УДК 512.542

ПРИЗНАКИ РАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА КОФАКТОРЫ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

И.В. Лемешев, В.С. Монахов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

THE SOLVABILITY CRITERIA FOR FINITE GROUPS WITH RESTRICTIONS ON COFACTORS OF MAXIMAL SUGROUPS

I.V. Lemeshev, V.S. Monakhov

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Устанавливается разрешимость конечной группы, у которой кофакторы всех максимальных подгрупп сверхразрешимы и удовлетворяют некоторым дополнительным ограничениям.

Ключевые слова: *конечная группа, разрешимая группа, сверхразрешимая группа, максимальная подгруппа, кофактор.*

The solvability of a finite group whose cofactors of maximal subgroups is supersolvable and satisfy some additional restrictions is established.

Keywords: *finite group, solvable group, supersoluble group, maximal subgroup, cofactor.*

Введение

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Терминология и обозначения соответствуют [1], [2]. В частности, если H – подгруппа группы G, то $\mathrm{Core}_G H = \bigcap_{x\in G} x^{-1}Hx$ – ее ядро [1, глава 3.4], которое является наибольшей нормальной в G подгруппой, содержащейся в H, а $H/\mathrm{Core}_G H = \mathrm{Cof}_G H$ – кофактор подгруппы H в группе G. Группу, содержащую максимальную подгруппу с единичным ядром, называют примитивной. В примитивной группе максимальную подгруппу с единичным ядром Гашюц [3] предложил называть примитиватором. Общие свойства примитивных групп подробно описаны в [1, глава 4.6], [3].

Если A и B – подгруппы группы G, $G = AB$ и $A \cap B = 1$, то подгруппа B называется дополнением к подгруппе A в группе G. Группа, в которой все подгруппы дополняемы, называется вполне факторизуемой. Конечные вполне факторизуемые группы исследовал Ф. Холл [4], в частности, он установил, что *группа вполне факторизуема тогда и только тогда, когда она сверхразрешима и все ее силовские подгруппы элементарные абелевы.*

Группа, в которой каждая субнормальная подгруппа нормальна, называется t-группой. Структуру разрешимых t-групп описал Гашюц [5], в частности, он доказал, что *разрешимая t-группа сверхразрешима и каждая ее подгруппа является t-группой.*

Сринивасан [6] рассмотрел группы, в которых нормальны максимальные подгруппы из силовских подгрупп. Уолл [7] предложил называть их MNP-группами. Ясно, что нильпотентные группы являются MNP-группами. Поэтому MNP-группы расположены между нильпотентными группами и сверхразрешимыми группами. Кроме того, MNP-*группа сверхразрешима и каждая ее силовская подгруппа либо нормальна, либо циклическая.*

В 1957 году Р. Бэр получил следующий результат.

***Теорема* A.** [8]. *Если группа G примитивна и все ее примитиваторы нильпотентны, то G разрешима.*

В 2009 году М. Асаад развил этот результат Бэра.

***Теорема* B.** *Примитивная группа G разрешима в следующих случаях:*

1) *каждый примитиватор является* MNP-*группой* [9, теорема 1.2];

2) *каждый примитиватор является разрешимой t-группой* [9, теорема 1.3(a)];

3) *в каждом примитиваторе все силовские подгруппы циклические* [9, теорема 1.3(c)].

Заметим, что в ситуациях 1)–3) теоремы B примитиваторы являются сверхразрешимыми подгруппами. Но заменить нильпотентность в теореме A на сверхразрешимость в общем случае нельзя. Примером служит неразрешимая примитивная группа $PGL(2,7)$.

Пример. В системе компьютерной алгебры GAP [10] под номером 208 в библиотеке SmallGroups перечислены все свойства группы $PGL(2,7)$. В частности, она содержит 58 максимальных подгрупп: одну подгруппу $PSL(2,7)$; двадцать восемь подгрупп, изоморфных диэдральной группе $[Z_3]E_4 = [Z_6]Z_2$ порядка 12; двадцать одну подгруппу, изоморфную диэдральной группе порядка 16; восемь подгрупп, изоморфных группе $[[Z_7]Z_3]Z_2$.

Все максимальные в $PGL(2,7)$ подгруппы, за исключением нормальной подгруппы $PSL(2,7)$, сверхразрешимы и имеют единичные ядра. Поэтому группа $PGL(2,7)$ примитивна и все ее примитиваторы сверхразрешимы. Силовские подгруппы из примитиваторов либо имеют нечетные простые порядки, либо изоморфны элементарной абелевой группе порядка 4 или группе диэдра порядка 16. Диэдральная группа порядка 12 является t-группой и вполне факторизуемой группой, но не будет MNP-группой. Диэдральная группа порядка 16 будет MNP-группой, но не будет t-группой и не будет вполне факторизуемой группой. Группа $[[Z_7]Z_3]Z_2$ является t-группой, вполне факторизуемой группой и MNP-группой.

Если M – максимальная подгруппа группы G, то фактор-группа $G/\mathrm{Core}_G M$ будет примитивной группой, а кофактор $M/\mathrm{Core}_G M$ будет примитиватором в группе $G/\mathrm{Core}_G M$. Кроме того, пересечение ядер максимальных подгрупп совпадает с подгруппой Фраттини группы. Поэтому из теоремы А вытекает разрешимость группы с нильпотентными кофакторами максимальных подгрупп. Из теоремы В получаем разрешимость группы при условии, что кофакторы максимальных подгрупп являются группами, перечисленными в пунктах 1–3 этой теоремы.

В настоящей работе развивается данное направление. Без использования классификации конечных простых групп устанавливается разрешимость группы, в которой кофакторы максимальных подгрупп: 1) либо имеют нечетные порядки, либо вполне факторизуемы, либо являются разрешимыми t-группами; 2) либо имеют нечетные порядки, либо являются MNP-группами, либо группами, у которых все силовские подгруппы циклические. Из этих результатов выводится ряд следствий, которые также являются новыми в теории групп. Кроме того, теоремы А и В являются частными случаями наших теорем.

1 Вспомогательные результаты

Для группы G множество всех простых делителей ее порядка обозначается через $\pi(G)$. Запись $H \le G$ означает, что H – подгруппа группы G. Через G', $F(G)$ и $\Phi(G)$ обозначаются коммутант, подгруппы Фиттинга и Фраттини группы G. Группа с нормальной силовской p-подгруппой называется p-замкнутой, а группа с нормальной p'-холловой подгруппой называется p-нильпотентной. Группа, которая одновременно p-замкнута и p-нильпотентна, называется p-разложимой. Запись $[A]B$ означает полупрямое произведение с нормальной подгруппой A. Наибольшая разрешимая нормальная подгруппа группы G обозначается через $S(G)$.

***Лемма* 1.1.**

1. *Если* K *и* H *– подгруппы группы* G *и* $K \subseteq H$, *то* $Core_G K \subseteq Core_H K$.

2. *Пусть* N *– нормальная подгруппа группы* G, H *– подгруппа из* G *и* $N \subseteq H$. *Тогда* $N \subseteq Core_G H$ *и*

$$Core_{G/N}(H/N) = (Core_G H)/N.$$

3. *Если* N *– нормальная подгруппа группы* G *и* H *– подгруппа из* G, *то*

$$(Core_G H)N \subseteq Core_G(HN).$$

4. *Пусть* H *и* N *– подгруппы группы* G, N *нормальна в* G *и* $N \subseteq H$. *Тогда*

$$\mathrm{Cof}_{G/N} H/N \simeq \mathrm{Cof}_G H.$$

Доказательство. 1. Так как $\mathrm{Core}_G K$ – наибольшая нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в K, то

$$\mathrm{Core}_G K \subseteq K \subseteq H$$

и, кроме того, $\mathrm{Core}_G K$ – нормальная в H подгруппа. Но $\mathrm{Core}_H K$ – наибольшая нормальная в H подгруппа, содержащаяся в K, поэтому

$$\mathrm{Core}_G K \subseteq \mathrm{Core}_H K.$$

2. Ясно, что $N \subseteq \mathrm{Core}_G H$ и $\mathrm{Core}_G H/N$ – нормальная в G/N подгруппа, содержащаяся в H/N, поэтому

$$\mathrm{Core}_G H/N \subseteq \mathrm{Core}_{G/N}(H/N).$$

С другой стороны, пусть

$$\mathrm{Core}_{G/N}(H/N) = K/N.$$

Так как подгруппа K/N нормальна в G/N, то K нормальна в G и $K \subseteq H$. Поскольку $\mathrm{Core}_G H$ – наибольшая нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в H, то $K \subseteq \mathrm{Core}_G H$. Следовательно,

$$K/N = \mathrm{Core}_{G/N}(H/N) \subseteq \mathrm{Core}_G H/N.$$

Из двух включений получаем равенство.

3. Так как $\mathrm{Core}_G H$ – наибольшая нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в H и N нормальна в G, то подгруппа $(\mathrm{Core}_G H)N$ нормальна в G и

$$(\mathrm{Core}_G H)N \subseteq HN.$$

Но $\mathrm{Core}_G(HN)$ – наибольшая нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в HN, поэтому

$$(\mathrm{Core}_G H)N \subseteq \mathrm{Core}_G(HN).$$

4. Ясно, что $N \subseteq \mathrm{Core}_G H$. По определению

$$\mathrm{Cof}_G H = H/(\mathrm{Core}_G H),$$

$$\mathrm{Cof}_{G/N} H/N = (H/N)/\mathrm{Core}_{G/N}(H/N),$$

а по пункту 2 $\mathrm{Core}_{G/N}(H/N) = (\mathrm{Core}_G H)/N$. Поэтому

$$\mathrm{Cof}_G H = H/\mathrm{Core}_G H \simeq (H/N)/(\mathrm{Core}_G H/N) =$$
$$= (H/N)/(\mathrm{Core}_{G/N}(H/N)) = \mathrm{Cof}_{G/N} H/N.$$

***Лемма* 1.2.** *Зафиксируем простое число p. Группа G p-замкнута тогда и только тогда, когда кофактор каждой ее максимальной подгруппы является p'-группой.*

Доказательство. Если группа G p-замкнута, то каждая ее максимальная подгруппа M будет p-замкнутой и, очевидно, силовская p-подгруппа из M будет нормальной в группе G. Поэтому кофактор подгруппы M будет p'-группой.

Обратно, пусть кофактор каждой максимальной подгруппы группы G является p'-группой. Предположим, что силовская p-подгруппа P группы G не является нормальной в G. Тогда подгруппа $N_G(P)\Phi(G)$ будет собственной в группе G. Пусть H – максимальная подгруппа группы G, содержащая подгруппу $N_G(P)\Phi(G)$. По условию фактор-группа $H/\mathrm{Core}_G H$ является p'-группой, поэтому подгруппа P содержится в $\mathrm{Core}_G H$. По лемме Фраттини

$$G = N_G(P)\mathrm{Core}_G H \subseteq H,$$

противоречие. Поэтому допущение неверно и силовская p-подгруппа P группы G является нормальной в G.

***Лемма* 1.3.** *Пусть G – группа, у которой все силовские подгруппы циклические. Тогда:*

1) *если H – подгруппа группы G, то в H все силовские подгруппы циклические*;

2) *если N – нормальная подгруппа группы G, то в G/N все силовские подгруппы циклические*;

3) *если H и K – подгруппы группы G, K нормальна в G и $|H|$ делит $|K|$, то $H \subseteq K$*;

4) *существует нормальная циклическая холлова подгруппа N такая, что фактор-группа G/N циклическая;*

5) *G сверхразрешима.*

Доказательство. Утверждения 1 и 2 вытекают из свойств [1, 1.65] силовских подгрупп.

3. По условию для каждого $p \in \pi(K)$ порядок силовской p-подгруппы из H делит порядок силовской p-подгруппы из K. Произведение HK является подгруппой группы G. Согласно [11, VI.4.7] существуют силовские p-подгруппы H_p, K_p, $(HK)_p$ из H, K и HK соответственно такие, что $H_pK_p = (HK)_p$. Из [1, с. 63] следует, что $H_p \subseteq K_p$, поэтому $H \subseteq K$.

4–5. Это теорема IV.2.11 [11].

Говорят, что подгруппа H из группы G является пронормальной в G, если для каждого $x \in G$ подгруппы H и H^x сопряжены в $< H, H^x >$.

***Лемма* 1.4.**

1. *Если G – разрешимая t-группа, то G сверхразрешима и каждая ее подгруппа является разрешимой t-группой.*

2. *Группа G будет разрешимой t-группой тогда и только тогда, когда каждая примарная подгруппа из G пронормальна в G.*

3. *Если в группе G все силовские подгруппы циклические, то G является t-группой.*

Доказательство. 1–2. Утверждения доказаны в [5], [12].

3. Предположим, что утверждение неверно и пусть G – контрпример минимального порядка. Тогда в G существует субнормальная подгруппа H, которая не является нормальной подгруппой группы G. Согласно лемме 1.3 группа G сверхразрешима, поэтому минимальная нормальная подгруппа N группы G имеет простой порядок. Пусть $|N| = p$. Так как $|G/N| < |G|$ и HN/N субнормальна в G/N, то HN нормальна в G по индукции. Если $HN = H$, то H нормальна в G и утверждение справедливо. Если $HN \neq H$, то $H \cap N = 1$ и H нормальна в HN, поскольку она субнормальна в HN и максимальна. Теперь $HN = H \times N$. Из цикличности силовской p-подгруппы группы G следует, что H является p'-подгруппой. Теперь H характеристична в $H \times N$ и нормальна в G. Лемма доказана.

Существенно используются в доказательствах следующие три результата о дополнениях.

***Лемма* 1.5** [11, теорема IV.2.6]. *Пусть P – силовская p-подгруппа группы G. Если $N_G(P) = C_G(P)$, то группа G p-нильпотентна.*

***Лемма* 1.6** [11, теорема IV.5.8]. *Пусть G – группа и p – простое число. Если фактор-группа $N_G(X)/C_G(X)$ является p-группой для каждой p-подгруппы X из G, то G p-нильпотентна.*

***Лемма* 1.7** [13, теорема 9]. *Пусть P – силовская p-подгруппа группы G. При $p = 2$ дополнительно предполагаем, что G является S_4-свободной группой. Если $C_G(Z(P))$ и $N_G(J(P))$ p-нильпотентны, то G p-нильпотентна.*

Нам понадобятся еще два известных результата.

***Лемма* 1.8** [11, IV.5.4]. *Если все собственные подгруппы группы G p-нильпотентны, то группа G либо p-нильпотентна, либо является бипримарной группой.*

***Лемма* 1.9** [14, теорема 2]. *Пусть G – не p-нильпотентная группа. Если группа G содержит p-разложимую максимальную подгруппу M, то в группе G нормальна либо силовская p-подгруппа из M, либо p'-холлова подгруппа из M.*

2 Кофакторы вполне факторизуемы или t-группы

***Теорема* 2.1.** *Если кофактор каждой максимальной подгруппы группы G либо имеет нечетный порядок, либо является вполне факторизуемой группой, либо разрешимой t-группой, то группа G разрешима.*

Доказательство. Пусть кофактор каждой максимальной подгруппы группы G либо имеет нечетный порядок, либо является вполне факторизуемой группой, либо разрешимой t-группой. Предположим, что G – неразрешимая группа, и воспользуемся индукцией по порядку G. По лемме 1.2 в группе имеется максимальная подгруппа, кофактор которой имеет четный порядок. Вначале докажем, что

(1) группа G не является простой.

Предположим, что G – простая группа. Тогда ядра всех максимальных подгрупп единичны и каждая максимальная подгруппа либо имеет нечетный порядок, либо является вполне факторизуемой группой, либо разрешимой t-группой. Так как вполне факторизуемые группы и разрешимые t-группы сверхразрешимы, а сверхразрешимые группы 2-нильпотентны [1, 4.51], то каждая подгруппа в группе G будет 2-нильпотентной. По лемме 1.8 группа G либо 2-нильпотентна, либо является бипримарной группой. В частности, группа G непроста, противоречие. Утверждение (1) доказано.

(2) Группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу и $S(G)=1$.

Пусть K – нетривиальная нормальная в G подгруппа и X/K – максимальная подгруппа фактор-группы G/K. Тогда X – максимальная подгруппа группы G и $K \subseteq M$. По лемме 1.1

$$\mathrm{Cof}_{G/K} X/K \simeq \mathrm{Cof}_G X,$$

поэтому у фактор-группы G/K кофактор каждой максимальной подгруппы либо имеет нечетный порядок, либо является вполне факторизуемой группой, либо разрешимой t-группой. Значит, к фактор-группе G/K можно применить индукцию, по которой G/K разрешима. Если подгруппа K разрешима, то и группа G разрешима. Поэтому можно считать, что $S(G)=1$.

Предположим, что в группе G существуют две минимальные нормальные подгруппы, пусть K_i – минимальная нормальная подгруппа группы G, $i=1,2$, $K_1 \neq K_2$. Тогда фактор-группа G/K_i разрешима, поэтому группа

$$G/K_1 \times G/K_2$$

разрешима. По [1, 2.33] группа G изоморфна подгруппе из

$$G/K_1 \times G/K_2,$$

поэтому G разрешима, противоречие. Значит допущение неверно и группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу. Утверждение (2) доказано.

(3) Окончание доказательства.

Пусть P – силовская 2-подгруппа группы G и K – минимальная нормальная подгруппа группы G. Согласно (2) и теореме Томпсона – Фейта о разрешимости групп нечетного порядка силовская 2-подгруппа $P \cap K$ из K неединична и ненормальна в G. По лемме Фраттини

$$G = KN_G(P \cap K).$$

Пусть U – максимальная в G подгруппа, содержащая $N_G(P \cap K)$. Тогда

$$G = KU,\ \mathrm{Core}_G U = 1 \text{ и подгруппа } U$$

либо является вполне факторизуемой группой, либо разрешимой t-группой.

Вначале пусть подгруппа U вполне факторизуема. По [4] подгруппа U сверхразрешима, в частности, 2-нильпотентна, и ее силовская 2-подгруппа элементарная абелева. Так как

$$N_K(P \cap K) = N_G(P \cap K) \cap K \subseteq U \cap K,$$

то подгруппа $N_K(P \cap K)$ является 2-разложимой и $P \cap K$ абелева. Поэтому

$$N_K(P \cap K) = C_K(P \cap K)$$

и подгруппа K будет 2-нильпотентной по лемме 1.5, а значит $K \subseteq S(G)$. Получили противоречие с (2).

Пусть теперь подгруппа U является разрешимой t-группой. По лемме 1.4 подгруппа U сверхразрешима, поэтому она опять 2-нильпотентна, и каждая подгруппа из U является t-группой. В частности, подгруппа $N_G(P \cap K)$ будет 2-нильпотентной. Пусть P_1 – произвольная неединичная подгруппа из $P \cap K$. Тогда P_1 субнормальна в $N_G(P \cap K)$, а поскольку подгруппа $N_G(P \cap K)$ является t-группой, то P_1 нормальна в $N_G(P \cap K)$ и существует максимальная в G подгруппа V такая, что

$$N_G(P \cap K) \subseteq N_G(P_1) \subseteq V,$$

$$G = KN_G(P \cap K) \subseteq KV,\ \mathrm{Core}_G V = 1$$

и V является либо разрешимой t-группой, либо вполне факторизуемой. В любом случае подгруппа V будет 2-нильпотентной. Из леммы 1.6 вытекает, что подгруппа K будет 2-нильпотентной. Опять получили противоречие с (2). Теорема доказана.

Согласно лемме 1.4 группа с циклическими силовскими подгруппами является разрешимой t-группой. Поэтому из теоремы 2.1 получаем

***Следствие* 2.1.** *Если кофактор каждой максимальной подгруппы группы G либо имеет нечетный порядок, либо является вполне факторизуемой группой, либо группой с циклическими силовскими подгруппами, то группа G разрешима.*

В формулировке теоремы 2.1 кофакторы максимальных подгрупп могут быть трех типов. Если убирать по одному из них, то получим три новых признака разрешимости группы. Например, справедливо

***Следствие* 2.2.** *Если кофактор каждой максимальной подгруппы группы G является вполне факторизуемой группой или разрешимой t-группой, то группа G разрешима.*

Если в формулировке теоремы 2.1 убирать по два из возможных типов, то получим также новые признаки разрешимости группы.

***Следствие* 2.3.** *Если кофактор каждой максимальной подгруппы группы G является вполне факторизуемой группой, то группа G разрешима.*

***Следствие* 2.4.** *Если кофактор каждой максимальной подгруппы группы G является разрешимой t-группой, то G разрешима.*

***Следствие* 2.5.** *Если кофактор каждой максимальной подгруппы группы G является группой с циклическими силовскими подгруппами, то группа G разрешима.*

***Следствие* 2.6.** *Если кофактор каждой максимальной подгруппы группы G имеет нечетный порядок или является группой, у которой все примарные подгруппы пронормальны, то G разрешима.*

Доказательство. Согласно лемме 1.4 группа, у которой все примарные подгруппы пронормальны, является разрешимой t-группой. Остается применить теорему 2.1.

***Следствие* 2.7.** *Если кофактор каждой максимальной подгруппы группы G является группой, у которой все примарные подгруппы пронормальны, то группа G разрешима.*

Отметим также, что утверждения 2 и 3 теоремы В являются частными случаями теоремы 2.1.

3 Кофакторы – MNP*-группы или z-группы*

Группу, у которой все силовские подгруппы циклические, называют z-группой.

***Теорема* 3.1.** *Если кофактор каждой максимальной подгруппы группы G либо имеет нечетный порядок, либо является* MNP*-группой, либо z-группой, то группа G разрешима.*

Доказательство. Пусть кофактор каждой максимальной подгруппы группы G либо имеет нечетный порядок, либо является MNP-группой, либо z-группой. По лемме 1.2 в группе G существует максимальная подгруппа, кофактор которой имеет четный порядок. Предположим, что G – неразрешимая группа, и воспользуемся индукцией по порядку группы. Вначале докажем, что

(1) группа G не является простой.

Предположим, что G – простая группа. Тогда ядра всех максимальных подгрупп единичны и каждая максимальная подгруппа либо имеет нечетный порядок, либо является MNP-группой, либо z-группой. По лемме 1.3 и [6] группы с циклическими силовскими подгруппами и MNP-группы сверхразрешимы. Поскольку сверхразрешимые группы 2-нильпотентны, то каждая собственная подгруппа в группе G 2-нильпотентна. По лемме 1.8 группа G либо 2-нильпотентна, либо является бипримарной группой, в частности, группа G непроста, противоречие. Утверждение (1) доказано.

(2) Группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу и $S(G)=1$.

Надо дословно повторить доказательство утверждения (2) теоремы 2.1 с очевидной заменой условий теоремы 2.1 на условия теоремы 3.1.

(3) Существует максимальная в G подгруппа M такая, что $\mathrm{Core}_G M=1$ и M является силовской 2-подгруппой группы G.

Пусть K – минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как K неразрешима, то по теореме Томпсона – Фейта подгруппа K имеет четный порядок. Пусть P – силовская 2-подгруппа из G. Тогда $P\cap K$ будет неединичной силовской 2-подгруппой в K и $N_G(P\cap K)$ – собственная подгруппа в группе G. Пусть M – максимальная подгруппа группы G, содержащая $N_G(P\cap K)$. По лемме Фраттини

$$G=KN_G(P\cap K),$$

поэтому $G=KM$. Если $\mathrm{Core}_G M\neq 1$, то из единственности минимальной нормальной подгруппы K следует, что

$$K\subseteq \mathrm{Core}_G M\subseteq M,$$

$$G=KM\subseteq (\mathrm{Core}_G M)M=M,$$

противоречие. Поэтому $\mathrm{Core}_G M=1$ и M либо является MNP-группой, либо z-группой. Поскольку $P\cap K$ нормальна в P, то

$$P\subseteq N_G(P\cap K)\subseteq M$$

и подгруппа P нециклическая по [11, IV.2.8]. Значит, подгруппа M является MNP-группой. Согласно [6] каждая силовская в M подгруппа либо циклическая, либо нормальна в K, поэтому P нормальна в M. Так как подгруппа M сверхразрешима, то M 2-нильпотентна, а значит M 2-разложима, $M = P \times T$, T – $2'$-холлова подгруппа из M. По лемме 1.9 либо группа G является 2-нильпотентной, либо подгруппа P нормальна в G, либо подгруппа T нормальна в G. Согласно (2) $S(G)=1$, поэтому группа G не 2-нильпотентна и подгруппа P не нормальна в G. Остается, что подгруппа T нормальна в G и $T=1$. Утверждение (3) доказано.

(4) $3 \in \pi(K) = \pi(G)$.

Согласно (3) группа $G = KP$, где P – силовская 2-подгруппа группы G и P максимальна в G. Поэтому $\pi(K)=\pi(G)$ и

$$C_G(Z(P)) = N_G(J(P)) = P.$$

Если G – $3'$-группа, то по лемме 1.7 группа G будет 2-нильпотентной, противоречие. Значит, $3 \in \pi(G) = \pi(K)$.

(5) Пусть Q – силовская 3-подгруппа из K, Если A – максимальная в G подгруппа, содержащая $N_G(Z(J(Q)))$, то A – сверхразрешимая подгруппа четного порядка и силовская 2-подгруппа в A циклическая.

Из (3) следует, что Q является силовской 3-подгруппой группы G. Так как $Z(J(Q))$ – характеристическая подгруппа группы Q, то $Z(J(Q))$ нормальна в $N_G(Q)$, поэтому

$$N_G(Q) \subseteq N_G(Z(J(Q)))$$

и по лемме Фраттини

$$G = KN_G(Q) \subseteq KN_G(Z(J(Q))).$$

Пусть A – максимальная подгруппа группы G, содержащая $N_G(Z(J(Q)))$. Тогда

$$G = KA,\ \mathrm{Core}_G A = 1,$$

$$G/K \simeq P/P \cap K \simeq A/A \cap K,$$

порядок A делится на 6 и A является MNP-группой, либо z-группой по условию, в частности, $A = A_2[A_{2'}]$ сверхразрешима, где A_2 – силовская 2-подгруппа, а $A_{2'}$ – нормальная $2'$-холлова подгруппа из A. Согласно (3) фактор-группа G/K является 2-группой, поэтому $A_{2'}$ содержится в K.

Если подгруппа A_2 не циклическая, то A будет MNP-группой и по [6] подгруппа A 2-разложима. Теперь A_2 будет силовской 2-подгруппой в G, а подгруппы P и A сопряжены между собой как нормализаторы силовских 2-подгрупп. Имеем противоречие с тем, что $|P| \neq |A|$. Значит, A_2 циклическая, а так как $G \neq K$, то $A_2 \neq 1$ и $G = KA_2$. Утверждение (5) доказано.

(6) Подгруппа Q не циклическая.

Предположим, то подгруппа Q циклическая. Тогда $Z(J(Q)) = Q$ и K – простая группа. Согласно (5) подгруппа A содержит $N_G(Q)$, A – сверхразрешимая подгруппа четного порядка и силовская 2-подгруппа в A циклическая. Но сверхразрешимая группа дисперсивна по Оре [1, 4.51], поэтому

$$N_G(Q) = P_1[Q \times N_{\{2,3\}'}],\quad P_1 = N_G(Q) \cap P$$

является циклической силовской 2-подгруппой из $N_G(Q)$, а подгруппа $N_{\{2,3\}'}$ является $\{2,3\}'$-холловой подгруппой в $N_G(Q)$. Так как G/K – 2-группа, то

$$Q \times N_{\{2,3\}'} \subseteq K \text{ и } G = KP_1.$$

Поскольку $G \neq K$, то P_1 не содержится в K. По лемме Фраттини $G = KN_G(Q)$ и $N_G(Q)$ не содержится в K.

Теперь по тождеству Дедекинда

$$N_K(Q) = K \cap N_G(Q) = (K \cap P_1)[Q \times N_{\{2,3\}'}],$$

$N_K(Q)$ – собственная подгруппа в $N_G(Q)$ и

$$|\mathrm{N}_G(Q) : N_K(Q)| = |P_1 : (K \cap P_1)| = 2^n$$

для некоторого натурального n.

По [1, 2.8] фактор-группа $N_G(Q)/C_G(Q)$ изоморфна подгруппе из группы автоморфизмов подгруппы Q. Из [11, I.4.6] получаем, что

$$|N_G(Q)/C_G(Q)| = 2^\delta,\quad \delta \in \{0,1\},$$

поэтому

$$C_G(Q) = Q \times (C_G(Q) \cap P_1)[N_{\{2,3\}'}],$$

$$|P_1 : (C_G(Q) \cap P_1)| \le 2.$$

Так как подгруппа P_1 циклическая, а $|K \cap P_1|$ делит $|C_G(Q) \cap P_1|$, то

$$K \cap P_1 \subseteq C_G(Q) \cap P_1,\quad N_K(Q) \subseteq C_G(Q),$$

$$N_K(Q) \subseteq C_G(Q) \cap K = C_K(Q),\quad N_K(Q) = C_K(Q).$$

По лемме 1.5 группа K будет 3-нильпотентной, получили противоречие с тем, что K – простая $3d$-группа. Утверждение (6) доказано.

(7) Окончание доказательства.

Согласно (6) подгруппа Q не циклическая, а подгруппа A будет MNP-группой. Из [6] следует, что

$$A = N_G(Q) = N_G(Z(J(Q))),$$

а из (5) получаем, что A – сверхразрешимая подгруппа четного порядка и силовская 2-подгруппа $P \cap A$ в A циклическая. Но сверхразрешимая группа дисперсивна по Оре [1, 4.51], поэтому

$$A = N_G(Q) = (P \cap A)[Q \times A_{\{2,3\}'}],$$

где $A_{\{2,3\}'}$ – $\{2,3\}'$-холлова подгруппа из A. Так как G/K – 2-группа, то

$$Q \times A_{\{2,3\}'} \subseteq K \text{ и } G = K(P \cap A).$$

Поскольку $G \neq K$, то $P \cap A$ не содержится в K и

$$N_K(Z(J(Q))) = K \cap A$$

будет собственной подгруппой в A. Из определения MNP-группы следует, что максимальная подгруппа P_0 из $P \cap A$ нормальна в A, следовательно,

$$A_0 = P_0 \times Q \times A_{\{2,3\}'}$$

будет 3-разложимой подгруппой индекса 2 в A. Теперь

$$N_K(Z(J(Q))) \subseteq A_0 \text{ и } N_K(Z(J(Q)))$$

будет 3-разложимой подгруппой. По лемме 1.5 группа K 3-нильпотентна, противоречие. Теорема доказана.

***Следствие* 3.1.** *Если кофактор каждой максимальной подгруппы группы G либо имеет нечетный порядок, либо является* MNP-*группой, то G разрешима.*

***Следствие* 3.2.** *Если кофактор каждой максимальной подгруппы группы G либо имеет нечетный порядок, либо является z-группой, то G разрешима.*

***Следствие* 3.3.** *Если кофактор каждой максимальной подгруппы группы G либо является* MNP*-группой, либо z-группой, то G разрешима.*

Поскольку MNP-группы охватывают все нильпотентные группы, то теорема 3.1 остается справедливой, если в условии MNP-группы заменить нильпотентными группами.

***Следствие* 3.4.** *Если кофактор каждой максимальной подгруппы группы G либо имеет нечетный порядок, либо является нильпотентной группой, либо z-группой, то G разрешима.*

***Следствие* 3.5.** *Если кофактор каждой максимальной подгруппы группы G либо имеет нечетный порядок, либо является нильпотентной группой, то G разрешима.*

***Следствие* 3.6.** *Если кофактор каждой максимальной подгруппы группы G либо является нильпотентной группой, либо z-группой, то G разрешима.*

Отметим, что теорема А является частным случаем следствий 3.4–3.6.

Приведенный пример группы $PGL(2,7)$ указывает на то, что к условиям теоремы 2.1 нельзя добавить еще нильпотентные группы, а тем более MNP-группы, а к условиям теоремы 3.1 – разрешимые t-группы или вполне факторизуемые группы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Монахов, В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.
2. *Шеметков, Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.
3. *Gaschutz, W.* Lectures of subgroups of Sylow type in finite soluble groups / W. Gaschutz // Notes on pure mathematics; № 11. Canberra, Australian National University, 1979. – 100 p.
4. *Hall, Ph.* Complemented group / Ph. Hall // J. London Math. Soc. – 1937. – Vol 12. – P. 201–204.
5. *Gaschutz, W.* Gruppen in denen das normalteilersein transitiv ist / W. Gaschutz // J. Reine Angew. Math. – 1957. – V.198. – P. 87–92.
6. *Srinivasan, S.* Two sufficient conditions for supersolvability of finite groups / S. Srinivasan // Isr. J. Math. – 1980. – Vol. 35. – P. 210–214.
7. *Wall, G.L.* Groups with maximal subgroups of Sylow subgroups normal / G.L. Wall // Isr. J. Math. – 1982. – Vol. 43. – P. 166–168.
8. *Baer, R.* Classes of finite groups and their properties / R. Baer // Illinois J. Math. – 1957. – Vol. 1. – P. 115–187.
9. *Asaad, M.* On the solvability of finite groups / M. Asaad // Commun. Algebra. – 2009. – Vol. 37. – P. 719–723.
10. *The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming*, Version 4.4.12 [Электронный ресурс]. – 2009. – Режим доступа: http://www.gap–system.org
11. *Huppert, B.* Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1967.
12. *Peng, T.A.* Finite groups with pro-normal subgroups / T.A. Peng // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – Vol. 20. – P. 232–234.
13. Glauberman, G. Subgroups of finite groups / G. Glauberman // Bull. Am. Math. Soc. – 1967. – Vol. 73. – P. 1–12.
14. *Романовский, А.В.* Группы с холловыми нормальными делителями / А.В. Романовский // В кн. : Конечные группы. Минск : Наука и техника, 1966. – С. 98–115.

Работа выполнена при поддержке Белорусского фонда фундаментальных исследований (проект Ф10Р-231).

Поступила в редакцию 11.01.12.