

имеет постоянную производную  $\frac{\partial^2 B^2}{\partial z^2}$ , причем в минимуме поля производные  $\frac{\partial^2 B^2}{\partial r^2}$  и  $\frac{\partial^2 B^2}{\partial z^2}$  совпадают. Расположение точек  $r_1$ ,  $r_0$ ,  $r_2$  определяется через  $\Pi$  по формуле (23) при  $m=1$ .

Заданное поле, удовлетворяющее уравнениям (3), может быть в принципе создано двумя способами. Во-первых, можно расположить железные полюса магнитов по эквипотенциалам  $\Phi = \text{const}$ . Соответствующее расположение для поля (24) показано на рис. 2. Во-вторых, можно расположить по магнитным поверхностям  $\psi = \text{const}$  поверхностные токи  $i_\psi = \frac{c}{4\pi} B$ . Этот способ эквивалентен использованию идеально проводящих поверхностей. Физически невозможно создать бесконечно большое поле на оси  $z$ . Однако в случае поля (24) можно, например, вместо исходного выражения  $b(r) = \frac{c_1}{r} + c_2 r$  задать поле при  $z=0$  в виде

$$b(r) = \frac{c_1 r}{R_1^2 + r^2} + \frac{c_2 r}{1 + r^2/R_2^2}, \quad (26)$$

где  $R_1 < r_0 < R_2$ , причем видоизменение второго слагаемого не является принципиальным и сделано для уменьшения необходимых токов на больших радиусах. Нетрудно видеть, что при выполнении условий  $R_1^2 \ll r_0^2 \ll R_2^2$  максимумы поля в средней плоскости  $z=0$  дости-

гаются при  $r_1 \approx R_1$  и  $r_2 \approx R_2$ , а в области  $R_1 < r < R_2$  соответствующее поле имеет приблизительно те же свойства, что и поле (24).

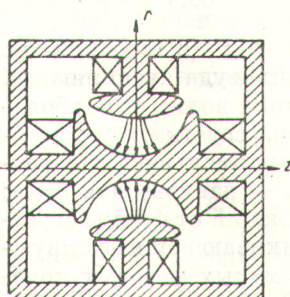


Рис. 2. Вариант радиальной пробочной ловушки с полюсными наконечниками.

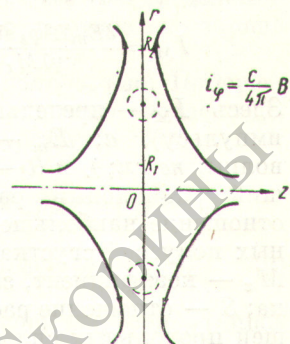


Рис. 3. Радиальная пробочная ловушка, создаваемая с помощью поверхностных токов.

Расположение поверхностных токов, необходимых для создания такого поля, схематически показано на рис. 3.

Поступила в Редакцию 28/I 1965 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. J. Andreoletti. C. r. Acad. sci., Paris, 256, 1969 (1963).
2. H. Furth, M. Rosenbluth. Phys. Fluids, 7, 764, No. 5 (1964).
3. Ю. Т. Байбородов и др. «Атомная энергия», 14, 443 (1963).
4. Л. А. Арцимович. Управляемые термоядерные реакции. М., Изд-во АН СССР, 1961.
5. H. Furth. Phys. Rev. Letters, 11, 308 (1963).

УДК 621.384.62

## О самосогласованном распределении частиц и предельном токе в линейном ускорителе

Б. И. Бондарев, А. Д. Власов

Показано, что аппроксимация ускоряемых сгустков равномерно заряженными эллипсоидами является приблизительно самосогласованной. Это еще раз подтверждает основанное на ней известное выражение для предельного тока в линейном ускорителе. Показано также, что цилиндрическая аппроксимация сгустков, не являясь самосогласованной, тем не менее приводит к аналогичному выражению для предельного тока, дающему лишь несколько увеличенные результаты.

### 1. Постановка задачи

Вопрос о предельном токе частиц, достижимом в линейном ускорителе протонов (или более

тяжелых ионов), приобрел в последние годы большое значение [1—4]. Достижимый ток ограничивается расталкивающим действием собственного заряда ускоряемых сгустков. Простейший способ учета этого действия состоит в приближенном представлении сгустков равномерно заряженными эллипсоидами — эллипсоидами вращения при фокусировке продольным магнитным полем (ранние работы Я. Б. Файнберга, Н. П. Селиванова и др.) и трехосными эллипсоидами при квадрупольной фокусировке (работа А. Д. Власова [1]). Это допущение



приводит к выражению для предельного тока, хорошо согласующемуся с опытом [1, 4] и имеющему вид [1, 2, 4]

$$I_M = \frac{3E_m R^2 \varphi_s \sin \varphi_s}{\gamma \lambda M_z} \cdot \frac{\tau S_M (1 - S_M)}{0,48}. \quad (1)$$

Здесь  $I_M$  — предельный ток (в среднем по импульсу),  $a$ ;  $E_m$  — амплитуда ускоряющей волны,  $кв/см$ ;  $\lambda$  и  $R$  — длина волны и наибольший радиальный размер сгустка,  $см$ ;  $\gamma$  — отношение наибольшей и наименьшей поперечных полуосей сгустка;  $\varphi_s$  — равновесная фаза;  $M_z$  — коэффициент, зависящий от формы сгустка;  $S$  — отношение расталкивающей и фазирующей продольных сил при малых фазовых колебаниях;  $S_M$  — значение  $S$  при максимуме величины  $S$  ( $1 - S$ )/ $M_z$ . Обычно  $S_M = 0,3 \div 0,4$ .

В работе [3] были высказаны следующие сомнения: достаточно ли хорошо предположение о равномерно заряженных эллипсоидах аппроксимирует самосогласованное распределение заряда в сгустке и соответствуют ли соотношения, получаемые при этой предпосылке, реальному поведению сгустков.

Распределение заряда в сгустке зависит от формы траекторий частиц, которая определяется не только внешним (ускоряющим и фокусирующим) полем, но и полем собственного заряда, т. е. в свою очередь зависит от распределения заряда в сгустке. В этом смысле распределение заряда действительно должно быть самосогласованным (непротиворечивым). Разумеется, имеются в виду установившиеся (стационарные) распределения.

Задача о самосогласованном распределении заряда в ускоряемых сгустках, вообще говоря, является трехмерной. Рассмотрению этой задачи и посвящена настоящая работа. Как и в работах [1—4], ниже пренебрегается полем соседних сгустков, влиянием стенок ускоряющей системы, зарядами электронов и ионов остаточного газа. Продольные оси сгустков считаются совпадающими с осью ускорителя.

## 2. Аппроксимация сгустков эллипсоидами

Покажем, что равномерное распределение заряда в пределах эллипсоида является приблизительно самосогласованным. Пусть  $X, Y, z$  — сопровождающая система координат, оси которой совмещены с осями эллипсоида, а начало совпадает с равновесной частицей. Равномерно заряженный трехосный эллипсоид — единственное распределение заряда, при кото-

ром проекции его поля на координатные оси  $X, Y, z$  не зависят одна от другой и пропорциональны одноименным координатам. Если движение частиц в ускоряющем и фокусирующем полях (в проекции на оси  $X, Y, z$ ) описывается линейными и независимыми друг от друга уравнениями, то эти уравнения останутся такими же и при учете собственного поля сгустка.

Будем приближенно считать, что продольные колебания любой из частиц описываются уравнением

$$z = z_m \cos(\Omega_1 t + \theta_z), \quad (2)$$

а поперечные колебания при квадрупольной фокусирующей системе с периодом  $L$  описываются уравнениями

$$\left. \begin{aligned} X &= x_m \Phi_x(z_s) \cos(\Omega t + \theta_x); \\ Y &= y_m \Phi_y(z_s) \cos(\Omega t + \theta_y); \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

причем частота поперечных колебаний  $\Omega$  для обеих осей  $X, Y$  одинакова и несоизмерима с частотой продольных колебаний  $\Omega_1$ . В уравнениях (3)  $z_s$  — продольная координата центра сгустка в лабораторной системе;  $\Phi_x$  и  $\Phi_y$  — периодические функции  $z_s$  с периодом  $L$ , которые считаются нормированными так, что  $\Phi_{x \max} = \Phi_{y \max} = 1$ . Как обычно, предполагается  $\Phi_y(z_s) = \Phi_x\left(z_s + \frac{L}{2}\right)$  и, следовательно,  $\Phi_{x \min} = \Phi_{y \min} = 1/\gamma$ . Уравнение (2) приблизительно верно, если размах фазовых колебаний не слишком велик. В уравнениях (3) пренебрежено зависимостью поперечных колебаний от продольных, а также известным периодическим изменением фаз поперечных колебаний с периодом  $L$  при квадрупольной фокусировке [4]. Это изменение фаз обычно невелико и убывает при  $\gamma \rightarrow 1$ .

Поскольку поперечные отклонения каждой частицы пропорциональны  $\Phi_x$  и  $\Phi_y$ , поперечные полуоси сгустка можно записать в виде

$$a_x = R\Phi_x(z_s); \quad a_y = R\Phi_y(z_s).$$

Будем считать, что  $a_x a_y = R^2 \Phi_x \Phi_y \approx R^2/\gamma = \text{const}$ ,  $a_z = \text{const}$  и  $\rho_0 = \text{const}$ , где  $\rho_0$  — плотность заряда в сгустке. Перейдем к переменным  $x = X/\Phi_x(z_s)$  и  $y = Y/\Phi_y(z_s)$ . Тогда уравнения (3) примут более простой вид:

$$x = x_m \cos(\Omega t + \theta_x); \quad y = y_m \cos(\Omega t + \theta_y). \quad (4)$$

В переменных  $x, y, z$  сгусток имеет вид равномерно заряженного эллипсоида вращения с постоянным радиусом  $R$ , длиной  $2a_z$ , плотностью



заряда  $q_0/\gamma$ . Этот эллипсоид и описывается уравнением

$$\frac{x^2 + y^2}{R^2} + \frac{z^2}{a_z^2} = 1. \quad (5)$$

Теперь задача самосогласования сводится к нахождению такого распределения частиц с траекториями (2) и (4) по начальным фазам  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$  и амплитудам  $x_m$ ,  $y_m$ ,  $z_m$ , при котором частицы заполняли бы эллипсоид с постоянной плотностью заряда  $q_0/\gamma$ .

Выделим из всех частиц, образующих сгусток, частицы с некоторым фиксированным значением  $z_m$ . Эти частицы заключены внутри вписанного в эллипсоид кругового цилиндра с длиной  $2z_m$  и радиусом  $R\sqrt{1 - (z_m/a_z)^2}$ . Вероятность нахождения любой из частиц на отрезке от  $z$  до  $z + dz$  пропорциональна  $|z|^{-1} dz \sim (z_m^2 - z^2)^{-1/2} dz$ . Пусть частицы равномерно распределены по фазам  $\theta_z$ . Тогда плотность распределения заряда частиц с данным  $z_m$  выражается с учетом осевой симметрии эллипсоида в виде

$$\frac{N(r, z_m)}{\sqrt{z_m^2 - z^2}}, \quad (6)$$

где  $N$  — некоторая функция от  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  и  $z_m$ .

Полная плотность заряда  $q(r, z) = q_0/\gamma$  выражается интегралом от частных плотностей (6) по всем амплитудам  $z_m$ , возможным в эллипсоиде (5) для данных  $r$  и  $z$ :

$$\frac{q_0}{\gamma} = \int_z^{a_z \sqrt{1 - (r/R)^2}} \frac{N(r, z_m) dz_m}{\sqrt{z_m^2 - z^2}}. \quad (7)$$

Из этого интегрального уравнения, легко приводимого к уравнению Абеля, найдем

$$N(r, z_m) = \frac{2q_0}{\pi\gamma} \frac{z_m}{\sqrt{a_z^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) - z_m^2}}. \quad (8)$$

Остается найти такое распределение частиц с данным  $z_m$  по амплитудам и фазам поперечных колебаний  $x_m$ ,  $y_m$ ,  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ , при котором радиальная зависимость плотности их заряда описывается функцией (8). Эта задача имеет бесконечное множество решений. Ниже рассмотрены только два сравнительно простых случая.

Первое решение состоит в том, что каждая из частиц в проекции на поперечную плоскость движется по окружности  $x^2 + y^2 = r_m^2$ . Это имеет место при условии  $x_m = y_m = r_m$ ,

$|\theta_x - \theta_y| = \pi/2$ , а также при равномерном распределении частиц по фазам  $\theta_x$  (а следовательно, и  $\theta_y$ ) и при условии распределения частиц по значениям  $r_m$  с плотностью заряда  $2\pi r_m N(r_m, z_m)$ .

Второе решение менее тривиально. Поперечная проекция траектории частицы согласно (4) является эллипсом с полуосями

$$a, b = \frac{1}{2} (\sqrt{x_m^2 + y_m^2 + 2x_m y_m \sin|\theta_x - \theta_y|} \pm \sqrt{x_m^2 + y_m^2 - 2x_m y_m \sin|\theta_x - \theta_y|}), \quad (9)$$

причем угол между большей из осей эллипса и осью  $x$

$$\eta = \frac{1}{2} \arctg \left[ \frac{2x_m y_m}{x_m^2 + y_m^2} \cos(\theta_x - \theta_y) \right]. \quad (10)$$

Вероятность нахождения частицы в цилиндрическом слое от  $r$  до  $r + dr$  равна  $4d(\Omega t)/2\pi = 2dr \frac{d(\Omega t)}{\pi dr}$ . Используя уравнения (4) и (9), найдем

$$\frac{2dr}{\pi dr/d(\Omega t)} = \frac{2r}{\pi \sqrt{a^2 - r^2} \sqrt{r^2 - b^2}}. \quad (11)$$

Ввиду осевой симметрии эллипсоида распределение частиц по углам  $\eta$  [см. выражение (10)] должно быть равномерным. Определим второе решение условием, предполагающим, что большая полуось  $a$  для всех частиц имеет максимальное значение, возможное при данном  $z_m$ :

$$a = R \sqrt{1 - \frac{z_m^2}{a_z^2}}. \quad (12)$$

При этом малые полуоси могут изменяться от нуля до  $a$ . Пусть распределение частиц по различным  $b$  описывается функцией  $n(b, z_m)$ . Тогда плотность заряда, образованного частицами с данным  $z_m$  при фиксированном  $r$ , выражается интегралом по всем возможным  $b$  от произведения функции (11) на  $n(b, z_m)/2\pi r$ . В то же время эта плотность выражается в виде (8), так что

$$\frac{1}{\pi^2 \sqrt{a^2 - r^2}} \int_0^r \frac{n(b, z_m) db}{\sqrt{r^2 - b^2}} = \frac{2q_0}{\pi\gamma} \frac{z_m}{\sqrt{a_z^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) - z_m^2}}.$$

Из этого интегрального уравнения, которое также легко приводится к уравнению Абеля,



с учетом выражения (12) найдем

$$n(b, z_m) = \frac{4Q_0 R}{\gamma a_z} z_m.$$

При фокусировке продольным магнитным полем возможны самосогласованные распределения, аналогичные полученным выше.

### 3. О самосогласованном решении только для частиц, находящихся на оси

В работе [3] приняты следующие допущения: 1) поперечными колебаниями частиц можно пренебречь;

2) сгусток представляет собой круговой цилиндр, в котором плотность заряда постоянна по  $r$  и зависит только от  $z$  (от фазы  $\varphi$ );

3) плотность распределения на фазовой плоскости  $\psi = \varphi - \varphi_s$ ,  $q = \dot{\varphi} - \dot{\varphi}_s$  в пределах сепаратрисы постоянна;

4) задача самосогласования формулируется только для частиц, находящихся на оси сгустка.

Второе и третье допущения настолько сильно ограничивают возможные распределения заряда в сгустке, что самосогласованное (непротиворечивое) распределение оказывается невозможным. По существу это признают и сами авторы (см. четвертое допущение).

Заметим, что плотность стационарного распределения на фазовой плоскости  $\psi$ ,  $q$  между любыми двумя близкими фазовыми траекториями постоянна [5]. Поэтому логичнее оперировать не с распределением на плоскости  $\psi$ ,  $q$ , а с распределением частиц по размахам колебаний  $\psi_m$  (см. разд. 2).

На основе указанных допущений для потенциальной функции продольных колебаний, обозначенной  $a\Phi(\psi)$ , в работе [3] было составлено уравнение

$$a\Phi(\psi) = F(\psi) + k_0 \int_{\psi_c}^{\psi_k} [V\sqrt{b^2 + (\alpha - \psi)^2} - |\alpha - \psi|] \times \frac{\sqrt{1 - \Phi(\alpha)}}{\sqrt{1 - \Phi(\psi_0)}} d\alpha. \quad (13)$$

Здесь

$$F(\psi) = 1 - \cos \psi + (\psi - \sin \psi) \operatorname{ctg} \varphi_s \quad (14)$$

является потенциальной функцией в отсутствие собственного заряда;  $\varphi_s$  и  $\varphi_s + \psi_0$  — равновесные фазы в отсутствие и при наличии заряда соответственно;  $\psi_c$  и  $\psi_k$  — крайние зна-

чения  $\psi$  для сепаратрисы;

$$b = \frac{2\pi r_0 \sqrt{1 - \beta^2}}{\beta \lambda}; \quad k_0 = \frac{Q_0 \beta \lambda}{E_m \sin \varphi_s}, \quad (15)$$

где  $r_0$  — радиус сгустка;  $\beta = v/c$  ( $v$  — скорость частицы;  $c$  — скорость света);  $Q_0$  — плотность заряда при  $\psi = \psi_0$  (в лабораторной системе координат). Величины  $\psi_0$ ,  $\psi_c$ ,  $\psi_k$  определяются уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \Phi'(\psi_0) = \Phi'(\psi_c) = 0; \quad \Phi''(\psi_0) > 0; \\ \Phi''(\psi_c) < 0; \quad \Phi(\psi_k) = \Phi(\psi_c). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Постоянная  $a$  для каждого значения тока определяется равенством

$$\Phi(\psi_k) = 1. \quad (17)$$

При этом средний импульсный ток выражается в виде

$$I = \frac{cQ_0}{\lambda} \pi r_0^2 \frac{\beta \lambda}{2\pi} \int_{\psi_c}^{\psi_k} \frac{\sqrt{1 - \Phi(\alpha)}}{\sqrt{1 - \Phi(\alpha_0)}} d\alpha. \quad (18)$$

В работе [3] уравнение (13) решается на электронно-вычислительной машине и только для частного случая:

$$\begin{aligned} E_m = 15,6 \text{ кэВ/см}; \quad \lambda = 200 \text{ см}; \quad \varphi_s = 37^\circ; \\ \beta = 0,0387; \quad r_0 = 0,5 \text{ см}. \end{aligned} \quad (19)$$

С целью получить более обзримое, хотя бы и приближенное, решение уравнения (13) представим функции  $F(\psi)$ ,  $\Phi(\psi)$  и интеграл в выражении (13) многочленами третьей степени:

$$F(\psi) \approx \frac{\psi^2}{2} + \frac{\psi^3}{6\varphi_s} = \frac{\psi_0^2}{2} + \frac{\psi_0^3}{6\varphi_s} + \left( \psi_0 + \frac{\psi_0^3}{2\varphi_s} \right) \times (\psi - \psi_0) + \left( \frac{1}{2} + \frac{\psi_0}{2\varphi_s} \right) (\psi - \psi_0)^2 + \frac{(\psi - \psi_0)^3}{6\varphi_s}; \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \Phi(\psi) \approx A_0 + A_1(\psi - \psi_0) + A_2(\psi - \psi_0)^2 + \\ + \frac{A_2}{3\varepsilon\varphi_s} (\psi - \psi_0)^3; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \int_{\psi_c}^{\psi_k} \dots d\alpha \approx B_0 + B_1(\psi - \psi_0) + B_2(\psi - \psi_0)^2 + \\ + \frac{B_3}{3\varepsilon\varphi_s} (\psi - \psi_0)^3. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь  $A_0 = \Phi(\psi_0)$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\varepsilon$ ,  $\psi_0$  — неизвестные постоянные. Функция  $F(\psi)$  в приближенном представлении (20), как и в точном выражении (14), имеет минимум при  $\psi = 0$ , максимум при  $\psi = \psi_c = -2\varphi_s$  и значение, равное максимальному, при  $\psi = \psi_k = \varphi_s$ . Подставив (21) в равенства (16), найдем  $A_1 = 0$  и установим,



что функция  $\Phi(\psi)$ , имея минимум при  $\psi = \psi_0$ , достигает максимума при  $\psi = \psi_c = \psi_0 - 2\varepsilon\varphi_s$  и значения, равного максимальному, при  $\psi = \psi_k = \psi_0 + \varepsilon\varphi_s$ . Таким образом, пространственный заряд приводит к сокращению продольных размеров сепаратрисы, пропорциональному  $\varepsilon$  (при эллипсоидальной аппроксимации сгустков они сокращаются пропорционально  $1 - S$ ). Подставив выражения (20) — (22) в (13) и (17), получим

$$\left. \begin{aligned} aA_0 &= k_0B_0 + \frac{\psi_0^2}{2} + \frac{\psi_0^3}{6\varphi_s} ; 0 = k_0B_1 + \psi_0 + \frac{\psi_0^2}{2\varphi_s} ; \\ aA_2 &= k_0B_2 + \frac{1}{2} + \frac{\psi_0}{2\varphi_s} = k_0B_3 = \frac{\varepsilon}{2} ; \\ 1 - A_0 &= \frac{4}{3} A_2 \varepsilon^2 \varphi_s^2 . \end{aligned} \right\} (23)$$

Из этих пяти уравнений нетрудно найти неизвестные  $a, A_0, A_2, \varepsilon, \psi_0$ . Затем, используя уравнения (18), (21) и (23), найдем

$$\frac{\sqrt{1 - \Phi(\psi)}}{\sqrt{1 - \Phi(\psi_0)}} = \left(1 + \frac{\psi - \psi_0}{2\varepsilon\varphi_s}\right) \sqrt{1 - \frac{\psi - \psi_0}{\varepsilon\varphi_s}} ; \quad (24)$$

$$I = \frac{2\sqrt{3}}{5} \beta c q_0 \pi r_0^2 \frac{3\varepsilon\varphi_s}{2\pi} .$$

Выразив  $q_0$  через  $k_0$  из выражения (15) и  $k_0$  через  $B_3 - B_2$  из (23), получим

$$I = \frac{3,12 E m r_0^2 \varphi_s \sin \varphi_s}{\lambda M_z} \cdot \frac{\varepsilon \left(1 - \varepsilon + \frac{\psi_0}{\varphi_s}\right)}{0,18} , \quad (25)$$

где  $M_z = B_3 - B_2$ . Равенство (25) написано в той же системе единиц, что и (1); коэффициенты в этих выражениях отличаются на 4%. В остальном эти равенства совпадают, если учесть, что  $\psi_0/\varphi_s$  мало по сравнению с  $1 - \varepsilon$ , положить  $r_0^2 = R^2/\gamma, \tau = 1, \varepsilon = 1 - S$  и заменить величину  $\varepsilon \left(1 - \varepsilon + \frac{\psi_0}{\varphi_s}\right)/M_z$  ее максимальным значением. Для вычисления коэффициентов  $B_i$ , зависящих от  $\varepsilon$ , необходимо подставить величину  $\sqrt{1 - \Phi(\psi)}$  из (24) в подынтегральное выражение в уравнении (13) или (22) и произвести интегрирование (удобнее численное) для четырех значений  $B_i$ , равных  $-2\varepsilon\varphi_s, -\varepsilon\varphi_s, 0, \varepsilon\varphi_s$ . На основании полученных четырех значений интеграла (для каждого значения  $\varepsilon$ ) и вычисляются коэффициенты  $B_i$  в выражении (22). В частности, при  $\varphi_s = 37^\circ$  и  $b = 0,4$  было найдено:

$1 - \varepsilon \approx S$ . . . . .	0	0,193	0,379	0,627	0,814	1
$M_z = B_3 - B_2$ . . . . .	0,076	0,109	0,151	0,255	0,409	1
$\varepsilon \left(1 - \varepsilon + \frac{\psi_0}{\varphi_s}\right)/M_z$	0	1,423	1,560	0,922	0,370	0

Выражение для предельного тока (1), полученное на основании эллипсоидальной аппроксимации сгустков, для случая (19) при  $R^2/\gamma = r_0^2$  и  $\tau = 1$  дает  $I_M = 127$  ма, причем  $S_M = 0,34$  и  $M_z = 0,222$ . В то же время из выражения (25), основанного на цилиндрической (несамосогласованной) аппроксимации, получается  $I_M = 210$  ма, т. е. на 65% больше, причем  $1 - \varepsilon_M = 0,3$  и  $M_z = 0,130$ . Заметим, что в работе [3] для тех же исходных параметров получено явно завышенное значение  $I_M = 0,6I_0 = 400$  ма. Вычисления, проводившиеся в работе [3] на электронной машине, не доведены до значения  $h_\varphi = 1$  (что соответствует  $S = 1, \varepsilon = 0$ ), а лишь произвольным образом экстраполированы до этого значения. Поэтому заключение, сделанное в указанной работе, о том, что ток достигает максимума при  $h_\varphi = 1$ , а пространственный заряд мало влияет на область фазовой устойчивости, необоснованно. В действительности при  $h_\varphi = 1$  ( $\varepsilon = 0$ ) область фазовой устойчивости и ток частиц обращаются в нуль.

### Заключение

Представление ускоряемых сгустков равномерно заряженными эллипсоидами, использованное при выводе выражения для предельного тока (1), является, как показано в разд. 2, приблизительно самосогласованным. Вместе с простотой и вычислительными преимуществами такого представления это позволяет считать его достаточно хорошей аппроксимацией, а выражение (1), подтверждаемое также и опытом, — достаточно обоснованным.

Разумеется, необходимо дальнейшее уточнение вида самосогласованного распределения заряда в сгустках. Однако при любом распределении заряда, отличающемся от равномерно заряженного эллипсоида, уравнения движения частиц для осей  $x, y, z$  оказываются не только нелинейными, но и связанными друг с другом. Это существенно усложняет задачу. Попытки рассматривать, например, продольное движение независимо от радиального (см. разд. 3) делают самосогласование невозможным и не могут быть успешными.

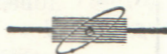
Решение задачи самосогласования не является единственным. В самом начале его принимается некоторое произвольное (лишь более или менее вероятное) допущение о распределении заряда в сгустке (см. разд. 2) или о распределении на фазовой плоскости (см. разд. 3). Но и после этого, как, например, в разд. 2, оказывается возможным не одно, а бесконеч-



ное множество самосогласованных распределений. По-видимому, эта множественность решений сохраняется и в более общем случае, когда движения по трем осям зависимы друг от друга.

В заключение отметим, что два весьма различных подхода, примененных в работах [1—3], один из которых даже исключает самосогласование (см. разд. 3), приводят к выражениям для предельного тока (1) и (25), совпадающим по форме и лишь несколько отличающимся в количественном отношении.

Поступила в Редакцию 5/IV 1965 г.



## ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. В л а с о в. Об ограничении тока частиц в линейном ускорителе с квадрупольной фокусировкой. РАИАН СССР, НТ 2460-33, 1960.
2. Теория и расчет линейных ускорителей. М., Госатомиздат, 1962, стр. 94, 114.
3. И. М. К а п ч и н с к и й, А. С. К р о н р о д. «Приборы и техника эксперимента», № 3, 26 (1964).
4. А. Д. В л а с о в. Теория линейных ускорителей. М., Атомиздат, 1965.
5. C. N i e l s e n, A. S e s s l e r. Rev. Scient. Instrum., 30, 80 (1959).

УДК 539.125.525

## Вычисление дифференциальных сечений рассеяния медленных нейтронов путем интегрирования по времени

В. Ф. Турчин

Предложен метод вычисления дифференциальных сечений рассеяния медленных нейтронов на связанных атомах путем интегрирования формулы Ван-Хове с введением под знак интеграла обрезающего фактора, что приводит к усреднению сечения по некоторой энергетической области, а это в свою очередь может быть использовано при сравнении теоретических и экспериментальных данных. Указанный метод позволяет рассчитывать дифференциальные сечения для жидкости по модели, предложенной автором ранее. Вычисления для воды и льда вблизи точки плавления обнаруживают наличие скачка в полном сечении при переходе льда в воду, что согласуется с экспериментальными данными Хайнлота.

### Обрезающий фактор

В некогерентном гауссовом приближении дважды дифференциальное сечение рассеяния медленных нейтронов на связанном атоме может быть записано в виде

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE} = \sigma_0 \frac{(\mu + 1)^2}{4\pi\mu^2} \left(\frac{E}{E_0}\right)^{1/2} e^{\varepsilon/2T} \tilde{S}(q, \varepsilon). \quad (1)$$

Здесь  $\sigma_0$  — сечение рассеяния на свободном ядре;  $\mu$  — масса атома в единицах нейтронной массы;  $E_0$  и  $E$  — энергия нейтрона до и после рассеяния;  $T$  — температура рассеивающей среды;

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= E_0 - E; \\ q &= \frac{1}{\mu} (E_0 + E - 2 \cos \theta \sqrt{E_0 E}), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $\theta$  — угол рассеяния.

Симметризованный закон рассеяния  $\tilde{S}(q, \varepsilon)$  выражается в виде интеграла Фурье

$$\tilde{S}(q, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-q\gamma(t)} \cos \varepsilon t dt \quad (3)$$

через действительную четную функцию  $\gamma(t)$ , имеющую смысл дисперсии квантовой автокорреляционной функции Ван-Хове [1], записанной через комплексное время  $t$ , действительная часть которого совпадает с реальным физическим временем, а мнимая равна  $1/2 T$  (постоянная Планка  $\hbar = 1$ ).

Для симметричного кристалла

$$\gamma_{\text{кр}}(t) = \gamma_{\text{кр}}(\infty) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_1(\omega)}{2\omega \operatorname{sh} \frac{\omega}{2T}} \cos \omega t d\omega. \quad (4)$$

Здесь

$$\gamma_{\text{кр}}(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_1(\omega)}{2\omega \operatorname{th} \frac{\omega}{2T}} d\omega, \quad (5)$$

$g_1(\omega)$  — спектр колебаний атома, который можно записать в виде [2]

$$g_1(\omega) = r \langle |\xi(\omega)|^2 \rangle g(\omega), \quad (6)$$

где  $r$  — число атомов в элементарной ячейке;  $\langle |\xi(\omega)|^2 \rangle$  — средний квадрат модуля поляризационного вектора колебаний с частотой  $\omega$ ;  $g(\omega)$  — спектр нормальных колебаний кристалла.