

УДК 519.21

ИНВАРИАНТНОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СОСТОЯНИЙ СЕТИ С МНОГОРЕЖИМНЫМИ СТРАТЕГИЯМИ В СЛУЧАЕ ЗАВИСИМОСТИ ПАРАМЕТРОВ ПРОЦЕССОВ ОБСЛУЖИВАНИЯ И ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ ОТ СОСТОЯНИЯ УЗЛА

А.Р. Ерёмкина

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно

INSENSIBILITY OF STATIONARY DISTRIBUTION OF QUEUEING NETWORK WITH MULTIMODE STRATEGIES STATES WHEN PARAMETERS OF THE SERVICING AND SWITCHING PROCESSES ARE DEPENDENT ON UNIT STATE

A.R. Eryomina

Y. Kupala Grodno State University, Grodno

Рассматривается открытая сеть массового обслуживания, в которой циркулируют заявки различных типов. Однолинейные узлы могут работать в нескольких режимах. Количество работы по обслуживанию поступающего требования и количество работы по переключению режима работы прибора являются случайными величинами с произвольными функциями распределения. Параметры процессов обслуживания и переключения функционально зависят от общего состояния узла. Устанавливается инвариантность стационарного распределения состояний сети по отношению к функциональным формам распределений величин работ по обслуживанию заявок и переключению режимов при фиксированных первых моментах.

Ключевые слова: сеть массового обслуживания, многорежимное обслуживание, инвариантность.

The open queueing network with polytypic demands is considered in the article. The single line units can work in some strategies. The quantity of the work which are necessary for servicing of demand and for switching from one strategy to another are random variables with arbitrary distribution function. The parameters of servicing and switching processes are dependent on the general unit state. It was proved that stationary distribution is invariant in relation to functional form of distribution of work's quantities which are necessary for servicing of demands and switching of strategies, on condition that first moments are fast.

Keywords: queueing network, stationary distribution, multimode service, insensibility.

Введение

Большую практическую значимость имеет изучение сетей массового обслуживания, в которых обслуживающие приборы в узлах могут работать с различной интенсивностью, так как любые технические средства в процессе их эксплуатации могут полностью или частично выходить из строя, требовать замены или ремонта. В работе [1] были введены в рассмотрение сети массового обслуживания с многорежимными стратегиями, в узлах которых приборы могут функционировать в различных режимах. Каждый режим обслуживания характеризуется своими показателями, при переходе прибора в более «худший» режим его производительность уменьшается. В [2] для открытой сети с многорежимными стратегиями, несколькими типами заявок и дисциплиной обслуживания LCFS PR было найдено стационарное распределение в мультипликативной форме. Однако при этом полагалось, что время обслуживания и время пребывания прибора в каждом режиме имеют экспоненциальное распределение. На практике указанное предположение чаще всего не выполняется. Поэтому в

[3] были рассмотрены аналогичные открытые сети при условии, что время пребывания в каждом режиме имеет показательное распределение, а количество работы по обслуживанию поступающих в узел заявок – произвольное. Было установлено, что стационарное распределение вероятностей состояний указанных сетей не зависит от вида законов распределения величин работ по обслуживанию заявок в узлах, если фиксированы первые моменты этих законов.

В настоящей статье исследуются сети массового обслуживания, для которых одновременно количество работы по обслуживанию поступающего требования и количество работы по переключению с одного режима функционирования прибора на другой являются случайными величинами с произвольными функциями распределения. Причем параметры процессов обслуживания заявок и переключения режимов работы прибора в узле функционально зависят от общего состояния данного узла. Устанавливается инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний указанных сетей по отношению к виду распределений количества

работы по обслуживанию заявок и переключению режимов при фиксированных математических ожиданиях.

1 Постановка задачи

Рассматривается открытая сеть массового обслуживания, состоящая из N однолинейных узлов, в которой циркулируют заявки M типов. Поступающий в нее поток заявок – простейший с параметром λ . Каждая заявка входного потока независимо от других заявок с вероятностью $p_{0(l,u)}$ направляется в l -й узел и становится заявкой u -го типа $\left(\sum_{l=1}^N \sum_{u=1}^M p_{0(l,u)} = 1, l = \overline{1, N}, u = \overline{1, M} \right)$.

Заявка u -го типа, обслуженная в l -м узле, независимо от других заявок мгновенно с вероятностью $p_{(l,u)(k,v)}$ направляется в k -й узел и становится заявкой типа v , $u = \overline{1, M}$, а с вероятностью $p_{(l,u)0}$ покидает сеть

$$\left(\sum_{k=1}^N \sum_{v=1}^M p_{(l,u)(k,v)} + p_{(l,u)0} = 1, l, k = \overline{1, N}, u, v = \overline{1, M} \right).$$

Дисциплина обслуживания заявок прибором – LCFS PR (заявка, поступающая в l -й узел, вытесняет заявку с прибора и начинает обслуживаться, а вытесненная заявка становится первой в очереди на обслуживание). Таким образом, поступающие в узел заявки имеют абсолютный приоритет. Нумерация заявок в очереди на каждый узел осуществляется от конца очереди к прибору.

В l -м узле находится единственный прибор, который может работать в $r_l + 1$ режимах $0, 1, \dots, r_l$, $l = \overline{1, N}$. По истечении времени пребывания в режиме прибор переходит в другой режим мгновенно, при этом число заявок в узле не меняется.

Состояние сети в момент времени t характеризуется вектором $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$, где состояние l -го узла в момент времени t есть вектор

$$x_l(t) = (\bar{x}_l(t), j_l(t)) = (x_{l1}(t), x_{l2}(t), \dots, x_{l,n(l)}(t), j_l(t)),$$

$x_{l1}(t)$ – тип заявки, стоящей последней в очереди на обслуживание в l -м узле в момент времени t , $x_{l2}(t)$ – тип заявки, стоящей предпоследней в очереди на обслуживание в l -м узле в момент времени t и т. д., $x_{l,n(l)}(t)$ – тип заявки, стоящей первой в очереди на обслуживание в l -м узле в момент времени t , $x_{l,n(l)}(t)$ – тип заявки, находящейся на обслуживании в l -м узле в момент времени t , $j_l(t)$ – номер режима, в котором работает прибор в l -м узле в момент времени t . Процесс $x(t)$ обладает пространством состояний

$$X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_N,$$

где

$$X_l = \{(0, j_l), (x_{l1}, j_l), (x_{l1}, x_{l2}, j_l), \dots; x_{lk} = \overline{1, M}, k = 1, 2, \dots; j_l = \overline{0, r_l}\}.$$

Будем использовать следующие операторы:

$$T_u^+(\bar{x}_l) = T_u^+(x_{l1}, \dots, x_{l,n(l)}) = (x_{l1}, \dots, x_{l,n(l)}, u),$$

$$T^-(\bar{x}_l) = T^-(x_{l1}, \dots, x_{l,n(l)}) = (x_{l1}, \dots, x_{l,n(l)-1}),$$

$$T_{(l,u)}^+(x) = T_{(l,u)}^+(x_1, \dots, x_N) = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N),$$

$$\text{где } \tilde{x}_k = x_k \text{ при } k \neq l, \tilde{x}_l = (T_u^+(\bar{x}_l), j_l),$$

$$T_l^-(x) = T_l^-(x_1, \dots, x_N) = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N),$$

$$\text{где } \tilde{x}_k = x_k \text{ при } k \neq l, \tilde{x}_l = (T^-(\bar{x}_l), j_l),$$

$$R_l^{j_l+1}(x) = R_l^{j_l+1}(x_1, \dots, x_N) = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N),$$

$$\text{где } \tilde{x}_k = x_k \text{ при } k \neq l, \tilde{x}_l = (\bar{x}_l, j_l + 1),$$

$$R_l^{j_l-1}(x) = R_l^{j_l-1}(x_1, \dots, x_N) = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N),$$

$$\text{где } \tilde{x}_k = x_k \text{ при } k \neq l, \tilde{x}_l = (\bar{x}_l, j_l - 1),$$

$$l = \overline{1, N}, u = \overline{1, M}.$$

Параметры процессов обслуживания заявок и переключения режимов работы приборов в узлах функционально зависят от общего состояния данных узлов, а именно: количество работы, необходимое для перехода прибора l -го узла из основного (нулевого) режима в режим 1, является случайной величиной с произвольной функцией распределения $\Phi_l(0, \tilde{u})$ и математическим ожиданием $\eta_l(0)$. При этом, если в момент времени t состояние узла есть вектор $(\bar{x}_l, 0)$, то указанный переход выполняется со скоростью $v_l(\bar{x}_l, 0)$.

Для состояния $(\bar{x}_l, j_l)$, у которого $1 \leq j_l \leq r_l - 1$, количество работы, необходимое для изменения режима (на $j_l - 1$ или $j_l + 1$), также является случайной величиной с произвольной функцией распределения $\Phi_l(j_l, \tilde{u})$ и математическим ожиданием $\eta_l(j_l)$. Если в момент времени t состояние узла есть $(\bar{x}_l, j_l)$, то выполнение работы по изменению режима ведется со скоростью $v_l(\bar{x}_l, j_l) + \varphi_l(\bar{x}_l, j_l)$, при этом с вероятностью $\frac{v_l(\bar{x}_l, j_l)}{v_l(\bar{x}_l, j_l) + \varphi_l(\bar{x}_l, j_l)}$ прибор l -го узла переходит в режим $j_l + 1$, а с вероятностью

$\frac{\varphi_l(\bar{x}_l, j_l)}{v_l(\bar{x}_l, j_l) + \varphi_l(\bar{x}_l, j_l)}$ – в режим $j_l - 1$. Аналогично, количество работы, необходимое для перехода прибора l -го узла из режима r_l в $r_l - 1$, имеет произвольную функцию распределения $\Phi_l(r_l, \tilde{u})$ и математическое ожидание $\eta_l(r_l)$. При этом, если в момент времени t состояние узла $(\bar{x}_l, r_l)$, то выполнение указанной работы происходит со скоростью $\varphi_l(\bar{x}_l, r_l)$.

Математические ожидания всех перечисленных выше случайных величин конечны, т. е.

$$\eta_l(j_l) < +\infty, \quad j_l = \overline{0, r_l}, \quad l = \overline{1, n}.$$

Количество работы по обслуживанию заявок в l -м узле имеет произвольную функцию распределения $B_l(\bar{x}_l, \tilde{u})$, зависящую от очереди заявок $\bar{x}_l$ в этом узле, причём

$$\begin{aligned} \mu_l^{-1}(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{l,n(l)}) = \\ = \int_0^{\infty} (1 - B_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{l,n(l)}, \tilde{u})) d\tilde{u}. \end{aligned}$$

Если в момент времени t состояние l -го узла представляет собой вектор $(\bar{x}_l, j_l)$ и сразу после указанного момента в этот узел поступает заявка u -го типа, которая начинает немедленно обслуживаться, то количество работы по её обслуживанию является случайной величиной $\eta_l(T_u^+(\bar{x}_l))$ с функцией распределения $B_l(T_u^+(\bar{x}_l), \tilde{u})$ и математическим ожиданием $\tau_l(T_u^+(\bar{x}_l)) < \infty$.

Если в момент времени t состояние l -го узла есть вектор $(\bar{x}_l, j_l)$, то выполнение работы по обслуживанию ведётся со скоростью $\alpha_l(\bar{x}_l, j_l)$, т. е. зависит от состояния узла.

Будем предполагать, что матрица $(p_{(l,u)(k,v)})$, $u, v = \overline{1, M}$, $l, k = \overline{0, N}$, $p_{(0,u)(0,v)} = 0$ неприводима.

Тогда уравнение трафика

$$\varepsilon_{lu} = p_{0(l,u)} + \sum_{k=1}^N \sum_{v=1}^M \varepsilon_{kv} p_{(k,v)(l,u)}, \quad l = \overline{1, N}, \quad u = \overline{1, M} \quad (1.1)$$

имеет единственное положительное решение $(\varepsilon_{lu}; l = \overline{1, N}, u = \overline{1, M})$.

Пусть $\psi_{lk}(t)$ – количество работы, которое осталось выполнить с момента t до момента завершения обслуживания заявки, стоящей в момент времени t на k -й позиции в l -м узле, $\psi_l(t) = (\psi_{l1}(t), \psi_{l2}(t), \dots, \psi_{l,n(l)}(t))$, $(l = \overline{1, N})$. Пусть $\xi_{jl_i}(t)$ – количество работы, которое осталось выполнить с момента t для перехода прибора l -го узла из режима j_l в соседний режим, $\xi(t) = (\xi_{1,j_1(t)}(t), \xi_{2,j_2(t)}(t), \dots, \xi_{N,j_N(t)}(t))$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{lk}(t)}{\partial t} &= -\alpha_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lk}, j_l), \\ \frac{\partial \xi_{jl_i}(t)}{\partial t} &= -\left(v_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{l,n(l)}, j_l) I_{(j_l \neq j_i)} + \right. \\ &\quad \left. + \varphi_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{l,n(l)}, j_l) I_{(j_l = j_i)} \right), \end{aligned}$$

когда состояние l -го узла есть $(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{l,n(l)}, j_l)$.

В общем случае процесс $x(t)$ не является марковским, поэтому рассмотрим кусочно-линейный марковский процесс

$$\zeta(t) = (x(t), \psi(t), \xi(t)),$$

полученный путем добавления к $x(t)$ непрерывных компонент $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_N(t))$ и $\xi(t)$.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} P(x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} P\{x(t) = x\}, \\ F(x, y, z) &= F(x, y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1,n(1)}; \dots; \\ &\quad y_{N1}, y_{N2}, \dots, y_{N,n(N)}; \dots; z_{1,j_1}, \dots, z_{N,j_N}) = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} P\{x(t) = x; \psi_{l1}(t) < y_{11}, \dots, \psi_{l,n(l)}(t) < y_{l,n(l)}, \\ &\quad l = \overline{1, N}; \xi_{1,j_1(t)}(t) < z_{1,j_1}, \dots, \xi_{N,j_N(t)}(t) < z_{N,j_N}\}, \\ \mathcal{Q}_l(\bar{x}_l, j_l) &= v_l(\bar{x}_l, j_l) I_{(j_l \neq j_i)} + \varphi_l(\bar{x}_l, j_l) I_{(j_l = j_i)}, \\ l &= \overline{1, N}, \quad j_l = \overline{0, r_l}. \end{aligned}$$

2 Основной результат

В [2] был рассмотрен случай, когда $B_l(x_l, \tilde{u}) = 1 - e^{-\mu_l(x_l)\tilde{u}}$ ($\tilde{u} > 0$), т. е. $B_l(x_l, \tilde{u})$ является функцией экспоненциально распределенного времени обслуживания. Тогда $x(t)$ – марковский процесс с непрерывным временем. Установлено, что при выполнении условий

$$\begin{aligned} v_l(\bar{x}_l, j_l - 1) \mu_l(\bar{x}_l, j_l) \varphi_l(T^-(\bar{x}_l), j_l) = \\ = v_l(T^-(\bar{x}_l), j_l - 1) \mu_l(\bar{x}_l, j_l - 1) \varphi_l(\bar{x}_l, j_l), \\ l = \overline{1, N}, \quad j_l = \overline{1, r_l}, \quad n(l) \geq 1 \end{aligned} \quad (2.1)$$

и неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X} q(x) \prod_{l=1}^N \left[\lambda^{n(l)} \prod_{w=1}^{n(l)} \frac{\varepsilon_{l,x_{lw}}}{\mu_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lw}, j_l)} \times \right. \\ \left. \times \prod_{k=1}^{j_l} \frac{v_l(0, k-1)}{\varphi_l(0, k)} \right] < \infty, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$q(x) = \lambda + \sum_{l=1}^N \left(\mu_l^{-1}(\bar{x}_l, j_l) + v_l(\bar{x}_l, j_l) + \varphi_l(\bar{x}_l, j_l) \right),$$

марковский процесс $x(t)$ эргодичен, а его стационарное распределение имеет мультипликативную форму

$$P(x) = p_1(x_1) p_2(x_2) \times \dots \times p_N(x_N),$$

где

$$\begin{aligned} p_l(\bar{x}_l, j_l) &= \lambda^{n(l)} \prod_{w=1}^{n(l)} \frac{\varepsilon_{l,x_{lw}}}{\mu_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lw}, j_l)} \times \\ &\quad \times \prod_{k=1}^{j_l} \frac{v_l(0, k-1)}{\varphi_l(0, k)} p_l(0, 0), \end{aligned}$$

$\varepsilon_{l,x_{lw}}$ находятся из (1.1), а

$$\begin{aligned} p_l(0, 0) = \\ = \left(\sum_{x_l \in X_l} \lambda^{n(l)} \prod_{w=1}^{n(l)} \frac{\varepsilon_{l,x_{lw}}}{\mu_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lw}, j_l)} \prod_{k=1}^{j_l} \frac{v_l(0, k-1)}{\varphi_l(0, k)} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Для описанных выше сетей, в случае, когда количество работы по обслуживанию поступившей

в узел заявки имеет произвольную функцию распределения $B_l(\bar{x}_l, \tilde{u})$, а количество работы, необходимое для изменения режима (на $j_l - 1$ или $j_l + 1$) – произвольную функцию распределения $\Phi_l(j_l, \tilde{u})$, имеет место следующая теорема.

Теорема. Если выполнены условия

$$v_l(\bar{x}_l, j_l - 1)\alpha_l(\bar{x}_l, j_l)\varphi_l(T^-(\bar{x}_l), j_l) = v_l(T^-(\bar{x}_l), j_l - 1)\alpha_l(\bar{x}_l, j_l - 1)\varphi_l(\bar{x}_l, j_l), \quad (2.3)$$

$$l = \overline{1, N}, j_l = \overline{1, r_l}, n(l) \geq 1, \\ \sum_{x \in X} q(x) \prod_{l=1}^N \left[\lambda^{n(l)} \eta_l(j_l) \prod_{w=1}^{n(l)} \frac{\varepsilon_{l, x_{lw}} \tau_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lw})}{\alpha_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lw}, j_l)} \times \right. \\ \left. \times \prod_{k=1}^{j_l} \frac{v_l(0, k-1)}{\varphi_l(0, k)} \right] < \infty, \quad (2.4)$$

где

$$q(x) = \lambda + \sum_{l=1}^N (\tau_l^{-1}(\bar{x}_l) \alpha_l(\bar{x}_l, j_l) + \eta_l^{-1}(j_l) v_l(\bar{x}_l, j_l) + \eta_l^{-1}(j_l) \varphi_l(\bar{x}_l, j_l)),$$

то процесс $\zeta(t)$ эргодичен, при этом стационарные функции распределения вероятностей состояний $F(x, y, z)$ определяются по формулам

$$F(x, y, z) = p_1(x_1) \times \dots \times p_N(x_N) \times \\ \times \prod_{l=1}^N \prod_{w=1}^{n(l)} \tau_l^{-1}(x_{l1}, \dots, x_{lw}) \times \\ \times \int_0^{y_{lw}} (1 - B_l(x_{l1}, \dots, x_{lw}, \tilde{u})) d\tilde{u} \times \\ \times \prod_{l=1}^N \eta_l^{-1}(j_l) \int_0^{z_{lj}} (1 - \Phi_l(j_l, \tilde{u})) d\tilde{u}, \quad (2.5)$$

где

$$p_l(\bar{x}_l, j_l) = \left(\lambda^{n(l)} \eta_l(j_l) \prod_{w=1}^{n(l)} \frac{\varepsilon_{l, x_{lw}} \tau_l(x_{l1}, \dots, x_{lw})}{\alpha_l(x_{l1}, \dots, x_{lw}, j_l)} \times \right. \\ \left. \times \prod_{k=1}^{j_l} \frac{v_l(0, k-1)}{\varphi_l(0, k)} \right) p_l(0, 0), \quad (2.6)$$

$\varepsilon_{l, x_{lw}}$ находятся из (1.1), а

$$p_l(0, 0) = \left(\sum_{x_l \in X_l} \lambda^{n(l)} \eta_l(j_l) \prod_{w=1}^{n(l)} \frac{\varepsilon_{l, x_{lw}} \tau_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lw})}{\alpha_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lw}, j_l)} \times \right. \\ \left. \times \prod_{k=1}^{j_l} \frac{v_l(0, k-1)}{\varphi_l(0, k)} \right)^{-1}, \\ x \in X, l = \overline{1, N}. \quad (2.7)$$

Здесь полагается, что произведение, в котором нижний индекс больше верхнего, равно единице.

Доказательство. Пусть выполнены условия (2.1), (2.2), т. е. в случае, когда $x(t)$ – марковский процесс, существует стационарное эргодическое распределение $x(t)$, тогда и в общем

случае при выполнении условий (2.3), (2.4) существует стационарное эргодическое распределение процесса $\zeta(t)$, так как $\zeta(t)$ получается из $x(t)$ добавлением непрерывных компонент, а $\mu_l^{-1}(\bar{x}_l, j_l) = \tau_l \alpha_l^{-1}(\bar{x}_l, j_l)$. Строгое доказательство этого факта может быть проведено, если учесть, что процесс $\zeta(t)$ является регенерирующим. Функционирование сети схематично можно представить как чередование периодов, когда сеть находится в состоянии «0» (в каждом узле сети нет заявок и прибор работает в нулевом режиме), и периодов занятости сети (в противном случае). Далее доказательство сводится к применению предельной теоремы Смита для регенерирующих процессов [4, с.41], при этом учитывается, что среднее время обслуживания заявки равно среднему времени обслуживания заявки в марковском случае.

Для $F(x, y, z)$ справедлива следующая система дифференциально-разностных уравнений:

$$\lambda F(x, y, z) = \\ = \sum_{l=1}^N \alpha_l(\bar{x}_l, j_l) \left(\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y_{l, n(l)}} - \left(\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y_{l, n(l)}} \right)_{y_{l, n(l)}=0} \right) + \\ + \sum_{l=1}^N \vartheta_l(\bar{x}_l, j_l) \left(\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z_{l, j_l}} - \left(\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z_{l, j_l}} \right)_{z_{l, j_l}=0} \right) + \\ + \lambda \sum_{l=1}^N p_{0(l, x_{l, n(l)})} B_l(\bar{x}_l, y_{l, n(l)}) F(T_l^-(x), y, z) + \quad (2.8) \\ + \sum_{l=1}^N \sum_{u=1}^M \alpha_l(T_u^+(\bar{x}_l), j_l) p_{(l, u)0} \left(\frac{\partial F(T_{(l, u)}^+(x), y, z)}{\partial y_{l, n(l)+1}} \right)_{y_{l, n(l)+1}=0} + \\ + \sum_{l=1}^N \sum_{s=1}^N \sum_{u=1}^M \alpha_s(T_u^+(\bar{x}_s), j_s) p_{(s, u)(l, x_{l, n(l)})} B_l(\bar{x}_l, y_{l, n(l)}) \times \\ \times \left(\frac{\partial F(T_{(s, u)}^+(T_l^-(x)), y, z)}{\partial y_{s, n(s)+1}} \right)_{y_{s, n(s)+1}=0} + \\ + \sum_{l=1}^N \sum_{u=1}^M \alpha_l(\bar{x}_l, j_l) p_{(l, u)(l, x_{l, n(l)})} B_l(\bar{x}_l, y_{l, n(l)}) \times \\ \times \left(\frac{\partial F(T_{(l, u)}^+(T_l^-(x)), y, z)}{\partial y_{l, n(l)}} \right)_{y_{l, n(l)}=0} + \\ + \sum_{l=1}^N v_l(\bar{x}_l, j_l - 1) \Phi_l(j_l, z_{l, j_l}) \left(\frac{\partial F(R_l^{j_l-1}(x), y, z)}{\partial z_{l, j_l-1}} \right)_{z_{l, j_l-1}=0} + \\ + \sum_{l=1}^N \varphi_l(\bar{x}_l, j_l + 1) \Phi_l(j_l, z_{l, j_l}) \left(\frac{\partial F(R_l^{j_l+1}(x), y, z)}{\partial z_{l, j_l+1}} \right)_{z_{l, j_l+1}=0}, \\ x \in X.$$

Разобьем эту систему уравнений на уравнение локального баланса

$$\lambda F(x, y, z) = \sum_{l=1}^N \sum_{u=1}^M \alpha_l(T_u^+(\bar{x}_l), j_l) p_{(l, u)0} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\frac{\partial F(T_{(l,u)}^+(x), y, z)}{\partial y_{l,n(l)+1}} \right)_{y_{l,n(l)+1}=0}, \quad (2.9) \\ \alpha_l(\bar{x}_l, j_l) & \left(\left(\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y_{l,n(l)}} \right)_{y_{l,n(l)}=0} - \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y_{l,n(l)}} \right) = \\ & = \lambda p_{0(l, x_{l,n(l)})} B_l(\bar{x}_l, y_{l,n(l)}) F(T_l^-(x), y, z) + \quad (2.10) \\ & + \sum_{s=1, s \neq l}^N \sum_{u=1}^M \alpha_s(T_u^+(\bar{x}_s), j_s) p_{(s,u)(l, x_{l,n(l)})} B_l(\bar{x}_l, y_{l,n(l)}) \times \\ & \times \left(\frac{\partial F(T_{(s,u)}^+(T_l^-(x)), y, z)}{\partial y_{s,n(s)+1}} \right)_{y_{s,n(s)+1}=0} + \\ & + \sum_{u=1}^M \alpha_l(\bar{x}_l, j_l) p_{(l,u)(l, x_{l,n(l)})} B_l(\bar{x}_l, y_{l,n(l)}) \times \\ & \times \left(\frac{\partial F(T_{(l,u)}^+(T_l^-(x)), y, z)}{\partial y_{l,n(l)}} \right)_{y_{l,n(l)}=0}, \\ \vartheta_l(\bar{x}_l, j_l) & \left(\left(\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z_{l,j_l}} \right)_{z_{l,j_l}=0} - \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z_{l,j_l}} \right) = \\ & = v_l(\bar{x}_l, j_l - 1) \Phi_l(j_l, z_{l,j_l}) \times \\ & \times \left(\frac{\partial F(R_l^{j_l-1}(x), y, z)}{\partial z_{l,j_l-1}} \right)_{z_{l,j_l-1}=0} + \quad (2.11) \\ & + \varphi_l(\bar{x}_l, j_l + 1) \Phi_l(j_l, z_{l,j_l}) \left(\frac{\partial F(R_l^{j_l+1}(x), y, z)}{\partial z_{l,j_l+1}} \right)_{z_{l,j_l+1}=0}. \end{aligned}$$

Покажем, что функции распределения вероятностей $F(x, y, z)$, определенные формулами (2.5)–(2.7), являются решением уравнений (2.9)–(2.11), а, следовательно, и уравнений (2.8).

Подставим (2.5) в (2.9) и разделим обе части полученного соотношения на $\lambda F(x, y, z)$. Получим следствие уравнения трафика

$$\sum_{l=1}^N \sum_{u=1}^M \varepsilon_{lu} p_{(l,u)0} = 1 \quad [3].$$

Подставим (2.5) в (2.10), приведём подобные слагаемые и разделим обе части полученного соотношения на $\lambda B_l(\bar{x}_l, y_{l,n(l)}) F(T_l^-(x), y, z)$. Получим уравнение трафика (1.1).

Наконец, подставим (2.5) в (2.11). Учитывая (2.3), получим тождество.

Теорема доказана.

Из теоремы с учетом равенства $P(x) = F(x, +\infty, +\infty)$ вытекает следующее утверждение

Следствие. Если выполняются соотношения (2.3)–(2.4), то процесс $x(t)$ эргодичен, а его стационарное распределение $P = \{P(x), x \in X\}$ не зависит от функционального вида распределений $B_l(\bar{x}_l, \bar{y})$, $\Phi_l(k, \bar{y})$ и имеет вид

$$P(x) = p_1(x_1) p_2(x_2) \times \dots \times p_N(x_N),$$

где $p_l(x_l)$ определяются по формулам (2.6)–(2.7).

Заключение

В работе установлена инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний открытых сетей массового обслуживания с многорежимными стратегиями и разнотипными заявками относительно функций распределения величин работ, требующихся на обслуживание заявок, и величин работ, необходимых для переключения режимов функционирования приборов в узлах, когда фиксированы их математические ожидания, а параметры процессов обслуживания и переключения функционально зависят от общего состояния узла. При этом рассматривался случай, когда дисциплиной обслуживания является абсолютный приоритет поступающего требования с дообслуживанием вытесненной с прибора заявки, а обслуживание имеет не «временную», а так называемую «энергетическую» интерпретацию (каждая операция обслуживания характеризуется случайной величиной работы, которую необходимо выполнить).

ЛИТЕРАТУРА

1. Малинковский, Ю.В. Мультипликативность стационарного распределения в открытых сетях с многорежимными стратегиями обслуживания / Ю.В. Малинковский, А.Ю. Нуеман // Весці НАН Беларусі, 2001. – №3. – С. 129–134.
2. Летунович, Ю.Е. Стационарное распределение состояний открытой неоднородной сети с многорежимными стратегиями и немедленным обслуживанием / Ю.Е. Летунович // Современные информационные компьютерные технологии: сб. научн. ст. междунар. научно-практич. конф., Гродно, 21–24 апреля 2008 г.: в 2 ч. / ГрГУ им. Я. Купалы; редкол.: Е.А. Ровба, А.М. Кадан (отв. редактор) [и др.]. – Гродно: ГрГУ, 2008. – Ч. 2. – С. 97–99.
3. Малинковский, Ю.В. Инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний сетей с многорежимными стратегиями обслуживания, разнотипными заявками и дисциплиной обслуживания LCFS PR / Ю.В. Малинковский, А.Н. Старовойтов, А.Р. Ерёмина // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика, 2009. – №3(8). – С. 33–39.
4. Ивницкий, В.А. Теория сетей массового обслуживания / В.А. Ивницкий. – М.: Физматлит, 2004.

Поступила в редакцию 28.11.11.