УДК 531.51:531.18:530.12

ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГРАВИСТАТИКЕ БРИЛЛЮЭНА

Н.А. Ахраменко[1], Л.М. Булавко[1], А.Н. Сердюков[2]

[1]*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель*
[2]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель*

THE FIELD OF GRAVITATION OF THE SPHERICAL SURFACE IN RELATIVISTIC BRILLOUIN GRAVISTATICS

N.A. Akhramenko[1], L.M. Bulauko[1], A.N. Serdyukov[2]

[1]*Belarusian State University of Transport, Gomel*
[2]*F.Scorina Gomel State University, Gomel*

Получены соотношения, определяющие напряженность статического гравитационного поля массивной сферической оболочки в релятивистской гравистатике Бриллюэна. Показано, что значение напряженности поля на самой оболочке в два раза меньше ее значения вблизи внешней поверхности.

Ключевые слова: *релятивистская теория тяготения, граничная задача, нелинейная гравистатика.*

The relations determining the intensity of static gravitational field of the massive spherical surface in relativistic Brillouin gravitational statics have been fixed. It has been shown that the value of intensity of the field on the surface itself is half as high as its value near external surface.

Keywords: *relativistic theory of gravitation, boundary problem, nonlinear gravistatics.*

Введение

Известно, что в формировании гравитационного поля вместе с массой вещества должна участвовать наравне и масса самого поля [1]. При построении поля тяготения сферически симметричного источника Бриллюэн обращает внимание на связанный с этим нелинейный характер гравистатики и обобщает уравнение тяготения Ньютона с учетом окружающего источник распределения полевой массы.

Напряжённость $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{r})$ статического поля тяготения или ускорение свободного падения, создаваемого неподвижной гравитирующей пылевидной материей с распределенной в пространстве объёмной плотностью массы $\mu = \mu(\mathbf{r})$, удовлетворяет уравнениям релятивистской гравистатики [2]:

$$\nabla\mathbf{g} - \frac{1}{2c^2}\mathbf{g}^2 = -4\pi G\mu,$$
$$\nabla\times\mathbf{g} = 0, \qquad (0.1)$$

где c – скорость света в вакууме, G – гравитационная постоянная.

Из (0.1) следует условие потенциальности поля напряженности $\mathbf{g} = -\nabla\Phi$.

В области пространства, внешней по отношению к гравитирующим телам, где $\mu = 0$, напряжённость $\mathbf{g}$ удовлетворяет нелинейному уравнению Бриллюэна [1]

$$\nabla\mathbf{g} - \frac{1}{2c^2}\mathbf{g}^2 = 0, \qquad (0.2)$$

а потенциал – уравнению

$$\nabla^2\Phi + \frac{1}{2c^2}(\nabla\Phi)^2 = 0,$$

представляющему нелинейное обобщение уравнения Лапласа.

Появление в уравнении (0.2) члена, нелинейного по полю $\mathbf{g}$, обосновывается Бриллюэном необходимостью включения распределенной в пространстве массы гравитационного поля в источник самого поля.

1 Поле тяготения шарового слоя

Рассмотрим сферически симметричный источник статического гравитационного поля – массивную пылевидную сферическую оболочку радиуса R. Если радиус-вектор $\mathbf{r}$ проведен из центра сферы, то, очевидно, $\mu(\mathbf{r}) = \mu(r)$. Из соображений симметрии следует, что создаваемое таким источником поле будет обладать сферической симметрией:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -g(r)\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Поле оболочки с равномерно распределенной на ней свободной массой M_0 определим как предельный случай поля шарового слоя с радиусами внешней и внутренней сфер R_+ и R_- соответственно, когда толщина слоя $\Delta r = R_+ - R_-$ стремится к нулю. Воспользуемся решением [3] для поля массивного шарового слоя в трёх пространственных областях – в сферической полости, в слое и во внешней области. Напряженность поля в полости ($r < R_-$) $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = 0$. Поле в слое ($R_- < r < R_+$) задается выражением

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -2c^2 K \times \left(\frac{(1+KR_-)e^{-K(R_- - r)} + (1-KR_-)e^{K(R_- - r)}}{(1+KR_-)e^{-K(R_- - r)} - (1-KR_-)e^{K(R_- - r)}} - \frac{1}{Kr} \right) \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (1.1)$$

где $K = \sqrt{2\pi G\mu}/c$. В пространстве, окружающем источник, для $r > R_+$ напряжённость поля имеет вид:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r^2\left(1 - \dfrac{GM}{2c^2 r}\right)} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (1.2)$$

Параметр M, определяющий это поле, есть полная масса всей гравитирующей системы, включая массу самого поля:

$$M = \int_{(V)} \left(\mu + \frac{1}{8\pi G c^2} g^2 \right) e^{\Phi/c^2} dV,$$

где интегрирование проводится по всему пространству.

Полная масса M однородного сферического слоя выражается через внутренний и внешний радиусы R_-, R_+ и плотность μ следующим образом [3]:

$$M = \frac{2c^2}{GK} \times \left(\frac{(KR_+ + 1)(KR_- - 1)e^{-K(R_+ - R_-)}}{(KR_- - 1)e^{-K(R_+ - R_-)} - (KR_- + 1)e^{K(R_+ - R_-)}} - \frac{(KR_+ - 1)(KR_- + 1)e^{K(R_+ - R_-)}}{(KR_- - 1)e^{-K(R_+ - R_-)} - (KR_- + 1)e^{K(R_+ - R_-)}} \right). \quad (1.3)$$

При этом полагается, что потенциал Φ на бесконечности принят равным нулю.

2 Поле пылевидной гравитирующей сферы

Напряжённость поля на самой сферической оболочке определим как среднее значение напряженности поля в слое при стремлении толщины слоя $\Delta r = R_+ - R_-$ к нулю (с учетом выражения (1.1)):

$$g_{\text{ср}} = \frac{1}{R_+ - R_-} \int_{R_-}^{R_+} -2c^2 K \times \left(\frac{(1+KR_-)e^{-K(R_- - r)} + (1-KR_-)e^{K(R_- - r)}}{(1+KR_-)e^{-K(R_- - r)} - (1-KR_-)e^{K(R_- - r)}} - \frac{1}{Kr} \right) dr.$$

После вычислений получаем следующее выражение:

$$g_{\text{ср}} = -2c^2 K + \frac{2c^2}{R_+ - R_-} \times \ln \frac{2KR_+}{(1+KR_-) - (1-KR_-)e^{-2K(R_+ - R_-)}}.$$

Далее нужно найти предел этого выражения при стремлении толщины слоя $\Delta r = R_+ - R_-$ к нулю. При этом плотность массы μ вместе с параметром $K = \sqrt{2\pi G\mu}/c$ устремляются к бесконечности. Установим, каким образом связаны между собой величины Δr и K.

С этой целью представим выражение (1.3) в виде

$$M = \frac{2c^2}{GK} \times \frac{(KR_+ + 1)(KR_- - 1) - (KR_+ - 1)(KR_- + 1)e^{2K\Delta r}}{(KR_- - 1) - (KR_- + 1)e^{2K\Delta r}}$$

и, учтя, что толщина слоя $\Delta r = R_+ - R_-$ (или $R_+ = R_- + \Delta r$) стремится к нулю, разложив экспоненту по степеням, получим:

$$M = \frac{2c^2}{GK} \frac{(K(R_- + \Delta r) + 1)p - (K(R_- + \Delta r) - 1)qd}{p - qd},$$

где $p = (KR_- - 1)$,

$q = (KR_- + 1)$,

$d = (1 + 2K\Delta r + 2K^2\Delta r^2 + \ldots)$.

После преобразований и отброса менее значимых членов получим:

$$K^2 \Delta r = \frac{1}{\dfrac{2c^2 R_-^{\,2}}{GM} - R_-}.$$

Напряженность поля, преобразуя, представим в виде:

$$g_{\text{ср}} = -\frac{2c^2}{R_+ - R_-} \times \ln \frac{\operatorname{sh}(K(R_+ - R_-)) + KR_- \operatorname{ch}(K(R_+ - R_-))}{KR_+}.$$

Разложив в ряд по степеням гиперболический синус и косинус, получим:

$$g_{\text{ср}} = -\frac{2c^2}{\Delta r} \ln\left(1 + \frac{R_-}{R_+} \frac{K^2 \Delta r^2}{2} + \frac{K^2 \Delta r^3}{6R_+} + \ldots \right).$$

Теперь, воспользовавшись разложением логарифма в ряд и отбросив менее значимые члены, получим:

$$g_{\text{ср}} = -c^2 K^2 \Delta r.$$

Подставив ранее найденное произведение $K^2\Delta r$, получим

$$g_{\text{ср}} = -c^2 \frac{1}{\dfrac{2c^2 R_-^{\,2}}{GM} - R_-} = -\frac{GM}{2R_-^{\,2}\left(1 - \dfrac{GM}{2c^2 R_-}\right)}.$$

Окончательно для напряженности поля на поверхности сферы можно записать:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{2R^2\left(1 - \dfrac{GM}{2c^2 R}\right)} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

В результате статическое гравитационное поле массивной пылевидной сферической оболочки радиуса R с равномерно распределенной на ней свободной массой M_0 представляется в виде:

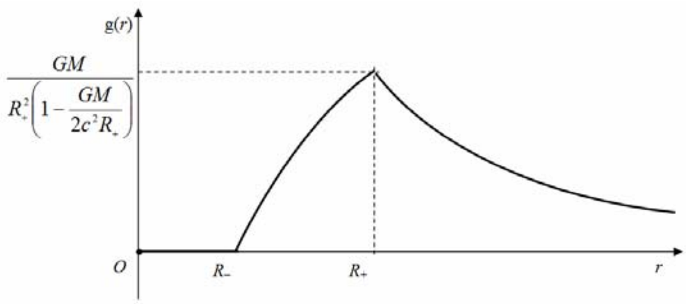

Рисунок 2.1

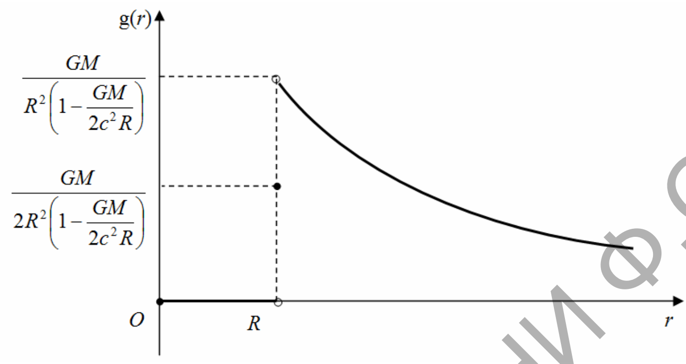

Рисунок 2.2

$$\mathbf{g}(\mathbf{r})=\begin{cases} 0, & \text{при } r<R; \\ -\dfrac{GM}{2R^2\left(1-\dfrac{GM}{2c^2R}\right)}\dfrac{\mathbf{r}}{r}, & \text{при } r=R; \\ -\dfrac{GM}{r^2\left(1-\dfrac{GM}{2c^2r}\right)}\cdot\dfrac{\mathbf{r}}{r}, & \text{при } r>R. \end{cases} \tag{2.1}$$

Из полученных соотношений следует, что величина напряжённости поля тяготения бесконечно тонкой оболочки на её поверхности оказывается в два раза меньшей предела при $r \to R$ для поля вне оболочки.

Графическая зависимость для напряженности поля шарового слоя с учетом (1.1) и (1.2), представленная на рисунке 2.1, при стремлении толщины слоя к нулю трансформируется в графическую зависимость для напряженности поля сферической оболочки, представленную на рисунке 2.2.

При переходе через поверхность график на рисунке 2.2 имеет разрыв, включающий обособленную точку.

В ньютоновском приближении из формулы (2.1) получаем:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r})=\begin{cases} 0, & \text{при } r<R; \\ -\dfrac{GM}{2R^2}\dfrac{\mathbf{r}}{r}, & \text{при } r=R;. \\ -\dfrac{GM}{r^2}\dfrac{\mathbf{r}}{r}, & \text{при } r>R. \end{cases}$$

Таким образом, использование решения граничной задачи нелинейной гравистатики Бриллюэна для шарового слоя позволяет путем соответствующего предельного перехода построить корректное решение для гравитационного поля, создаваемого бесконечно тонкой сферической оболочкой. Как и в соответствующей линейной задаче электростатики [4], напряженность поля на самой оболочке оказывается в два раза слабее напряженности в бесконечно близкой окрестности вне оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бриллюэн, Л.* Новый взгляд на теорию относительности / Л. Бриллюэн. – М. : Мир, 1972.– 142 с.

2. *Сердюков, А.Н.* Минимальная модель тяготения в рамках стандартных ограничений теории классических полей / А.Н. Сердюков // Письма в ЭЧАЯ. – 2009. – Т. 6, № 3 (152). – С. 312–331

3. *Сердюков, А.Н.* Калибровочная теория скалярного гравитационного поля / А.Н. Сердюков. – Гомель : изд-во Гомельского гос. ун-та, 2005. – 257 с.

4. *Ахраменко, Н.А.* К определению электрического поля равномерно заряженной сферы / Н.А. Ахраменко, Л.М. Булавко // Вестник БГУ. – 2005. – Серия 1, № 3. – С. 40–43.

Поступила в редакцию 18.05.12.