УДК 530.182

ОДНО- И ДВУХСОЛИТОННОЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-де ФРИЗА В РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

М.А. Князев

Белорусский национальный технический университет, Минск

ONE- AND TWO-SOLITON SOLUTIONS OF THE KORTEWEG-de VRIES EQUATION IN VARIOUS COORDINATE SYSTEMS

M.A. Knyazev

Belarusian National Technical University, Minsk

Уравнение Кортевега-де Фриза рассмотрено в двух системах координат: неподвижной и движущейся относительно первой с некоторой скоростью. Приведены одно- и двухсолитонные решения обоих уравнений и проанализированы их свойства.

Ключевые слова: *уравнение Кортевега-де Фриза, односолитонное решение, двухсолитонное решение, прямой метод Хироты.*

The Korteweg-de Vries equation is considered in the two systems of coordinates: in a rest system and in a system moving with some velocity. One- and two-soliton solutions for the both equations are presented and analyzed.

Keywords: *Korteweg-de Vries equation, one-soliton solution, two-soliton solution, Hirota direct method.*

Введение

Уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ) относится к числу наиболее изученных нелинейных уравнений в частных производных. Оно впервые было получено в теории мелкой воды для невязкой несжимаемой жидкости в однородном поле тяготения и позволяет учесть дисперсионные эффекты. В отличие от известного уравнения Буссинеска при выводе уравнения КдФ рассматриваются волны, распространяющиеся только вправо (в положительном направлении оси x). Уравнение КдФ относится к полностью интегрируемым нелинейным уравнениям, т. е. допускает построение решений, описывающих связанные состояния произвольного числа одиночных солитонов, и для него можно получить бесконечное число законов сохранения. Это уравнение применяется для описания широкого круга физических явлений при движении жидкостей, в том числе и многослойных, распространении ионных акустических волн в плазме, описании электрических цепей, распространении световых импульсов в оптоволоконных материалах и т. д. В настоящее время известны несколько типов решения этого уравнения: уединенные волны типа солитонов, связанные многосолитонные состояния, кноидальные волны и суперпозиции кноидальных волн. Существует обширная литература, посвященная уравнению КдФ (см. монографии [1]–[10]).

В настоящей работе рассмотрена задача в (1 + 1)-мерном случае. Первоначально уравнение КдФ было получено в виде [1]:

$$u_t + u_x + \frac{3\alpha}{2} u u_x + \frac{\beta}{6} u_{xxx} = 0, \qquad (0.1)$$

где $\alpha = a/h_0$; $\beta = h_0^2/l^2$; h_0 – некоторая постоянная глубина водоема (канала); l – характерная длина волны в направлении её распространения; a – характерная амплитуда волны в теории мелкой воды. Индекс у функции u обозначает частную производную по соответствующей независимой переменной: $u_t = \partial u/\partial t$ и т. п. Уравнение (0.1) записано в безразмерных переменных. Оно получено при условии $\eta_0/h_0 << 1$, где $\eta_0 = \alpha h_0$, откуда следует, что $\alpha << 1$. Это означает, что амплитуда волны мала по сравнению с глубиной канала. Поскольку в теории мелкой воды глубина канала, вообще говоря, невелика, то, можно сказать, что уравнение КдФ описывает невысокие волны в неглубоком водоеме. В тоже время учет дисперсионных эффектов и нелинейных слагаемых при выводе этого уравнения привел к тому, что задача стала существенно нелинейной, т. е. для её решения неприменима теория возмущений.

Уравнение КдФ можно записать и в другом виде. Перейдем от исходной неподвижной системы координат (x,t) к новой системе координат $(\hat{x},\hat{t})$, движущейся с некоторой характерной для теории мелкой воды скоростью. Новые координаты будут связаны с исходными соотношениями [11]:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(x - t\right),$$

$$\hat{t} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha\, t. \qquad (0.2)$$

Видно, что в безразмерных координатах характерная скорость равна единице. Теперь уравнение (0.1) примет вид (при $\alpha = \beta$)

$$u_{\hat{t}} + 6uu_{\hat{x}} + u_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}} = 0. \qquad (0.3)$$

Именно в таком виде уравнение КдФ рассматривается практически во всех работах. Несмотря на то, что уравнение КдФ, особенно в виде (0.3), исследовано весьма подробно, его существенно нелинейный характер позволяет найти новые особенности решения. В частности, в данной работе показано, что переход от одной системы координат к другой приводит к дополнительным условиям на параметры решения.

1 Односолитонное решение

Построим односолитонное решение уравнения (0.1) при помощи прямого метода Хироты [12]. Если ввести новую зависимую переменную

$$u = \sigma\frac{d^2}{dx^2}\left(\ln F\right), \qquad (1.1)$$

где $F = F\left(x,t\right)$ – неизвестная функция, σ – постоянная, которая будет определена ниже, то уравнение (0.1) можно записать в виде

$$6\frac{F_{xt}}{F} - 6\frac{F_x F_t}{F^2} + 6\frac{F_{xx}}{F} - 6\frac{F_x^2}{F^2} + \frac{9}{2}\alpha\sigma\frac{F_{xx}^2}{F^2} -$$

$$-9\alpha\sigma\frac{F_{xx}F_x^2}{F^3} + \frac{9}{2}\alpha\sigma\frac{F_x^4}{F^4} + \beta\frac{F_{xxxx}}{F} -$$

$$-4\beta\frac{F_{xxx}F_x}{F^2} - 3\beta\frac{F_{xx}^2}{F^2} + 12\beta\frac{F_x^2 F_{xx}}{F^3} - 6\beta\frac{F_x^4}{F^4} = 0. \quad (1.2)$$

Метод Хироты наиболее эффективно работает в случае так называемых билинейных уравнений. Чтобы уравнение (1.2) стало билинейным, потребуем выполнения двух следующих условий:

$$\left(12\beta - 9\alpha\sigma\right)\frac{F_x^2 F_{xx}}{F^3} = 0,$$

$$\left(\frac{9}{2}\alpha\sigma - 6\beta\right)\frac{F_x^4}{F^4} = 0.$$

Это сделать можно, поскольку мы ищем частное решение уравнения (0.1). Теперь можно определить параметр σ:

$$\sigma = \frac{4\beta}{3\alpha}. \qquad (1.3)$$

В результате уравнение (1.2) примет вид

$$6F_{xt}F - 6F_xF_t + 6F_{xx}F - 6F_x^2 +$$
$$+3\beta F_{xx}^2 + \beta F_{xxxx}F - 4\beta F_{xxx}F_x = 0. \qquad (1.4)$$

Представим функцию F в виде формального ряда теории возмущений

$$F = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3 + \ldots, \qquad (1.5)$$

где $f_i = f_i\left(x,t\right)$, $i = 1,2,3,...$ – новые неизвестные функции, а ε, вообще говоря, не малый параметр. Если подставить соотношение (1.5) в уравнение (1.4) и приравнять нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε, то в результате получим бесконечную систему линейных уравнений в частных производных. Последовательно решая данную систему, можно, в принципе, определить все функции f_i. Для наших целей понадобятся первые три уравнения этой системы:

$$6f_{1,xt} + 6f_{1,xx} + \beta f_{1,xxxx} = 0, \qquad (1.6)$$

$$6f_{2,xt} + 6f_{2,xx} + \beta f_{2,xxxx} =$$
$$= 6f_{1,x}f_{1,t} + 6f_{1,x}^2 - 3\beta f_{1,xx}^2 + 4\beta f_{1,x}f_{1,xxx}, \qquad (1.7)$$

$$6f_{3,xt} + 6f_{3,xx} + \beta f_{3,xxxx} =$$
$$= 6f_{1,x}f_{2,t} - 6f_1f_{2,xt} + 6f_{1,t}f_{2,x} - 6f_1f_{2,xx} +$$
$$+12f_{1,x}f_{2,x} - 6\beta f_{1,xx}f_{2,xx} - \beta f_1f_{2,xxx} +$$
$$+4\beta f_{1,xxx}f_{2,x} + 4\beta f_{1,x}f_{2,xxx} = 0. \qquad (1.8)$$

Для односолитонного решения потребуются уравнения (1.6) и (1.7). Представим функцию f_1 в виде

$$f_1 = \exp\left(k_1x - \omega_1 + \eta_1^{(0)}\right), \qquad (1.9)$$

где k_1, ω_1, $\eta_1^{(0)}$ – параметры решения. Параметр $\eta_1^{(0)}$ характеризует начальное положение солитона и без потери общности его можно положить равным нулю. Подставив соотношение (1.9) в уравнение (1.6), получим так называемое дисперсионное соотношение

$$\omega_1 = \frac{6k_1 + \beta k_1^3}{6}. \qquad (1.10)$$

Согласно методу Хироты для односолитонного решения правая часть уравнения (1.7) должна обращаться в нуль. Если подставить соотношение (1.9) в правую часть уравнения (1.7) и приравнять её нулю, то снова получим соотношение (1.10). Таким образом, один из параметров односолитонного решения оказывается произвольным. Обычно в качестве этого параметра выбирают k_1. Теперь односолитонное решение уравнения (0.1) можно записать в виде

$$u = \sigma\frac{d^2}{dx^2}\left[\ln\left(1 + f_1\right)\right] =$$
$$= \frac{\sigma k_1^2}{4}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{k_1x - \omega_1t + \eta_1^{(0)}}{2}\right). \qquad (1.11)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что соотношение (1.11) является решением уравнения (0.1) при условии, что выполняются соотношения (1.3) и (1.10).

Построение односолитонного решения уравнения (0.3) при помощи прямого метода Хироты подробно описано в работе [14]. Это решение имеет вид

$$u=\frac{k_1^2}{2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{k_1\hat{x}-\omega_1\hat{t}+\eta_1^{(0)}}{2}\right). \qquad (1.12)$$

Можно сделать вывод, что для каждого из уравнений (0.1) и (0.3) существует однопараметрическое семейство решений в виде одиночных солитонов. Хотя оба решения описываются одинаковыми функциями, однако коэффициенты σ и параметры решений различны. В частности, для уравнения (0.3) дисперсионное соотношение имеет вид $\omega_1=-k_1^3$. Если в решении (1.12) перейти от координат $(\hat{x},\hat{t})$ к координатам (x,t), то его можно записать в виде

$$u=\frac{k_1^2}{2}\operatorname{sech}^2\left\{\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\left[k_1x-\right.\right.$$
$$\left.\left.-k_1t-\frac{\alpha k_1}{4}\left(1+\frac{\alpha k_1^2}{6}\right)t+\eta_1^{(0)}\right]\right\}. \qquad (1.13)$$

Из сравнения соотношений (1.11) и (1.13) следует, что эти решения сдвинуты друг относительно друга по фазе и этот сдвиг зависит от времени. Это следствие как нелинейного характера уравнений, так и того, что системы координат движутся друг относительно друга.

2 Двухсолитонное решение

Чтобы построить двухсолитонное решение уравнения (0.1), представим функции f_1 и f_2 в виде:

$$f_1=\exp(\eta_1)+\exp(\eta_2),$$
$$\eta_i=k_ix-\omega_it+\eta_i^{(0)}, \qquad (2.1)$$
$$f_2=\exp(\eta_1+\eta_2+A_{12}),$$

$$\exp(A_{12})=\left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2. \qquad (2.2)$$

Подставив (2.1) в уравнение (1.6), получим дисперсионные соотношения вида

$$\omega_i=\frac{6k_i+\beta k_i^3}{6},\ i=1,2. \qquad (2.3)$$

Приравнивание нулю правой части уравнения (1.7) дает такие же соотношения. Чтобы проверить свойство обрывания ряда (1.5) для двухсолитонного решения, подставим соотношения (2.1) и (2.2) в правую часть уравнения (1.8) и приравняем её нулю. В результате с учетом соотношений (2.3) получим следующее условие

$$k_1+k_2=1. \qquad (2.4)$$

Уравнения (1.6) и (1.7) не накладывают ограничений на возможные значения параметров k_1 и k_2. Соотношение (2.4) такие ограничения вводит. Количество возможных комбинаций этих параметров по-прежнему остается бесконечным, но соотношения между ними уже не являются произвольными. Двухсолитонное решение уравнения (0.1) теперь можно представить в виде

$$u=\sigma\frac{d^2}{dx^2}(1+f_1+f_2), \qquad (2.5)$$

где используются соотношения (1.3), (2.1), (2.2) и (2.3).

Двухсолитонное решение уравнения (0.3), полученное при помощи метода Хироты, приведено в работе [4]. Оно также определяется соотношением (2.5), в котором функции f_1 и f_2 имеют вид (2.1) и (2.2), соответственно. Однако теперь $\sigma=2$, а дисперсионные соотношения записываются в виде $\omega_i=-k_i^3$, $i=1,2$. Для уравнения (0.3) не возникает условия вида (2.4). Если подставить выражения для f_1 и f_2 в правую часть уравнения (1.8) и потребовать равенства её нулю (что эквивалентно обрыванию ряда (1.5)), то тождество будет выполняться при любых k_1 и k_2. Бесконечная совокупность параметров k_1 и k_2 определяется только требованиями, следующими из соотношения (2.2).

Заключение

В работе рассмотрено уравнение КдФ в двух системах координат: лабораторной системе координат (x,t) (уравнение (0.1)) и системе координат $(\hat{x},\hat{t})$, движущейся относительно лабораторной системы с некоторой скоростью, характерной для теории мелкой воды (уравнение (0.3)). Приведены односолитонное и двухсолитонное решения обоих уравнений, полученные при помощи прямого метода Хироты. Показано, что оба типа решения имеют одинаковые функциональные зависимости, хотя дисперсионные соотношения и коэффициенты при независимых переменных различны. Характерной особенностью решений при переходе от одной системы координат к другой является появление зависящего от времени сдвига по фазе в движущейся системе координат.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уизем*, *Дж.* Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем. – Москва: Мир, 1977. – 624 с.

2. *Захаров*, *В.Е.* Теория солитонов: Метод обратной задачи / В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. – Москва: Наука, 1980. – 320 с.

3. *Лэм*, *Дж. Л.* Введение в теорию солитонов / Дж. Л. Лэм. – Москва: Мир, 1983. – 294 с.

4. *Абловиц*, *М.* Солитоны и метод обратной задачи / М. Абловиц, Х. Сигур. – Москва: Мир, 1987. – 479 с.

5. *Додд*, *Р.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. – Москва: Мир, 1988. – 694 с.

6. *Ньюэлл*, *А.* Солитоны в математике и физике / А. Ньюэлл. – Москва: Мир, 1989. – 326 с.

7. *Косевич*, *А.М.* Введение в нелинейную физическую механику / А.М. Косевич, А.С. Ковалев. – Киев: Наукова думка, 1989. – 304 с.

8. *Ablowitz*, *M.J.* Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering / M.J. Ablowitz, P.A. Clarkson. – Cambridge University Press, 1991. – 516 p.

9. *Remoissenet*, *M.* Waves called solitons, concepts and experiments / M. Remoissenet. – Berlin and New York: Springer, 1996. – 260 p.

10. *Инфельд*, *Э.* Нелинейные волны, солитоны и хаос / Э. Инфельд, Дж. Роуландс. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 480 с.

11. *Karczewska*, *A.* Remarks on existence / nonexistence of analytic solutions to higher order KdV equations / A. Karszewska, P. Rozmej // Acta Physica Polonica A. – 2019. – Vol. 136. – P. 910–915.

12. *Hirota*, *R.* Direct methods in soliton theory / R. Hirota. – Solitons. Ed. by Bullough R.K. and Caudrey P.J. – Berlin: Springer, 1980. – 392 p.

Поступила в редакцию 26.03.2020.