

УДК 517.925

ОТРАЖАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ ОДНОЙ ДВУМЕРНОЙ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

П.П. Вересович

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

THE REFLECTING FUNCTION OF ONE TWO DIMENSIONAL
DIFFERENTIAL SYSTEM

P.P. Veresovich

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Установлено, что если первая компонента отражающей функции В.И. Мироненко двумерной дифференциальной системы $\dot{x} = a_0(t, x) + ya_1(t, x)$, $\dot{y} = b_0(t, x) + yb_1(t, x) + y^2b_2(t, x)$ линейна по x и не зависит от y , то вторая ее компонента линейна по y .

Ключевые слова: дифференциальная система, отражающая функция, периодические решения.

It was established, that if the first component of the Mironenko reflecting function of the system $\dot{x} = a_0(t, x) + ya_1(t, x)$, $\dot{y} = b_0(t, x) + yb_1(t, x) + y^2b_2(t, x)$ is linear with respect to x , and independent of y then the second component of the reflecting function is linear with respect to y .

Keywords: differential system, reflecting function, periodic solutions.

Введение

Многие процессы, происходящие в окружающей нас действительности, моделируются системами дифференциальных уравнений. При этом лишь малое количество этих систем интегрируется в квадратурах, а тем более в элементарных функциях. Это обстоятельство вынуждает изучать свойства решений дифференциальных уравнений по виду самих уравнений. Определяющими из этих свойств являются наличие, количество и устойчивость периодических решений дифференциальных систем вида

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \quad t \in R, \quad x \in D \subset R^n \quad (0.1)$$

с непрерывно дифференцируемой правой частью. Условия существования 2ω -периодических решений систем (0.1) с правой частью, непериодической по t , или системы, период которой несоизмерим с 2ω , известны [1, с. 487–489]. Методы исследования существования периодических решений систем вида (0.1) с 2ω -периодической правой частью в той или иной степени связаны с отображением за период или отображением Пуанкаре [2, с. 209], [4, с. 8]. Если функция $\varphi(t; t_0, x_0)$ есть общее решение системы (0.1), то под отображением Пуанкаре понимается отображение $P_{t_0}(x) = \varphi(t_0 + 2\omega; t_0, x)$. Но построение отображения Пуанкаре по определению требует знания общего решения системы в форме Коши. Если положить $t_0 = -\omega$, то функция

$\Pi(x) = \varphi(\omega; -\omega, x)$ также будет отображением за период $[-\omega; \omega]$ системы (0.1), и знание этой функции позволит решить все вопросы, связанные с наличием и устойчивостью периодических решений.

1 Используемые определения и утверждения

В.И. Мироненко с помощью введенной им вспомогательной функции $F(t, x) = \varphi(-t; t, x)$, показал [3], что отображение за период можно определить, не зная общего решения дифференциальной системы. Функцию $F(t, x)$ автор назвал отражающей, и если она известна, то отображение за период $[-\omega; \omega]$ определяется формулой $\Pi(x) = \varphi(\omega; -\omega, x) = F[-\omega, x]$. Возможность отыскания отражающей функции без знания общего решения системы (0.1) вытекает из следующего **утверждения** [3]–[5]: *дифференцируемая функция $F(t, x)$ является отражающей функцией системы (0.1) тогда и только тогда, когда она является решением задачи Коши*

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} X(t, x) + X(-t, F) = 0, \quad (1.1)$$

$$F(0, x) \equiv x.$$

Соотношение (1.1) названо В.И. Мироненко основным соотношением для отражающей функции. Известно [4]–[5], что если отражающая

функция для системы (0.1) известна, то начальные данные ее 2ω -периодических решений определяются уже из недифференциального уравнения

$$F[-\omega, x] = x. \quad (1.2)$$

Более полные ссылки на работы, выполненные с использованием понятия отражающей функции и возможностями ее применения, указаны на сайте <http://reflecting-function.narod.ru>.

2 Основные результаты

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_0(t, x) + a_1(t, x)y := P(t, x, y), \\ \dot{y} &= b_0(t, x) + b_1(t, x)y + b_2(t, x)y^2 := Q(t, x, y), \end{aligned} \quad (2.1)$$

правые части которой удовлетворяют условиям существования и единственности решения задачи Коши.

Построим класс таких систем, первая компонента отражающей функции которых линейна по x и не зависит от y .

Пусть $F(t, x, y) = (F_1(t, x), F_2(t, x, y))^T$ – отражающая функция системы (2.1). Для отражающей функции этой системы должно выполняться основное соотношение (1.2). В нашем случае имеем

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} F_{1t}(t, x) \\ F_{2t}(t, x, y) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} F_{1x}(t, x) & F_{1y}(t, x) \\ F_{2x}(t, x, y) & F_{2y}(t, x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(t, x, y) \\ Q(t, x, y) \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} P(-t, F_1(t, x), F_2(t, x, y)) \\ Q(-t, F_1(t, x), F_2(t, x, y)) \end{pmatrix} = 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

при этом $F_1(0, x) = x$, $F_2(0, x, y) = y$.

Лемма. Пусть первая компонента отражающей функции линейна по x и не зависит от y . Тогда вторая компонента этой отражающей функции имеет вид

$$F_2(t, x, y) = N(t, x) + M(t, x)y,$$

т. е. линейна по y .

Доказательство. Пусть

$$F_1(t, x) = n(t) + m(t)x.$$

Тогда первое тождество основного соотношения примет вид

$$\begin{aligned} \dot{m}(t)x + \dot{n}(t) + m(t)(a_0(t, x) + a_1(t, x)y) + \\ + a_0(-t, m(t)x + n(t)) + \\ + a_1(-t, m(t)x + n(t))F_2(t, x, y) \equiv 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} F_2(t, x, y) = \\ = -\frac{\dot{m}(t)x + \dot{n}(t) + m(t)a_0(t, x) + a_0(-t, m(t)x + n(t))}{a_1(-t, m(t)x + n(t))} - \\ - \frac{m(t)a_1(t, x)}{a_1(-t, m(t)x + n(t))} y. \end{aligned}$$

Обозначив

$$\begin{aligned} N(t, x) = \\ = -\frac{\dot{m}(t)x + \dot{n}(t) + m(t)a_0(t, x) + a_0(-t, m(t)x + n(t))}{a_1(-t, m(t)x + n(t))}, \\ M(t, x) = -\frac{m(t)a_1(t, x)}{a_1(-t, m(t)x + n(t))}, \end{aligned}$$

получаем требуемое утверждение.

Теорема. Пусть выполняются условия леммы. Тогда функции $M(t, x)$ и $N(t, x)$ удовлетворяют следующей системе:

$$\begin{aligned} N_t(t, x) + a_0 N_x(t, x) + b_0 M(t, x) + \\ + \bar{b}_0 + \bar{b}_1 N(t, x) + \bar{b}_2 N^2(t, x) \equiv 0, \\ M_t(t, x) + a_0 M_x(t, x) + a_1 N_x(t, x) + \\ + (b_1 + \bar{b}_1)M(t, x) + 2\bar{b}_2 N(t, x)M(t, x) \equiv 0, \\ a_1 M_x(t, x) + b_2 M(t, x) + \bar{b}_2 M^2(t, x) \equiv 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} a_i &= a_i(t, x) \quad (i = 0, 1), \\ b_j &= b_j(t, x) \quad (j = 0, 1, 2), \\ \bar{b}_j &= b_j(-t, m(t)x + n(t)) \quad (j = 0, 1, 2). \end{aligned}$$

Доказательство. Запишем основное соотношение для второй компоненты отражающей функции, учитывая $F_2(t, x, y) = N(t, x) + M(t, x)y$.

Имеем

$$\begin{aligned} M_t(t, x)y + N_t(t, x) + \\ + (a_0 + a_1y)(M_x(t, x)y + N_x(t, x)) + \\ + (b_0 + b_1y + b_2y^2)M(t, x) + \\ + \bar{b}_0 + (M(t, x)y + N(t, x))\bar{b}_1 + \\ + (M(t, x)y + N(t, x))^2\bar{b}_2 \equiv 0. \end{aligned}$$

Последнее тождество является квадратным трехчленом по переменной y . Равенство нулю коэффициентов этого трехчлена приводит к системе (2.3).

Из утверждения теоремы и свойств отражающей функции вытекает важное для приложений замечание.

Замечание. Если в качестве первой компоненты отражающей функции системы (2.1) взять конкретную функцию $F_1(t, x)$, в которой $m(0) = 1$, $n(0) = 0$, то вторая компонента $F_2(t, x)$ этой отражающей функции будет определена лишь при совместности переопределенной системы (2.3), что налагает определенные условия на правые части системы (2.1). В частности, в силу того, что $F_2(0, x, y) = y$ должно быть

$$M(0, x) = 1, N(0, x) = 0.$$

Первое из последних двух равенств дает

$$\begin{aligned} M(0, x) = 1 = -\frac{m(t)a_1(t, x)}{a_1(-t, m(t)x + n(t))} \Big|_{t=0} = \\ = -\frac{a_1(t, x)}{a_1(-t, x)} \Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

Положим

$$a_1(t, x) = \alpha(t)f(t, x),$$

где $\alpha(t)$ – нечетная функция, а $f(t, x)$ такова, что $f(0, x) = 1$. Требование $N(0, x) = 0$ следует понимать как

$$N(0, x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\dot{m}(t)x + \dot{n}(t) + m(t)a_0(t, x) + a_0(-t, m(t)x + n(t))}{a_1(-t, m(t)x + n(t))} = 0.$$

Пусть для 2ω -периодической системы (2.1) система (2.3) совместна и для ее решений $N(t, x)$, $M(t, x)$ выполняются условия

$$M(0, x) = 1,$$

$$N(0, x) = 0.$$

Тогда начальные данные 2ω -периодических решений системы (2.1) являются решениями алгебраической системы

$$\begin{cases} m(-\omega)x + n(-\omega) = x, \\ M(-\omega, x)y + N(-\omega, x) = y. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Еругин, Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / Н.П. Еругин. – Мн. : «Наука и техника», 1979. – 744 с.

2. Арнольд, В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд. – М. : Наука. – 272 с.

3. МIRONENKO, В.И. Отражающая функция и классификация периодических дифференциальных систем / В.И. МIRONENKO // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. XX, № 9. – С. 1635–1638.

4. МIRONENKO, В.И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений / В.И. МIRONENKO. – Минск : изд-во «Университетское», 1986. – 76с.

5. МIRONENKO, В.И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем / В.И. МIRONENKO. – Мин., образов. РБ, УО «ГГУ им. Ф. Скорины». – Гомель, 2004. – 196с.

Поступила в редакцию 01.02.12.