

ЛИТЕРАТУРА

Таким образом, применение суммирующего γ -спектрометра совпадений для анализа смеси радиоактивных изотопов позволяет селективно детектировать и определять количественное содержание Ce^{143} , Ce^{144} , Mo^{99} , J^{131} , J^{132} , Ru^{106} , Ba^{140} , La^{140} , Co^{60} , U^{235} и других радиоактивных ядер изотопов, имеющих каскадные γ -кванты.

Кроме того, с помощью указанного спектрометра можно определять количественное содержание радиоактивных изотопов, распадающихся с излучением позитрона и последующей эмиссией γ -кванта (например, Na^{22} , излучающего позитрон и γ -квант с энергией 1,28 Мэв). При этом дискриминатор суммы настраивается на энергию 1,79 Мэв, равную сумме энергий γ -кванта (1,28 Мэв) и аннигиляционного кванта (0,51 Мэв). Описанный метод позволяет надежно определять содержание радиоактивных изотопов, имеющих γ -излучение, которое составляет 3—4% γ -излучений смеси.

Поступила в Редакцию 10/X 1964 г.



УДК 621.039.51.134

Использование P_n -приближения для описания распределения нейтронов в поглощающем стержне

И. В. Сергеев

Система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих распределение нейтронов в поглощающем стержне в P_n -приближении, преобразована в систему интегральных уравнений, более удобных для исследования. Предлагается метод решения, основанный на использовании последовательных приближений.

подавляющее большинство современных ядерных реакторов составляют гетерогенные реакторы, в которых ядерное горючее и материалы, компенсирующие избыточную реактивность, размещены в активной зоне в виде отдельных стержней. При работе реактора материалы стержней, имеющие большие сечения захвата нейтронов, сильно выгорают, причем глубина выгорания для твэлов, расположенных в центре активной зоны, и для стержней с выгорающим поглотителем может достигать 80% и более. При этом изменение коэффициента внутренней блокировки может быть настолько значительным, что пренебрежение этим изменением может привести к заметным ошибкам в определении зависимости коэффициента размножения от времени.

Определению зависимости блокировки от глубины выгорания посвящено много работ (например, [1, 2]). Для получения этой зависимости, как правило, используют различные искусственные приемы и упрощающие предположения, что сужает область применения этих формул. В настоящей работе предпринята попытка на основании строгих преобразований привести P_n -приближение нестационарного уравнения Больцмана к виду, более удобному для решения как численными методами, так и для приближенного аналитического решения (например, методом последовательных приближений).

Для простоты рассмотрим только плоский случай. За счет некоторых упрощений приведенные ниже рассуждения могут быть применены для случаев цилиндрических и сферических блоков.

Основные уравнения

Для описания поведения нейтронов в бесконечной поглощающей пластине используем односкоростное уравнение Больцмана для плот-

ности нейтронов N и уравнение выгорания:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial N}{\partial t} &= -\mu \frac{\partial N}{\partial x} - (\Sigma_c + \Sigma_s) N + \\ &+ \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^1 g(\mu', \mu) N(x, t, \mu') d\mu'; \\ \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial \Sigma_c}{\partial t} &= -\sigma_c \Sigma_c \frac{1}{2} \int_{-1}^1 N(x, t, \mu') d\mu'. \end{aligned} \right\} (1)$$

Здесь v — скорость нейтронов; $\mu = \cos \vartheta$ — косинус угла между направлением скорости и осью x ; $g(\mu', \mu)$ — вероятность того, что при столкновении направление полета нейтрона изменится на угол (ϑ, ϑ') ; остальные обозначения общеприняты. При получении системы (1) предполагали, что в системе имеется только один изотоп, сильно поглощающий нейтроны (это допущение несущественно и при желании может быть отброшено), и что величина σ_c не зависит от времени, т. е. изменением спектра нейтронов в стержне пренебрегали. Чтобы найти однозначное решение системы (1), необходимо задать начальные и граничные условия (в дальнейших рассуждениях эти условия не фигурируют, поэтому их обсуждение приводится только в конце работы).

Следуя обычной методике получения P_n -приближения [3], разложим N и g в ряды по полиномам Лежандра, ряд для N оборвем на n -м члене:

$$N_n = \sum_{k=0}^n f_k(x, t) P_k(\mu);$$

$$g(\mu, \mu') = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) c_k P_k(\cos \Phi),$$

где $\Phi = \vartheta - \vartheta'$.

После несложных преобразований вместо (1) получим систему $(n+2)$ нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial t} &= -\frac{k}{2k-1} \cdot \frac{\partial f_{k-1}}{\partial x} - \\ &- \frac{k+1}{2k+3} \cdot \frac{\partial f_{k+1}}{\partial x} - \\ &- \Sigma_c f_k - \Sigma_s f_k (1 - c_k) \\ (k=0, 1, 2, \dots, n; f_k=0 \\ &\text{при } k \geq n+1); \\ \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial \Sigma_c}{\partial t} &= -\sigma_c \Sigma_c f_0. \end{aligned} \right\} (2)$$

Введем обозначения

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_n \\ \Sigma_c \end{pmatrix}; \quad \bar{\Phi} = \begin{pmatrix} -\Sigma_c f_0 - \Sigma_s (1 - c_0) f_0 \\ \vdots \\ -\Sigma_c f_n - \Sigma_s (1 - c_n) f_n \\ -\sigma_c \Sigma_c f_0 \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} 0; & -\frac{1}{3}; & 0 \dots & 0 \\ -1; & 0; & -\frac{2}{5} \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots & & -\frac{n}{2n-1}; & 0; 0 \\ 0 \dots & 0; & & 0; 0 \end{pmatrix}$$

и заменим t новой переменной $s = vt$. Тогда (2) можно записать в векторно-матричной форме:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial s} = A \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{\Phi}. \quad (3)$$

Для дальнейшего упрощения введем вектор \bar{v} следующим образом [4]:

$$\bar{u} = B\bar{v}, \quad (4)$$

причем элементы матрицы B в общем случае могут зависеть от координат и времени. Предположим, что существует B^{-1} [непосредственное вычисление B для системы (2) подтверждает справедливость этого предположения]. Подставив (4) в (3) и умножив обе части равенства на B^{-1} , преобразуем выражение (3) к виду

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial s} = B^{-1} A B \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + B^{-1} \left(\bar{\Phi} + \frac{\partial B}{\partial x} \bar{v} - \frac{\partial B}{\partial s} \bar{v} \right).$$

Выберем B такой, чтобы она диагонализировала матрицу A :

$$B^{-1} A B = \Lambda,$$

где Λ — диагональная матрица с элементами $\lambda_{ik} = \lambda_i \delta_{ik}$. Величины λ_i являются решениями векового уравнения

$$|A - \lambda I| = 0. \quad (5)$$

Из уравнения (5) определим $(n+2)$ собственных чисел и расположим их в порядке возрастания. При нечетном n нетрудно показать, что одно из собственных чисел матрицы A равно нулю, а остальные расположены симметрично около этого значения. Зная собственные числа матрицы A , можно найти элементы

матрицы B :

$$AB = B\Lambda, \quad (6)$$

т. е.

$$\sum_{l=1}^{n+2} a_{il} b_{lk} = \lambda_k b_{ik}; \quad k = 1, 2, \dots, n+2.$$

Поскольку система (6) однородна, b_{ik} определяются с точностью до произвольного множителя. Кроме того, из уравнения (6) следует, что все b_{ik} постоянны, так как A и Λ не зависят от x и s . Следовательно,

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial s} = 0.$$

Таким образом, уравнение (3) можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial s} = \Lambda \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \Psi, \quad (7)$$

где $\Psi = B^{-1}\Phi$.

Приведение к интегральному уравнению

Уравнение (7) эквивалентно системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial v_i(x, s)}{\partial s} = \lambda_i \frac{\partial v_i(x, s)}{\partial x} + \psi_i(v_i, x, s). \quad (8)$$

Функции ψ_i являются нелинейными функциями v_i ; в данном случае нелинейность возникает из-за наличия в ψ_i произведений двух функций v_i .

Дальнейшие преобразования (8) основаны на свойствах характеристик этих уравнений [4]. В этом случае характеристиками называются линии l_i в плоскости (x, s) , которые параметрически задаются равенством

$$\omega_i(x, s) = c_i,$$

где функция ω_i удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial s} - \lambda_i \frac{\partial \omega_i}{\partial x} = 0. \quad (9)$$

Для системы (8), поскольку λ_i постоянны, характеристики определяются особенно просто:

$$\omega_i(x, s) = \lambda_i s + x = c_i.$$

Произвольная постоянная c_i находится из условия прохождения i -й характеристики через фиксированную точку (x', s') . На основании этого окончательно запишем уравнение l_i в следующей форме:

$$\lambda_i(s - s') + (x - x') = 0$$

или

$$x = x' - \lambda_i(s - s'). \quad (10)$$

Рассматривая изменение какой-либо функции f вдоль характеристики l_i и используя свойства характеристик, можно представить полную производную этой функции по s в виде

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{\partial f}{\partial s} - \lambda_i \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Отсюда следует, что всю дифференциальную часть уравнений (8) можно представить как полную производную по s вдоль l_i , что позволит преобразовать систему (8) к виду

$$\frac{dv_i}{ds} \Big|_{l_i} = \psi_i(v_i, x, s); \quad i = 1, 2, \dots, n+2. \quad (11)$$

В равенстве (11) независимые переменные x, s изменяются вдоль l_i , т. е. они связаны условием (10).

Интегрируя (11) по s от 0 до s' по характеристике l_i , окончательно получаем:

$$v_i(s', x') = v_i(0, x' + \lambda_i s') + \int_0^{s'} \psi_i[s, x' - \lambda_i(s - s')] ds; \quad (12)$$

$$i = 1, 2, \dots, n+2.$$

Таким образом, мы преобразовали систему нелинейных дифференциальных уравнений (2) к системе интегральных уравнений (12). Если решение (12) известно, то решение системы (2) можно выразить в виде линейной комбинации функций v_i по формуле (4):

$$f_i = \sum_{k=1}^{n+2} b_{ik} v_k; \quad i = 1, 2, \dots, n+2.$$

Граничные условия и методы решения

Решение уравнения (12) существует и оно единственно, если заданы начальные и граничные условия. Задание начальных условий особых трудностей не вызывает, так как в начальный момент поглощающие материалы, как правило, размещены в стержне равномерно, и компоненты вектора \bar{v} и соответственно \bar{v} при $t = 0$ находятся из статического расчета [3]. Граничные условия для четных и нечетных гармоник задаются обычным образом [3], но при этом необходимо учитывать тот факт, что поток нейтронов в реакторе существенно зависит от координат и времени. Поэтому при решении уравнений, описывающих в P_n -приближении поведение нейтронов в окружающей стержень среде, член, обозначающий источник нейтронов, надо умножить на соответствующую функцию координат и времени. С достаточной

для практических расчетов точно в качестве такого множителя можно использовать величину

$$\frac{\Phi_0(x)}{1 - \sigma_c^r \Phi_0(x) t},$$

где $\Phi_0(x)$ — начальное распределение потока нейтронов в реакторе; σ_c^r — сечение захвата в горючем.

Система (12) более удобна для исследования и решения, чем система (2). При использовании вычислительных машин систему (12), по видимому, легче запрограммировать, чем систему (2), тем более что зависимость ψ_i от v_i сравнительно несложная (квадратичная) и ψ_i не зависит непосредственно от x и s . Если необходимо иметь приближенное аналитическое решение, то, поскольку (12) является системой интегральных уравнений, удобно использовать методы последовательных приближений следующим образом.

Предположим, что нам известно решение системы (2) и соответственно (12) в начальный момент времени $t = 0$, а также при очень больших значениях времени $t \rightarrow \infty$. Обозначим эти решения $v_{i0}(x)$ и $v_{i\infty}(x)$. Отыскание этих функций не представляет значительного труда: о решении при $t = 0$ (или $s = 0$) уже говорилось ранее, а случай $t \rightarrow \infty$ (или $s \rightarrow \infty$) соответствует полному выгоранию поглощающего изотопа, что позволяет просто решить систему (2). Зная v_{i0} и $v_{i\infty}$, выберем исходное приближение в виде

$$v_i^1(s, x) = h_1(s) v_{i0}(x) + h_2(s) v_{i\infty}(x), \quad (13)$$

где $h_1(s)$ и $h_2(s)$ — неизвестные пока функции, удовлетворяющие условиям:

$$h_1(0) = h_2(\infty) = 1;$$

$$h_1(\infty) = h_2(0) = 0.$$

Если выражение (13) подставить в правую часть (12), то слева получим второе приближение: $v_i^2(s, x)$. Подберем $h_1(s)$ и $h_2(s)$ таким образом, чтобы при различных s и x $v_i^1(s, x)$ возможно меньше отличалась от $v_i^2(s, x)$. Для

облегчения такого подбора удобно задать $h_1(s)$ и $h_2(s)$ в виде явных функций s и параметров:

$$h_1(s) = \sum_{k=1}^M \exp(-\alpha_k s);$$

$$h_2(s) = 1 - \sum_{k=1}^N \exp(-\beta_k s), \quad (14)$$

где α_k, β_k — неизвестные параметры, определяемые из условия близости v_i^1 и v_i^2 , а числа M и N задаются в зависимости от конкретных условий задачи. Найденные таким образом $h_1(s)$ и $h_2(s)$ подставим в (13); используя полученное выражение, вычислим зависимость блокировки от времени.

Обычными методами [4] можно показать, что при выборе исходного приближения в виде (13) метод последовательных приближений равномерно сходится к искомому решению, специальный же выбор h_1 и h_2 позволяет ускорить сходимость и получить уже в первом приближении достаточно надежный и вместе с тем простой результат. Предложенный вид начального приближения для v_i^1, h_1 и h_2 не является единственным и может меняться в зависимости от конкретных особенностей задачи.

Автор благодарит академика АН БССР А. К. Красина за внимание к работе.

Поступила в Редакцию 9/XI 1964 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Тошинский, А. Г. Калашников. В сб. «Теория и методы расчета ядерных реакторов». Под ред. Г. И. Марчука. М., Госатомиздат, 1962, стр. 118.
2. А. Радковский. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии». Избр. докл. иностр. ученых. Т. 3. М., Атомиздат, 1959, стр. 717.
3. А. Д. Галанин. Теория ядерных реакторов на тепловых нейтронах. М., Атомиздат, 1959.
4. И. Г. Петровский. Лекции об уравнениях с частными производными. М., Физматгиз, 1961, стр. 92.

