Проблемы физики, математики и техники, № 2 (11), 2012

УДК 517.925

О ПОСТРОЕНИИ УРАВНЕНИЙ АБЕЛЯ, ЭКВИВАЛЕНТНЫХ УРАВНЕНИЮ ВИДА $\dot{x} = A(t)(\xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2 + \xi_3 x^3)$

В.А. Бельский[1], **В.И. Мироненко**[2]

[1]*Гомельский инженерный институт МЧС РБ, Гомель*
[2]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель*

CONSTRUCTING OF ABEL EQUATIONS EQUIVALENTED TO THE EQUATION OF THE FORM $\dot{x} = A(t)(\xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2 + \xi_3 x^3)$

V.A. Belsky[1], **V.I. Mironenko**[2]

[1]*Gomel Engineering Institute of the Ministry for Emergency Situations of the Republic of Belarus, Gomel*
[2]*F. Scorina Gomel State University, Gomel*

Получены достаточные условия совпадения отражающих функций Мироненко у заданного уравнения Абеля $\dot{x} = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 + a_3(t)x^3$ и у уравнения $\dot{x} = A(t)(\xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2 + \xi_3 x^3)$, где ξ_i – константы. Полученные результаты иллюстрируются примерами.

Ключевые слова*: уравнение Абеля, отражающая функция, эквивалентные уравнения, полиномиальные возмущения.*

The sufficient conditions for coinsidering Mironenko reflecting functions of Abel equations $\dot{x} = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 + a_3(t)x^3$ and $\dot{x} = A(t)(\xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2 + \xi_3 x^3)$ where ξ_i are constants are established. Obtained results are illustrated by examples.

Keywords*: Abel equation, reflecting function, equivalence of differential equations, polynomial perturbations.*

Введение

Данная работа продолжает исследования, проведенные в работах [1] и [2], в которых с помощью теории отражающей функции (ОФ) [3], [4, с. 62–69], [5, с. 11–16], [6] мы изучали уравнение Риккати. В частности, в [2] мы выполняли построения уравнений Риккати с такой же ОФ, как и у уравнения Риккати вида

$$\dot{x} = A(t)(\xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2),$$

где $A(t)$ – некоторая непрерывная функция, $\xi_i, i = \overline{0,2}$, – постоянные числа. Однако метод исследования, применяемый в настоящей работе, существенно отличается от метода, используемого в работах [1], [2]. Это отличие объясняется главным образом тем, что, в отличие от уравнения Риккати, вид ОФ уравнения Абеля нам неизвестен.

В данной работе мы будем ссылаться на нашу последнюю статью [7], в которой также рассматривалось уравнение Абеля. Некоторые теоремы, доказанные в [7], будут применяться в нашем исследовании. В этой же работе содержатся также краткие сведения из теории ОФ. Чтобы не повторяться, мы приведем здесь только самые необходимые для понимания данной работы сведения.

Для дифференциальной системы

$$\dot{x} = X(t,x),\ t \in R,\ x^T = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D \subset R^n, \quad (0.1)$$

с общим решением в форме Коши $x = \varphi(t; t_0, x_0)$ ОФ определяется формулой $F(t,x) = \varphi(-t; t, x)$. Системы с одной и той же ОФ называются **эквивалентными.** Эквивалентные дифференциальные системы имеют одинаковые операторы сдвига [8, с.11] вдоль решений на симметричном промежутке времени $[-\omega; \omega]$, , и, значит, начальные данные $x(-\omega)$ решений краевых задач вида $\Phi(x(\omega), x(-\omega)) = 0$, где Φ – любая функция, для этих систем совпадают. Дифференцируемая вектор-функция $F(t,x)$ будет ОФ дифференциальной системы (0.1) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет основному соотношению

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} X(t,x) + X(-t, F(t,x)) \equiv 0 \quad (0.2)$$

и начальному условию $F(0,x) \equiv x$.

Знание ОФ дифференциальной системы позволяет находить в явном виде отображение за период для этой системы.

***Лемма* А.** [4, с. 65]. *Пусть правая часть системы* (0.1) 2ω*-периодична по* t, *а ее решения однозначно определяются своими начальными данными. Пусть* $F(t,x)$ *– ОФ этой системы. Тогда отображение за период* $[-\omega; \omega]$ *для системы* (0.1) *можно найти по формуле*

$$\varphi(\omega; -\omega, x) = F(-\omega, x),$$

и поэтому решение $\varphi(t;-\omega,x)$ *рассматриваемой системы будет* 2ω*-периодическим тогда и только тогда, когда* x *есть решение недифференциальной системы*

$$F(-\omega,x)=x.$$

В основной части данной работы будем широко использовать также следующие утверждения.

***Теорема* А** [9] **(**см. также [4, с. 171]). *Пусть непрерывно дифференцируемые вектор-функции*

$$\Delta_i(t,x)=[\Delta_{1i}(t,x),\Delta_{2i}(t,x),\ldots,\Delta_{ni}(t,x)]^T,\ i=\overline{1,k},$$

являются решениями дифференциальной системы

$$\frac{\partial\Delta(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial\Delta(t,x)}{\partial x}X(t,x)-\frac{\partial X(t,x)}{\partial x}\Delta(t,x)=0. \quad (0.3)$$

Тогда все возмущенные системы вида

$$\dot{x}=X(t,x)+\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(t)\Delta_i(t,x),$$

где $\alpha_i(t),\ i=\overline{0,k},$ *– произвольные непрерывные скалярные нечетные функции, эквивалентны системе* (0.1) (k *– любое число или* ∞).

***Теорема* B** [4, с. 79]. *Пусть система* (0.1) *эквивалентна некоторой стационарной системе. Тогда она эквивалентна системе* $\dot{x}=X(0,x)$. *Эта система – единственная стационарная система в классе эквивалентности, содержащем систему* (0.1).

1 Метод исследования и предварительные результаты

Итак, пусть нам задано уравнение Абеля

$$\dot{x}=a_0(t)+a_1(t)x+a_2(t)x^2+a_3(t)x^3 \quad (1.1)$$

с общим решением в форме Коши $x=\varphi(t;t_0,x_0)$. Целью нашего исследования будет получение условий, при которых для уравнения (1.1) существует уравнение Абеля вида

$$\dot{x}=A(t)(\xi_0+\xi_1x+\xi_2x^2+\xi_3x^3), \quad (1.2)$$

где $\xi_i,\ i=\overline{0,3},$ являются константами, с такой же ОФ, как и у уравнения (1.1). Кроме того, в тех случаях, когда такое уравнение существует, мы хотим указать способ его построения.

Как известно, любая функция $\psi(t)$ может быть представлена в виде суммы четной и нечетной функций:

$$\psi_{\text{ч}}(t):=\frac{\psi(t)+\psi(-t)}{2}=\frac{\psi+\bar{\psi}}{2},$$

$$\psi_{\text{н}}(t):=\frac{\psi(t)-\psi(-t)}{2}=\frac{\psi-\bar{\psi}}{2}.$$

***Лемма* 1.1.** *ОФ уравнения* (1.2) *и уравнения* $\dot{x}=A_{\text{ч}}(t)(\xi_0+\xi_1x+\xi_2x^2+\xi_3x^3)$ *совпадают.*

Аналогичное утверждение для уравнения Риккати $\dot{x}=A_{\text{ч}}(t)(\xi_0+\xi_1x+\xi_2x^2)$ доказано в [2]. Для доказательства леммы 1.1 достаточно в приводимых рассуждениях заменить многочлен $\xi_0+\xi_1x+\xi_2x^2$ на $\xi_0+\xi_1x+\xi_2x^2+\xi_3x^3$.

Лемма 1.1 позволяет нам в дальнейшем $A(t)$ в уравнении (1.2) считать четной функцией.

Введем обозначения

$$a_{00}:=a_0(0),\ a_{10}:=a_1(0),\ a_{20}:=a_2(0),\ a_{30}:=a_3(0).$$

***Лемма* 1.2.** *Пусть уравнение* (1.1) *эквивалентно какому-либо уравнению вида* (1.2). *Тогда уравнение* (1.2) *можно записать в виде*

$$\dot{x}=A(t)(a_{00}+a_{10}x+a_{20}x^2+a_{30}x^3). \quad (1.3)$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1 из [2], доказанной для уравнения $\dot{x}=A(t)(a_{00}+a_{10}x+a_{20}x^2)$.

Учитывая леммы 1.1, 1.2, переформулируем поставленную выше задачу следующим образом. Для уравнения (1.1), в котором хотя бы одно из чисел $a_{00},\ a_{10},a_{20},a_{30}$ отлично от нуля, требуется отыскать такую четную функцию $A(t)$, чтобы уравнения (1.1) и (1.3) были эквивалентны, либо показать, что такой функции не существует. Тем самым будет построено уравнение (1.3), либо доказано, что такого уравнения не существует.

Теорема А дает возможность построить класс уравнений Абеля, эквивалентных уравнению (1.1),

$$\dot{x}=a_0(t)+a_1(t)x+a_2(t)x^2+a_3(t)x^3+\\+\sum_i\alpha_i(t)\Delta_i(t,x), \quad (1.4)$$

где $\alpha_i(t)$ пробегают класс непрерывных скалярных нечетных функций, а $\Delta_i(t,x)$ являются решениями дифференциального уравнения (0.3), т. е. уравнения

$$\frac{\partial\Delta}{\partial t}+\frac{\partial\Delta}{\partial x}(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)-\\-\frac{\partial(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)}{\partial x}\Delta=0. \quad (1.5)$$

Решив уравнение (1.5) и построив множество уравнений (1.4), мы можем попытаться найти среди этого множества уравнение вида (1.3). Мы, однако, поступим по-другому. Вместо (1.4) мы будем строить множество возмущенных уравнений

$$\dot{x}=A(t)(a_{00}+a_{10}x+a_{20}x^2+a_{30}x^3)+\\+\sum_i\alpha_i(t)\Delta_i(t,x), \quad (1.6)$$

где $\Delta_i(t,x)$ – решения дифференциального уравнения

$$\frac{\partial\Delta}{\partial t}+\frac{\partial\Delta}{\partial x}A(a_{00}+a_{10}x+a_{20}x^2+a_{30}x^3)-\\-\frac{\partial(A(a_{00}+a_{10}x+a_{20}x^2+a_{30}x^3))}{\partial x}\Delta=0. \quad (1.7)$$

Этот выбор объясняется тем, что решать уравнение (1.7) нам предпочтительнее, чем уравнение (1.5). В уравнениях (1.6) и (1.7) функция $A(t)$ нам, разумеется, пока неизвестна. Однако в силу леммы 1.1 мы будем считать ее четной.

Если исходное уравнение (1.1) может быть записано в виде (1.6), то задача решена и уравнение (1.3) – искомое уравнение. Если нет, то уравнения Абеля вида (1.3) для уравнения (1.1) не существует.

Как уже отмечалось, для построения возмущенных уравнений мы будем находить решения уравнения (1.7). Уравнение (1.7) имеет бесконечное множество решений. Как и в [2], будем искать $\Delta(t,x)$ в виде многочлена

$$\Delta(t,x) = r_0(t) + r_1(t)x + r_2(t)x^2 + r_3(t)x^3 \qquad (1.8)$$

в котором коэффициенты $r_i(t), i = \overline{0,3}$, мы считаем дифференцируемыми необходимое число раз.

***Лемма* 1.3.** *Функция* $\Delta(t,x)$ *вида* (1.8) *является решением уравнения* (1.7) *тогда и только тогда, когда функции* $r_0(t), r_1(t), r_2(t), r_3(t)$ *являются решением системы*

$$\begin{aligned}
&A(t)[-a_{30}r_2(t) + a_{20}r_3(t)] = 0,\\
&\dot{r}_3(t) + A(t)[-2a_{30}r_1(t) + 2a_{10}r_3(t)] = 0,\\
&\dot{r}_2(t) + A(t)[-3a_{30}r_0(t) + 3a_{00}r_3(t) +\\
&\qquad + a_{10}r_2(t) - a_{20}r_1(t)] = 0,\\
&\dot{r}_1(t) + A(t)[2a_{00}r_2(t) - 2a_{20}r_0(t)] = 0,\\
&\dot{r}_0(t) + A(t)[a_{00}r_1(t) - a_{10}r_0(t)] = 0.
\end{aligned} \qquad (1.9)$$

Данная лемма является частным случаем леммы 2, доказанной в [7].

Таким образом, функции $r_i(t), i = \overline{0,3}$, должны удовлетворять переопределенной линейной дифференциально-алгебраической системе, дифференциальная часть которой – линейная система четвертого порядка.

Остановимся немного на системе (1.9). Так как $A(t)$ мы предполагаем отличной от тождественного нуля, то $a_{30}r_2(t) - a_{20}r_3(t) = 0$. Пусть в этом соотношении $a_{30} = 0$. Тогда либо $a_{20} = 0$, либо $r_3(t) \equiv 0$. Если $a_{20} = 0$, то уравнение (1.3) – линейное, и этот наиболее простой случай мы обсудим в конце статьи. Если же $r_3(t) \equiv 0$, но $a_{20} \neq 0$, то уравнение (1.3) есть уравнение Риккати, а для уравнения Риккати не существует полиномиального $\Delta(t,x)$ третьей степени, а только $\Delta(t,x)$ второй степени. Действительно, заменим в уравнении (0.3) $X(t,x)$ правой частью уравнения Риккати $\dot{x} = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2$, а $\Delta(t,x)$ в соответствии с (1.8). Выполняя дифференцирование и приводя подобные слагаемые при различных степенях *x*, приходим к системе, состоящей из четырех дифференциальных уравнений и недифференциального соотношения $a_2(t)r_3(t) = 0$. Отсюда вытекает, что $r_3(t) \equiv 0$. Таким образом, для уравнения Риккати не существует полиномиального $\Delta(t,x)$ третьей степени (и любой степени выше третьей, что можно показать аналогичными рассуждениями).

Поэтому, возмущая уравнение Риккати при помощи $\Delta(t,x)$ второй степени, мы не можем получить исходное уравнение Абеля, так как мы предполагаем изначально в уравнении (1.1) $a_3(t)$ отличным от тождественного нуля. Поэтому этот случай не может иметь места.

Итак, случай $a_{30} = 0$ может иметь место, только если уравнение (1.3) есть либо линейное, либо уравнение вида $\dot{x} = a_{00}A(t)$. Поэтому в дальнейшем мы будем полагать в уравнении (1.3) $a_{30} \neq 0$.

Введем обозначение

$$\varphi_0 := 27a_{00}a_{30}^2 + 2a_{20}^3 - 9a_{10}a_{20}a_{30}.$$

***Лемма* 1.4.** *Пусть в уравнении* (1.3) $a_{30} \neq 0$. *В точках, где* $A(t) \neq 0$, *система* (1.9) *эквивалентна системе*

$$\begin{aligned}
&r_2 a_{30} = a_{20}r_3,\\
&r_1 = \frac{2a_{10}Ar_3 + \dot{r}_3}{2a_{30}A},\\
&r_0 = \frac{6a_{00}a_{30}Ar_3 + a_{20}\dot{r}_3}{6a_{30}^2 A},\\
&\ddot{r}_3 = \frac{3a_{30}\dot{A}r_3 + 2(a_{20} - 3a_{10}a_{30})A^2}{3a_{30}A},\\
&\varphi_0 \dot{r}_3 = 0.
\end{aligned} \qquad (1.10)$$

Данное утверждение непосредственно следует из леммы 3, доказанной в [7]. Для доказательства леммы 1.4 в приведенных рассуждениях достаточно заменить $a_i(t)$ на $a_{i0}A(t), i = \overline{0,3}$.

***Замечание* 1.1.** Лемма 1.4 будет справедлива и в том случае, когда $A(t)$ обращается в нуль лишь в изолированных точках. Доказательство этого достигается доопределением найденной функции $\Delta(t,x)$ по непрерывности.

***Лемма* 1.5.** *Пусть коэффициенты уравнения* (1.1) *удовлетворяют условиям*

$$a_{30} \neq 0, \varphi_0 \neq 0.$$

Тогда если для уравнения (1.1) *существует эквивалентное ему уравнение вида* (1.3), *то уравнение* (1.1) *с необходимостью является уравнением с разделяющимися переменными.*

Доказательство. Воспользуемся результатами леммы 1.4. Из последнего соотношения системы (1.10) находим, что $r_3(t) \equiv const$. Если положить $r_3(t) \equiv a_{30}$, то из остальных соотношений системы (1.10) находим $r_2 \equiv a_{20}$, $r_1 \equiv a_{10}$, $r_0 \equiv a_{00}$. Таким образом, в рассматриваемом случае уравнение (1.7) имеет только одно (с точностью до постоянного множителя) полиномиальное $\Delta(t,x)$, которое имеет вид

$$\Delta(t,x) = a_{00} + a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{30}x^3. \qquad (1.11)$$

Если же уравнение (1.1) эквивалентно какому-либо уравнению (1.3), то оно может быть получено возмущением уравнения (1.3) при помощи указанного $\Delta(t,x)$, т. е.

$$\dot{x} = A(t)(a_{00} + a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{30}x^3) + \\ +\alpha(t)(a_{00} + a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{30}x^3),$$

где $\alpha(t)$ – некоторая нечетная функция. Мы получили уравнение с разделяющимися переменными. Лемма доказана.

Разумеется, мы предполагаем, что исходное уравнение Абеля (1.1) не является уравнением с разделяющимися переменными, т. е. этот случай не представляет для нас интереса. Из доказанной леммы следует, что содержательный результат мы можем получить только при $\varphi_0 = 0$. Таким образом, лемма 1.5 дает нам важный критерий, а именно: только при выполнении условия $\varphi_0 = 0$ мы будем продолжать исследование уравнения (1.1).

Введем обозначения

$$I(t) := \int A(t)dt, \; m_0 := \frac{2(a_{20}^2 - 3a_{10}a_{30})}{3a_{30}}.$$

***Лемма* 1.6.** *Пусть коэффициенты уравнения* (1.1) *удовлетворяют условиям* $a_{30} \neq 0, \varphi_0 = 0$. *Тогда уравнение* (1.7) *имеет два линейно независимых решения* $\Delta_1(t,x)$ *и* $\Delta_2(t,x)$, *причем* $\Delta_1(t,x)$ *имеет вид* (1.11), *а* $\Delta_2(t,x)$ *может быть записано в виде*

$$\Delta_2(t,x) = (a_{10}a_{20} - 3a_{00}a_{30} + \\ +2a_{20}^2x + 6a_{20}a_{30}x^2 + 6a_{30}^2x^3)e^{m_0 I} \qquad (1.12)$$

при $a_{20}^2 - 3a_{10}a_{30} \neq 0$,

$$\Delta_2(t,x) = 6a_{00}a_{30}I + a_{20} + \\ +3(2a_{10}a_{30}I + a_{30})x + \\ +6a_{20}a_{30}Ix^2 + 6a_{30}^2Ix^3 \qquad (1.13)$$

при $a_{20}^2 - 3a_{10}a_{30} = 0$.

Доказательство. Так как выполнены условия леммы 1.4, то функции $r_i(t), i = \overline{0,3}$, найдем из системы (1.10), в которой, в силу $\varphi_0 = 0$, последнее соотношение обращается в тождество. Предпоследнее соотношение представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка, которое имеет два линейно независимых решения $r_{31}(t), r_{32}(t)$. Из первых трех соотношений этой системы найдем, соответственно, $r_{21}(t), r_{22}(t)$, $r_{11}(t), r_{12}(t)$ и $r_{01}(t)$, $r_{02}(t)$. Тем самым найдены две линейно независимые функции

$$\Delta_1(t,x) = r_0 + r_1x + r_2x^2 + r_3x^3$$

и $\Delta_2(t,x) = r_0 + r_1x + r_2x^2 + r_3x^3$.

Чтобы убедиться в том, что $\Delta_1(t,x)$ и $\Delta_2(t,x)$ имеют именно такой вид, как сказано в условии теоремы, достаточно подставить соответствующие коэффициенты выражений (1.11)–(1.13) в систему (1.9) и установить непосредственными вычислениями, что каждое соотношение системы обращается в тождество. Лемма доказана.

Перейдем теперь к основной части настоящей работы, в которой мы дадим достаточные условия существования для заданного уравнения Абеля (1.1) эквивалентного ему уравнения вида (1.3). Когда такое уравнение существует, мы укажем способ его построения, т. е. построения функции $A(t)$.

2 Основные результаты

***Теорема* 2.1.** *Пусть коэффициенты уравнения* (1.1) *удовлетворяют условиям:*

$$a_{30} \neq 0, \varphi_0 = 0, \;\; m_0 \neq 0$$

и, кроме того,

$$a_{30}a_2 = a_{20}a_3, \qquad (2.1)$$

$$2a_{30}(a_{20}^2 - 3a_{10}a_{30})a_0 = \\ = (a_{00}a_{20}^2 + 3a_{00}a_{10}a_{20} - a_{20}a_{10}^2)a_3 + \\ +a_{30}(a_{10}a_{20} - 9a_{00}a_{30})a_1, \qquad (2.2)$$

$$a_{20}^2a_3 - 3a_{30}^2a_1 + a_{20}^2\overline{a}_3 - 3a_{30}^2\overline{a}_1 = \\ = \frac{3a_{30}^2}{2}\left(\frac{a_{10}\overline{a}_3 - a_{30}\overline{a}_1}{a_{30}a_1 - a_{10}a_3}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{a_{30}a_1 - a_{10}a_3}{a_{10}\overline{a}_3 - a_{30}\overline{a}_1}\right), \qquad (2.3)$$

где $\overline{a}_i \equiv a_i(-t)$.

Тогда для уравнения (1.1) *существует эквивалентное ему уравнение* (1.3), *которое может быть записано в виде*

$$\dot{x} = \frac{a_{20}^2(a_3 + \overline{a}_3) - 3a_{30}^2(a_1 + \overline{a}_1)}{3a_{30}^2 m_0} \times \\ \times(a_{00} + a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{30}x^3). \qquad (2.4)$$

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что правая часть исходного уравнения (1.1) может быть представлена в виде (аргумент *t* для краткости опускаем)

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = \\ = A(a_{00} + a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{30}x^3) + \\ +\alpha_1\Delta_1(t,x) + \alpha_2\Delta_2(t,x),$$

где A, α_1, α_2 – некоторые непрерывные функции, причем A – четная, α_1, α_2 – нечетные, а $\Delta_1(t,x)$ и $\Delta_2(t,x)$, согласно лемме 1.6, определяются выражениями (1.11), (1.12). Последнее соотношение эквивалентно системе

$$a_0 = a_{00}(A + \alpha_1) + (a_{10}a_{20} - 3a_{00}a_{30})\alpha_2 e^{m_0 I}, \\ a_1 = a_{10}(A + \alpha_1) + 2a_{20}^2\alpha_2 e^{m_0 I}, \\ a_2 = a_{20}(A + \alpha_1) + 6a_{20}a_{30}\alpha_2 e^{m_0 I}, \\ a_3 = a_{30}(A + \alpha_1) + 6a_{30}^2\alpha_2 e^{m_0 I}. \qquad (2.5)$$

Положим

$$\alpha_1(t) = \frac{a_{20}^2(a_3 - \overline{a}_3) - 3a_{30}^2(a_1 - \overline{a}_1)}{3a_{30}^2 m_0},$$

$$\alpha_2(t) = \frac{a_{30}(a_1 - \overline{a}_1) - a_{10}(a_3 - \overline{a}_3)}{3a_{30}^2 m_0 (e^{m_0 I} + e^{-m_0 I})}, \qquad (2.6)$$

$$A(t) = \frac{a_{20}^2(a_3 + \overline{a}_3) - 3a_{30}^2(a_1 + \overline{a}_1)}{3a_{30}^2 m_0}. \qquad (2.7)$$

Отметим, что определенные таким образом функции $\alpha_1(t), \alpha_2(t)$ являются нечетными, а $A(t)$ – четной. Покажем, что при таком выборе функций A, α_1, α_2 все соотношения системы (2.5) обращаются в тождества.

Для начала получим выражение для $\alpha_2 e^{m_0 I}$, которое нам потребуется при доказательстве. Используя выражение для $A(t)$ (2.7) и соотношение (2.3), можем записать $A(t)$ в виде

$$A(t) = \frac{1}{2m_0}\left(\frac{a_{10}\overline{a}_3 - a_{30}\overline{a}_1}{a_{30}a_1 - a_{10}a_3}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{a_{30}a_1 - a_{10}a_3}{a_{10}\overline{a}_3 - a_{30}\overline{a}_1}\right).$$

Отсюда находим, что

$$I(t) = \int A(t)dt = \frac{1}{2m_0}\ln\left|\frac{a_{30}a_1 - a_{10}a_3}{a_{10}\overline{a}_3 - a_{30}\overline{a}_1}\right|.$$

Теперь, используя (2.6), получаем

$$\alpha_2 e^{m_0 I} = \frac{a_{30}(a_1 - \overline{a}_1) - a_{10}(a_3 - \overline{a}_3)}{3a_{30}^2 m_0 (e^{m_0 I} + e^{-m_0 I})} e^{m_0 I} =$$

$$= \frac{a_{30}(a_1 - \overline{a}_1) - a_{10}(a_3 - \overline{a}_3)}{3a_{30}^2 m_0 (1 + e^{2m_0 I})} e^{2m_0 I} =$$

$$= \frac{a_{30}a_1 - a_{10}a_3}{3a_{30}^2 m_0}. \qquad (2.8)$$

Используя (2.8), нетрудно показать, что все соотношения системы (2.5) обращаются в тождество. Рассмотрим, например, последнее из соотношений (2.5). Заменяя в правой части этого соотношения α_1, α_2, A в соответствии с (2.6), (2.7) и $\alpha_2 e^{m_0 I}$ в соответствии с приведенным выше выражением, получаем

$$a_3 = \frac{a_{30}(2a_{20}^2 + 3a_{10}a_{30})a_3 - 6a_{30}^2 a_1}{3a_{30}^2 m_0} +$$

$$+ \frac{6a_{30}^2(a_{30}a_1 - a_{10}a_3)}{3a_{30}^2 m_0} = \frac{3a_{30}^2 m_0 a_3}{3a_{30}^2 m_0} \equiv a_3.$$

Аналогично доказываем, что и остальные соотношения (2.5) в силу условий (2.1) и (2.2) обращаются в тождества. Таким образом, мы показали, что уравнение (1.1) может быть записано как возмущение уравнения (2.4) при помощи $\Delta_1(t,x)$ и $\Delta_2(t,x)$, определяемых соотношениями (1.11), (1.12), в которых, в свою очередь, функции $A(t), \alpha_1(t), \alpha_2(t)$ определяются соотношениями (2.6), (2.7). Тогда использование теоремы А завершает доказательство.

***Замечание* 2.1.** Покажем, что выражение $a_{30}a_1 - a_{10}a_3$, а значит, и выражение $a_{30}\overline{a}_1 - a_{10}\overline{a}_3$, которые присутствуют в соотношениях (2.3) и (2.8), не могут тождественно равняться нулю. Действительно, этот случай, как следует из (2.6), может иметь место только когда $\alpha_2(t) \equiv 0$. А тогда, как нетрудно видеть из системы (2.5), соответствующее возмущенное уравнение, а значит, исходное уравнение Абеля (1.1), является уравнением с разделяющимися переменными. Но мы изначально отвергаем такую возможность. Тем не менее, не обращаясь тождественно в нуль, выражение $a_{30}a_1 - a_{10}a_3$ может обращаться в нуль в некоторых изолированных точках. В таких точках мы доопределим соответствующие выражения по непрерывности, так, чтобы все указанные действия имели смысл.

***Пример* 2.1.** Рассмотрим уравнение Абеля

$$\dot{x} = 6\sin 2te^{2\sin t} + 2(\cos t + \sin t + 9\sin 2te^{2\sin t})x +$$
$$+3(\cos t + \sin t + 6\sin 2te^{2\sin t})x^2 +$$
$$+(\cos t + \sin t + \sin 2te^{2\sin t})x^3.$$

Для этого уравнения имеем:

$$a_{00} = 0, a_{10} = 2, a_{20} = 3, a_{30} = 1, a_0 = 6te^{2\sin t},$$
$$a_1 = 2(\cos t + \sin t + 9\sin 2te^{2\sin t}),$$
$$a_2 = 3(\cos t + \sin t + 6\sin 2te^{2\sin t}),$$
$$a_3 = (\cos t + \sin t + 6\sin 2te^{2\sin t}).$$

Непосредственными вычислениями убеждаемся, что все условия теоремы 2.1 выполняются. По формуле (2.7) находим

$$A(t) = \frac{1}{6}[9(2\cos t + 6\sin 2te^{2\sin t} - 6\sin 2te^{-2\sin t}) -$$
$$-3(4\cos t + 18\sin 2te^{2\sin t} - 18\sin 2te^{-2\sin t})] = \cos t.$$

Таким образом, по теореме 2.1, исходное дифференциальное уравнение эквивалентно дифференциальному уравнению $\dot{x} = (2x + 3x^2 + x^3)\cos t$. Согласно теории ОФ, все продолжимые на отрезок $[-\pi; \pi]$ решения исходного уравнения Абеля будут 2π-периодическими. По формулам (2.6) нетрудно вычислить, что для возмущения полученного дифференциального уравнения были использованы функции

$$\alpha_1(t) \equiv \sin t, \quad \alpha_2(t) \equiv \sin 2t.$$

Теорема 2.2. *Пусть коэффициенты уравнения* (1.1) *удовлетворяют условиям:*

$$a_{30} \neq 0, \varphi_0 = 0, \quad m_0 = 0$$

и, кроме того,

$$a_{30}a_2 = a_{20}a_3, \qquad (2.9)$$

$$3a_{30}^2(a_0 - \overline{a}_0) = (3a_{00}a_{30} - a_{10}a_{20})(a_3 - \overline{a}_3) + a_{20}a_{30}(a_1 - \overline{a}_1), \qquad (2.10)$$

$$a_{30}(a_1 + \overline{a}_1) = a_{10}(a_3 + \overline{a}_3), \qquad (2.11)$$

$$a_{30}(a_0 + \overline{a}_0) = a_{00}(a_3 + \overline{a}_3). \qquad (2.12)$$

Тогда для уравнения (1.1) *существует эквивалентное ему уравнение* (1.3), *причем функция* $A(t)$ *определяется соотношением*

$$2a_{30}A(t) = a_3 + \overline{a}_3 - 2\psi(t)I(t), \qquad (2.13)$$

где

$$\psi(t) := a_{30}a_1 - a_{10}a_3 - (a_{30}\overline{a}_1 - a_{10}\overline{a}_3),$$
$$I(t) := \int A(t)dt.$$

Доказательство. Так как $m_0 = 0$, то, согласно лемме 1.6, функции $\Delta_1(t,x)$ и $\Delta_2(t,x)$ определяются соотношениями (1.11), (1.13). Тогда, проводя рассуждения аналогичные тем, которые были проведены в начале доказательства теоремы 2.1, приходим к системе

$$\begin{aligned} &a_0 = a_{00}(A+\alpha_1) + (6a_{00}a_{30}I + a_{20})\alpha_2, \\ &a_1 = a_{10}(A+\alpha_1) + (6a_{10}a_{30}I + 3a_{30})\alpha_2, \\ &a_2 = a_{20}(A+\alpha_1) + 6a_{20}a_{30}I\alpha_2, \\ &a_3 = a_{30}(A+\alpha_1) + 6a_{30}^2 I. \end{aligned} \qquad (2.14)$$

Выберем функции $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ следующим образом:

$$\alpha_1(t) = \frac{a_3 - \overline{a}_3}{2a_{30}}, \alpha_2(t) = \frac{\psi}{6a_{30}^2}. \qquad (2.15)$$

(При таком выборе $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ являются нечетными). Покажем, что при таком выборе функций $\alpha_1(t), \alpha_2(t)$ и $A(t)$ все соотношения системы (2.14) обращаются в тождества. Рассмотрим, например, предпоследнее из соотношений (2.14). Заменяя в его правой части $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ в соответствии с (2.15), получим

$$a_2 = a_{20}A + a_{20}\frac{a_3 - \overline{a}_3}{2a_{30}} + 6a_{20}a_{30}I\frac{\psi}{6a_{30}^2}.$$

Умножая обе части последнего равенства на $2a_{30}$ и учитывая соотношение (2.13), приходим к равенству $a_{30}a_2 = a_{20}a_3$, которое является тождеством в силу условия (2.9). Рассуждая аналогичным образом, непосредственными вычислениями убеждаемся, что и остальные соотношения (2.14) в силу условий (2.9)–(2.12) обращаются в тождества. Теорема доказана.

***Замечание* 2.3.** Для определения функции $A(t)$ продифференцируем соотношение (2.13) и, используя само соотношение (2.13), получим линейное уравнение

$$\dot{A} = \left(\frac{\dot{\psi}}{\psi} - \frac{\psi}{a_{30}}\right)A + \frac{\dot{a}_{3ч}\psi - a_{3ч}\dot{\psi}}{a_{30}\psi}, \qquad (2.16)$$

из которого определим функцию $A(t)$ (здесь $a_{3ч} \equiv \dfrac{a_3 + \overline{a}_3}{2}$). При этом $\psi(t)$ не может обращаться тождественно в нуль, так как если $\psi(t) \equiv 0$, то $A(t) = a_{3ч}$, а из (2.15) находим, что $\alpha_2(t) \equiv 0$. Тогда уравнение (1.1) с необходимостью является уравнением с разделяющимися переменными (см. замечание 2.2). Если же $\psi(t)$ обращается в нуль в счетном числе изолированных точек, то в этих точках мы доопределим правую часть уравнения (2.16) по непрерывности.

***Пример* 2.2.** Для уравнения Абеля

$$\begin{aligned} \dot{x} = &\operatorname{ch} t + 6\operatorname{sh}^2 t + 3\operatorname{sh} t + \\ &+3(\operatorname{ch} t + 6\operatorname{sh}^2 t + \operatorname{sh} t)x + \\ &+3(\operatorname{ch} t + 6\operatorname{sh}^2 t)x^2 + (\operatorname{ch} t + 6\operatorname{sh}^2 t)x^3 \end{aligned}$$

имеем $a_{00} = 1, a_{10} = 3, a_{20} = 3, a_{30} = 1$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что для этого уравнения выполняются все условия теоремы 2.2, а, значит, для него существует эквивалентное ему уравнение вида (1.3). Для определения $A(t)$ выпишем уравнение (2.16)

$$\dot{A} = \left(\frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t} - 6\operatorname{sh} t\right)A + \frac{6\operatorname{sh}^2 t \operatorname{ch} t - 1}{\operatorname{sh} t},$$

интегрируя которое находим $A = \operatorname{ch} t$. Таким образом, уравнение

$$\dot{x} = (1 + 3x + 3x^2 + x^3)\operatorname{ch} t$$

эквивалентно исходному уравнению Абеля.

***Замечание* 2.4.** Условие $a_{30}a_2(t) = a_{20}a_3(t)$ входит в формулировку и теоремы 2.1 и теоремы 2.2 и, таким образом, является необходимым условием существования для исходного уравнения Абеля (1.1) эквивалентного ему уравнения вида (1.3). Другими словами, если такое уравнение существует, то оно с необходимостью имеет вид

$$\dot{x} = a_0(t) + a_1(t)x + c_0 a_3(t)x^2 + a_3(t)x^3,$$

где c_0 может быть и нулем (мы по-прежнему полагаем $a_{30} \neq 0$).

Нам осталось рассмотреть случай, когда $a_{30} = 0, a_{20} = 0$. (Ранее мы показали, что случай $a_{30} = 0, a_{20} \neq 0$ не может иметь места). Таким образом, уравнение (1.3) принимает вид

$$\dot{x} = A(t)(a_{00} + a_{10}x). \qquad (2.17)$$

Для проверки эквивалентности уравнения (1.1) и уравнения (2.17) мы не будем применять описанную выше методику, так как для линейного уравнения мы можем определить ОФ $F(t,x)$. После этого мы составим основное соотношение для ОФ (0.2), а именно

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) + \\ &+\overline{a}_0 + \overline{a}_1F + \overline{a}_2F^2 + \overline{a}_3F^3 \equiv 0. \end{aligned} \qquad (2.18)$$

В этом соотношении $F(t,x)$ будет выражена через неизвестную функцию $A(t)$. После приведения в (2.18) подобных слагаемых при одинаковых степенях x мы придем к системе из четырех соотношений. Если из этой системы определится четная функция $A(t)$, то исходное уравнение Абеля (1.1) и линейное уравнение (2.17) эквивалентны. Если же функции $A(t)$, обращающей все четыре упомянутых соотношения в тождества, не существует, то и уравнения (2.17), эквивалентного уравнению (1.1), не существует.

Мы не будем проделывать эти выкладки в общем виде, а выпишем только ОФ уравнения (2.17):

1) если $a_{10} \neq 0$, то

$$F(t,x) = e^{-2a_{10}\int_0^t A(\tau)d\tau}\left(\frac{a_{00}}{a_{10}} + x\right) - \frac{a_{00}}{a_{10}}, \quad (2.19)$$

2) если $a_{10} = 0$, то $F(t,x) = x - 2a_{00}\int_0^t A(\tau)d\tau.$

В справедливости этих выражений нетрудно убедиться проверкой основного соотношения для ОФ.

***Пример* 2.3.** Для уравнения Абеля

$$\dot{x} = (2\sin t \operatorname{ch} t - \cos 2t)x + x^3(1 + e^{2\sin 2t})\sin t$$

имеем $a_{00} = 0, a_{10} = -1, a_{20} = 0, a_{30} = 0.$ Уравнение (2.17) имеет вид $\dot{x} = -A(t)x.$ Находим ОФ этого уравнения по формуле (2.19)

$$F(t,x) = xe^{2\int_0^t A(\tau)d\tau}.$$

Запишем основное соотношение для ОФ (2.18). После выполнения дифференцирования и приведения подобных слагаемых при x и x^3 приходим к системе

$$(A - \cos 2t)e^{2\int_0^t A(\tau)d\tau} = 0,$$

$$(1 + e^{2\sin 2t} - e^{4\int_0^t A(\tau)d\tau} - e^{-2\sin 2t}e^{4\int_0^t A(\tau)d\tau})e^{2\int_0^t A(\tau)d\tau}\sin t = 0.$$

Из первого уравнения этой системы находим $A(t) = \cos 2t.$ При этом второе уравнение системы обращается в тождество. Итак, мы нашли уравнение $\dot{x} = -x\cos 2t,$ эквивалентное исходному уравнению.

Заключение

Мы получили достаточные условия существования для заданного уравнения Абеля $\dot{x} = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 + a_3(t)x^3$ другого уравнения Абеля вида $\dot{x} = A(t)(\xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2 + \xi_3 x^3)$ с такой же ОФ, как и у исходного уравнения. Первым шагом установления такой эквивалентности служит проверка условия $\varphi_0 = 0.$ Если это условие выполняется, то мы проверяем условия, содержащиеся в формулировках теорем 2.1 или 2.2. В этих теоремах содержатся также формулы для определения функции $A(t).$ Если же $\varphi_0 \neq 0,$ то исследование заканчивается, так как уравнения вида $\dot{x} = A(t)(\xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2 + \xi_3 x^3),$ эквивалентного исходному уравнению Абеля, не существует.

Для случая $a_{30} = 0, a_{20} = 0,$ который не рассматривается в теоремах 2.1 и 2.2, мы указали последовательность шагов, которые необходимо осуществить, чтобы решить поставленную задачу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бельский, В.А.* Уравнения Риккати с одинаковыми отражающими функциями / В.А. Бельский // Известия Нац. Акад. Наук Беларуси, сер. физ.-мат. наук. – 2007. – № 4. – С. 22–27.

2. *Бельский, В.А.* О построении уравнений, эквивалентных уравнению Риккати в смысле совпадения отражающих функций / В.А. Бельский // Известия Нац. Акад. Наук Беларуси, сер. физ.-мат. наук. – 2008. – № 2. – С. 35–41.

3. *Мироненко, В.И.* О методе, позволяющем находить начальные данные периодических решений дифференциальных систем и сравнивать отображения за период / В.И. Мироненко // Дифференциальные уравнения. – 1980. – Т. 14. – № 11. – С. 1985–1994.

4. *Мироненко, В.И.* Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем / В.И. Мироненко. – Гомель : УО ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. – 196 с.

5. *Мироненко, В.И.* Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений / В.И. Мироненко. – Минск : Университетское, 1986. – 76 с.

6. *V.I. Mironenko.* Reflecting function [Electronic resource]. – 2010. – Mode of access : http://www.reflecting-function.narod.ru. – Date of access : 16.05.2011.

7. *Бельский, В.А.* О полиномиальных возмущениях уравнения Абеля, не изменяющих отражающей функции / В.А. Бельский, В.И. Мироненко // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 79–85.

8. *Красносельский, М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский. – М. : Наука, 1966. – 332 с.

9. *Мироненко, В.В.* Возмущения дифференциальных систем, не меняющие временных симметрий / В.В. Мироненко // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40. – № 10. – С. 1325–1332.

Поступила в редакцию 06.01.12.