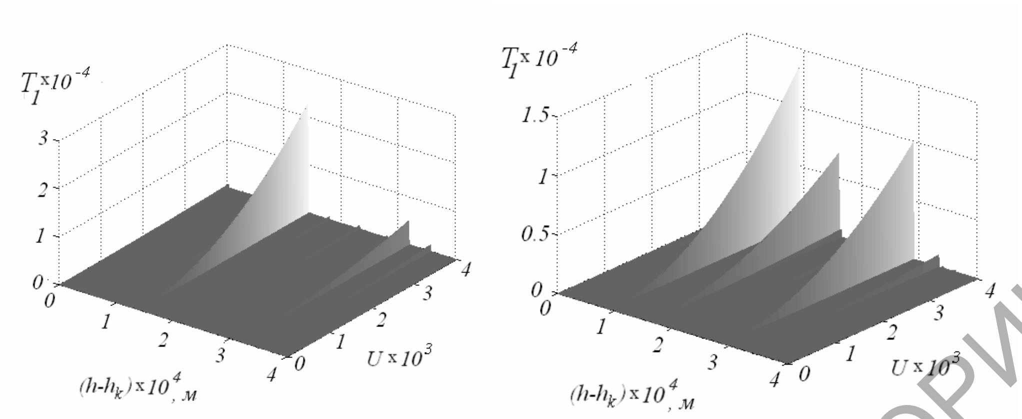


Рисунок 2.2. – Зависимость коэффициента пропускания $T_{1s}$ от амплитуды деформации УЗ волны $U$ и толщин слоя $h$ для симметричных мод Лэмба ($\upsilon_9$=8061 м/с, $h_9$=0,24667 мм (а), $\upsilon_{10}$=10339 м/с, $h_{10}$=0,29005 мм (б), $f$ = 700 МГц, $s$ – поляризация; структура: воздух – $SiO_2$ – воздух)

Расчеты проводились для толщины пластинки, начиная с критической толщины $h_к$ для каждой из мод Лэмба. Резонансный характер коэффициента пропускания объясняется тем, что в поперечном сечении пластины формируется квазистоячая УЗ волна, образуемая наложением продольных УЗ составляющих волны Лэмба [6]. Максимальный коэффициент пропускания $T_{1s}$ =0,03 достигается для антисимметричной моды Лэмба порядка $к$ = 10. Это объясняется тем, что для этой моды толщина пластинки, равная длине АО взаимодействия, соответствует оптимальной эффективности брэгговской дифракции света в слое вследствие фотоупругого эффекта.

На рисунке 2.2 представлена зависимость коэффициента пропускания дифрагированной волны первого порядка для девятой (а) и десятой (б) симметричной моды Лэмба, возбуждаемой в пластине из плавленого кварца, от ее толщины $h$ и амплитуды деформации УЗ волны $U$.

Как следует из рисунка, зависимость коэффициента пропускания $T_{1s}$ от толщины слоя $h$ также имеет резонансный характер; максимальное значение $T_{1s}$ достигается в узком интервале толщины пластинки $\Delta h$ ~ 0,01 мм. При расчетах полагалось, что толщина пластинки увеличивается, начиная с толщины отсечки $h_к$ соответствующей симметричной моды Лэмба. Резонансное поведение коэффициента пропускания объясняется формированием квазистоячей УЗ волны в поперечном сечении пластинки при наложении сдвиговых УЗ составляющих симметричной волны Лэмба. Максимальный коэффициент пропускания $T_{1s}$ =0,0003 достигается для симметричной моды Лэмба порядка $к$=9. Это объясняется оптимальными условиями АО взаимодействия на сдвиговой УЗ составляющей в слое вследствие фотоупругого эффекта для данной моды.

Коэффициенты пропускания дифрагированных волн нулевого порядка достигают максимального значения $T_{0s}$ = 1 за счет, в основном, френелевского отражения на границах слоя для тех же диапазонов изменения толщин слоя и амплитуд УЗ деформации. Однако при этом глубина амплитудной АО модуляции незначительна. Коэффициенты отражения дифрагированных волн нулевого порядка также определяются, в основном, френелевским отражением на границах слоя и достигают максимальных значений: $R_{0s} \sim 0{,}15$ (антисимметричная мода) и $R_{0s} \sim 0{,}2$ (симметричная мода). Величины коэффициентов отражения дифрагированных мод первого порядка достигают соответственно значений: $R_{1s} \sim 10^{-3}$ (антисимметричная мода) и $R_{1s} \sim 10^{-5}$ (симметричная мода).

***Заключение***

Акустооптический метод позволяет осуществить диагностику ультразвуковых волн Лэмба высоких порядков в режиме дифракции Брэгга. Наибольший интерес представляют прошедшие дифрагированные волны первого порядка, для которых достигается наибольшая глубина акустооптической модуляции. В случае дифракции света на низших модах Лэмба, включая основную ($s_0$, $a_0$), наибольший вклад в эффективность дифракции света вносит не фотоупругий эффект, а искривления границ слоя, и рассмотренная выше теория не применима [9].

ЛИТЕРАТУРА


1. *Sunita, J.* Thin film layered structure for acousto-optic devices / J. Sunita, M. Abhai // J. Appl. Phys. – 1992. – Vol. 25. – P. 1116–1121.

2. *Яковкин, Н.Б.* Дифракция света на акустических волнах / Н.Б. Яковкин, Р.В. Петров. – Новосибирск, 1979. – 194 с.

3. *Kong, J.A.* Second-order coupled-mode equations for spatially periodic media / J.A. Kong // J. Opt. Soc. Am. – 1977. – Vol. 67, № 6. – P. 825–829.

4. *Кулак Г.В.* Дифракция света на ультразвуке в условиях френелевского отражения / Г.В. Кулак // Опт. и спектр. – 1994. – Т. 76, № 6. – С. 1027–1029.

5. *Кулак, Г.В.* Дифракция света на ультразвуковых волнах Лява / Г.В. Кулак, Т.В. Николаенко, П.И. Ропот // Опт. и спетр. – 2008. – Т. 104, № 3. – С. 508–512.

6. *Викторов, И.А.* Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике / И.А. Викторов. – М. : Наука, 1966. – 167 с.

7. *Diodati, P.* Lamb wave reflection at the plate edges / P. Diodati, G. Tassi, A. Alippi // Appl. Phys. Lett. – 1985. – Vol. 47, № 6. – P. 573–575.

8. *Камке, Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М. : Наука, 1971. – 576 с.

9. *Ярив, А.* Оптические волны в кристаллах / А. Ярив, П. Юх. – М. : Мир, 1987. – 616 с.

*Поступила в редакцию 09.01.12.*