УДК 537.874.2

ОТРАЖЕНИЕ НОРМАЛЬНО ПАДАЮЩЕЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ОТ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ БИИЗОТРОПНОЙ СТРУКТУРЫ НА ПОДЛОЖКЕ

А.И. Толкачёв, В.Н. Капшай, А.А. Шамына

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

REFLECTION OF A NORMALLY INCIDENT ELECTROMAGNETIC WAVE FROM A PERIODIC BIISOTROPIC STRUCTURE ON A SUBSTRATE

A.I. Talkachov, V.N. Kapshai, A.A. Shamyna

F. Scorina Gomel State University

Решены задачи об отражении нормально падающей плоской циркулярно поляризованной электромагнитной волны от биизотропного слоя на отражающей подложке и об отражении от биизотропной планарной периодической структуры, находящейся на подложке. Проведен численный и графический анализ зависимостей коэффициентов отражения от толщин слоев. Выявлено, что полученные зависимости имеют периодический характер, данные периоды найдены аналитически. Определены сочетания параметров задачи, при которых коэффициенты отражения для электромагнитных волн левой и правой поляризаций совпадают.

Ключевые слова: *биизотропная среда*, *биизотропный слой*, *подложка*, *планарная периодическая структура*, *коэффициент отражения*, *матричный метод*, *рекуррентный метод*, *метод эквивалентных коэффициентов.*

Problems of reflection of a plane circularly polarized electromagnetic wave incident normally on a biisotropic layer on a reflecting substrate and reflection from a planar periodic biisotropic structure on a substrate are solved. Numerical and graphical analysis of dependences of the reflection coefficients on the thicknesses of layers is performed. The obtained dependences have been found to be periodic; these periods are found analytically. Combinations of parameters of the problem are determined at which reflection coefficients for electromagnetic waves of left and right polarizations coincide.

Keywords: *biisotropic medium*, *biisotropic layer*, *substrate*, *planar periodic structure*, *reflection coefficient*, *matrix method*, *recurrence method*, *equivalent coefficient method.*

Введение

Уже более 30 лет активно развивается область, посвящённая исследованию взаимодействия электромагнитного излучения с искусственно создаваемыми средами, которые теперь называют метаматериалами [1], [2]. В основном это киральные среды. В качестве их обобщения рассматривают биизотропные среды и, затем, как наиболее общий случай, – бианизотропные среды [3], [4]. В настоящее время существуют численные методы, позволяющие моделировать происходящие в таких средах процессы взаимодействия с электромагнитным излучением [5], [6]. Однако до сих пор наиболее ценными являются аналитические методы и результаты, поскольку они позволяют производить дальнейший анализ по различным направлениям: нахождение коэффициентов прохождения и отражения [7]–[14], мод волноводов [3], [5], моделирование процессов рассеяния [15]–[17], фотонных кристаллов [18] и т.д. Для последней цели рассматривают периодические структуры на основе биизотропных материалов [9]–[13]. Для таких сред материальные уравнения имеют вид [3]

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} + (\chi + i\alpha)\vec{H},\ \vec{B} = (\chi - i\alpha)\vec{E} + \mu\vec{H},$$

где величины $\vec{D}$ и $\vec{B}$ – векторы электрической и магнитной индукции, величины $\vec{E}$ и $\vec{H}$ – векторы электрической и магнитной напряженности, ε и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, χ и α – параметры невзаимности и киральности соответственно.

В данной работе рассмотрено решение двух взаимосвязанных задач электродинамики: задачи об отражении электромагнитной волны от биизотропного слоя на отражающей подложке и задачи об отражении от биизотропной периодической структуры, расположенной на подложке.

1 Задача об отражении от биизотропного слоя на отражающей подложке

1.1 Постановка задачи. Направим ось *Oz* вверх (рисунок 1.1).

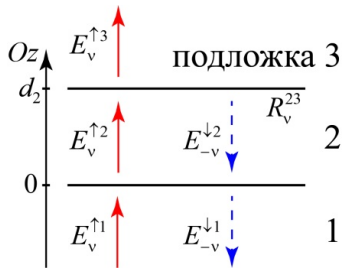

Рисунок 1.1 – Схема отражения электромагнитной волны от биизотропного слоя 2 на отражающей подложке 3

© *Толкачёв А.И.*, *Капшай В.Н.*, *Шамына А.А.*, 2020

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Пусть область $z \le 0$ заполнена биизотропной средой 1 с параметрами ε_1, μ_1, χ_1, α_1, в области $0 < z \le d$ находится биизотропный слой 2 толщины d_2 с параметрами ε_2, μ_2, χ_2, α_2, а выше него находится подложка 3 с коэффициентом отражения R_ν^{23}.

Распространяющиеся в положительном и отрицательном направлениях оси Oz в среде номер p ($p = 1, 2$) электромагнитные волны можно записать в виде

$$\vec{E}_\nu^{\uparrow p} = \left(\vec{i} + i\nu\vec{j}\right) E_\nu^{\uparrow p} \exp\left(ik_\nu^p z - i\omega t\right),$$
$$\vec{E}_{-\nu}^{\downarrow p} = \left(\vec{i} + i\nu\vec{j}\right) E_{-\nu}^{\downarrow p} \exp\left(-ik_{-\nu}^p z - i\omega t\right), \quad (1.1)$$
$$\vec{H}_\nu^{\uparrow p} = -b_\nu^p \vec{E}_\nu^{\uparrow p}, \ \vec{H}_{-\nu}^{\downarrow p} = -b_{-\nu}^p \vec{E}_{-\nu}^{\downarrow p},$$

$$k_\sigma^p = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\sqrt{\varepsilon_p\mu_p - \chi_p^{\,2}} + \sigma\alpha_p\right),$$
$$b_\sigma^p = \left(\chi_p + i\sigma\sqrt{\varepsilon_p\mu_p - \chi_p^{\,2}}\right)/\mu_p. \quad (1.2)$$

В данных выражениях символы ↑,↓ показывают направления волновых векторов (↑ – вдоль оси Oz, ↓ – против оси Oz), индекс ν – поляризация исходной волны (+1 – правая циркулярная, –1 – левая циркулярная), векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$ – базисные векторы, направленные вдоль осей Ox, Oy (они лежат в плоскости, перпендикулярной плоскости падения), k_σ^p – волновые числа ($\sigma = \pm\nu$), а b_σ^p – величины, обратные волновому сопротивлению среды, λ – длина волны падающего излучения в вакууме. Падающей на структуру и отраженной от нее волнам соответствует значение $p = 1$. Прошедшая волна имеет вид

$$\vec{E}_\nu^{\uparrow 3} = \left(\vec{i} + i\nu\vec{j}\right) E_\nu^{\uparrow 3} \exp\left(ik_\nu^3\left(z - d_2\right) - i\omega t\right),$$
$$\vec{H}_\nu^{\uparrow 3} = -b_\nu^3 \vec{E}_\nu^{\uparrow 3}.$$

При записи выражений (1.1) использовано граничное свойство биизотропных структур, доказанное в работе [19], которое гласит, что волны, сонаправленные падающей, имеют поляризацию, совпадающую с поляризацией падающей волны (т. е. ν; на всех рисунках они обозначены красным), а противонаправленные падающей – противоположную ($-\nu$; обозначены синим).

Под коэффициентом отражения будем понимать отношение амплитуд напряженностей отраженной и падающей волн в среде 1:

$$R_\nu = \frac{E_{-\nu}^{\downarrow 1}}{E_\nu^{\uparrow 1}}. \quad (1.3)$$

В общем случае это комплексная величина, содержащая информацию о разности фаз между падающей и отражённой волнами.

1.2 Решение методом многократных отражений. Рассмотрим распространение волны с учетом многократных отражений от границы раздела 12 и подложки. Данный метод применяется для расчета электромагнитных полей в структурах с небольшим количеством слоев [8], [18] и позволяет наглядно представить процесс распространения волн при падении на структуру. На рисунке 1.2 и в последующих уравнениях индексы 0, 1, 2, … слева у напряженности электрического поля указывают количество отражений волны от подложки. Запишем амплитуды напряженности отраженных от структуры волн (рисунок 1.2):

$${}_0E_{-\nu}^{\downarrow 1} = E_\nu^{\uparrow 1}\rho_\nu^{12},$$
$${}_1E_{-\nu}^{\downarrow 1} = E_\nu^{\uparrow 1}\tau_\nu^{12}\eta_\nu^2 R_\nu^{23}\eta_{-\nu}^2\tau_{-\nu}^{21},$$
$${}_2E_{-\nu}^{\downarrow 1} = E_\nu^{\uparrow 1}\tau_\nu^{12}\eta_\nu^2 R_\nu^{23}\eta_{-\nu}^2\left(\rho_{-\nu}^{21}\eta_\nu^2 R_\nu^{23}\eta_{-\nu}^2\right)\tau_{-\nu}^{21}, \quad (1.4)$$
$${}_3E_{-\nu}^{\downarrow 1} = E_\nu^{\uparrow 1}\tau_\nu^{12}\eta_\nu^2 R_\nu^{23}\eta_{-\nu}^2\left(\rho_{-\nu}^{21}\eta_\nu^2 R_\nu^{23}\eta_{-\nu}^2\right)^2\tau_{-\nu}^{21},$$
$$\ldots$$

Здесь множитель $\eta_\sigma^2 = \exp\left(ik_\sigma^2 d_2\right)$ связан с изменением фазы волны при прохождении слоя 2 толщины d_2; τ_σ^{12}, τ_σ^{21}, ρ_σ^{12}, ρ_σ^{21} – коэффициенты прохождения и отражения на границе раздела 12 соответственно [19], которые имеют вид

$$\tau_\sigma^{12} = \frac{b_\sigma^1 - b_{-\sigma}^1}{b_\sigma^2 - b_{-\sigma}^1}, \ \tau_\sigma^{21} = \frac{b_\sigma^2 - b_{-\sigma}^2}{b_\sigma^1 - b_{-\sigma}^2},$$
$$\rho_\sigma^{12} = \frac{b_\sigma^1 - b_\sigma^2}{b_\sigma^2 - b_{-\sigma}^1}, \ \rho_\sigma^{21} = \frac{b_\sigma^2 - b_\sigma^1}{b_\sigma^1 - b_{-\sigma}^2}. \quad (1.5)$$

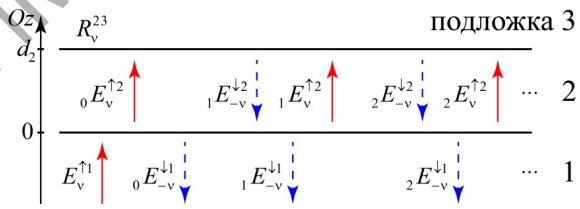

Рисунок 1.2 – Схема отражения волны от биизотропного слоя 2 на отражающей подложке 3 в методе многократных отражений

Вводя обозначение $q = R_\nu^{23}\rho_{-\nu}^{21}\eta_\nu^2\eta_{-\nu}^2$, можно получить выражение для отраженной волны $E_{-\nu}^{\downarrow 1}$ путем непосредственного сложения амплитуд многократно отраженных волн (1.4) с учетом набега фаз:

$$E_{-\nu}^{\downarrow 1} = {}_0E_{-\nu}^{\downarrow 1} + {}_1E_{-\nu}^{\downarrow 1} + {}_2E_{-\nu}^{\downarrow 1} + \ldots =$$
$$= {}_0E_{-\nu}^{\downarrow 1} + {}_1E_{-\nu}^{\downarrow 1}\left(1 + q + q^2 + \ldots\right) = {}_0E_{-\nu}^{\downarrow 1} + \frac{{}_1E_{-\nu}^{\downarrow 1}}{\left(1 - q\right)}. \quad (1.6)$$

Коэффициент отражения (1.3) от данной структуры получается равным

$$R_\nu = \frac{E_{-\nu}^{\downarrow 1}}{E_\nu^{\uparrow 1}} = \rho_\nu^{12} + \frac{R_\nu^{23}\tau_\nu^{12}\tau_{-\nu}^{21}\eta_\nu^2\eta_{-\nu}^2}{1 - R_\nu^{23}\rho_{-\nu}^{21}\eta_\nu^2\eta_{-\nu}^2}. \quad (1.7)$$

С учетом следующего соотношения для коэффициентов прохождения и отражения на границе 12 [8]:

$$\left(\rho_\nu^{12}\rho_{-\nu}^{21} - \tau_\nu^{12}\tau_{-\nu}^{21}\right)\frac{\rho_\nu^{21}}{\rho_\nu^{12}} = 1, \quad (1.8)$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

коэффициент отражения от структуры (1.7) принимает окончательный вид:

$$R_\nu = \rho_\nu^{12}\frac{1}{1-R_\nu^{23}\rho_{-\nu}^{21}\eta_\nu^2\eta_{-\nu}^2}\left(1-R_\nu^{23}\eta_\nu^2\eta_{-\nu}^2\frac{1}{\rho_\nu^{21}}\right). \quad (1.9)$$

Рассмотрим второй независимый метод получения выражения (1.9).

1.3 Решение матричным методом. Матричный метод состоит в записи граничных условий для тангенциальных составляющих векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в виде матричных уравнений при $z = 0$ и $z = d_2$ [9]. Составим такие системы уравнений для амплитуд, существующих в структуре волн (рисунок 1.1):

$$z=0:\ \begin{bmatrix}1 & 1\\ -b_\nu^1 & -b_{-\nu}^1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_\nu^{\uparrow 1}\\ E_{-\nu}^{\downarrow 1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -b_\nu^2 & -b_{-\nu}^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_\nu^{\uparrow 2}\\ E_{-\nu}^{\downarrow 2}\end{bmatrix},$$

$z = d$:

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ -b_\nu^2 & -b_{-\nu}^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\exp\left(ik_\nu^2 d_2\right) & 0\\ 0 & \exp\left(-ik_{-\nu}^2 d_2\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_\nu^{\uparrow 2}\\ E_{-\nu}^{\downarrow 2}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -b_\nu^3 & -b_{-\nu}^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_\nu^{\uparrow 3}\\ 0\end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

Соотношения (1.10) принимают более компактный вид, если ввести следующие матрицы:

$$\mathbf{E}_p=\begin{bmatrix}E_\nu^{\uparrow p}\\ E_{-\nu}^{\downarrow p}\end{bmatrix},\ \mathbf{M}_p=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -b_\nu^p & -b_{-\nu}^p\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Phi}_p=\begin{bmatrix}\eta_\nu^p & 0\\ 0 & \left(\eta_{-\nu}^p\right)^*\end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

С учётом того, что $E_{-\nu}^{\downarrow 3}=0$, выражения (1.10) можно записать в виде

$$z=0:\ \mathbf{M}_1\mathbf{E}_1=\mathbf{M}_2\mathbf{E}_2,$$
$$z=d:\ \mathbf{M}_2\mathbf{\Phi}_2\mathbf{E}_2=\mathbf{M}_3\mathbf{E}_3. \quad (1.12)$$

Здесь матрицы $\mathbf{\Phi}_p$ позволяют учесть набег фаз при прохождении биизотропного слоя. А коэффициент отражения от подложки R_ν^{23} определяется выражением

$$R_\nu^{23}=\frac{E_{-\nu}^{\downarrow 2}\left(\eta_{-\nu}^2\right)^*}{E_\nu^{\uparrow 2}\eta_\nu^2}. \quad (1.13)$$

Если про подложку известен только коэффициент отражения, но не её величины b_σ^3, k_σ^3, то это соотношение можно использовать вместо второй формулы в (1.12). Из выражений (1.12) и (1.13) можно определить связь между амплитудами падающей, отраженной волн и амплитудой волны в среде 2:

$$\mathbf{E}_1=\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{M}_2\mathbf{E}_2=$$
$$=\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{M}_2\begin{bmatrix}1\\ R_\nu^{23}\eta_\nu^2\eta_{-\nu}^2\end{bmatrix}E_\nu^{\uparrow 2}. \quad (1.14)$$

Это же выражение в полной форме:

$$\begin{bmatrix}E_\nu^{\uparrow 1}\\ E_{-\nu}^{\downarrow 1}\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}\left(b_{-\nu}^1-b_\nu^2\right)+\left(b_{-\nu}^1-b_{-\nu}^2\right)R_\nu^{23}\eta_\nu^2\eta_{-\nu}^2\\ \left(b_\nu^2-b_\nu^1\right)+\left(b_{-\nu}^2-b_\nu^1\right)R_\nu^{23}\eta_\nu^2\eta_{-\nu}^2\end{bmatrix}\frac{E_\nu^{\uparrow 2}}{b_{-\nu}^1-b_\nu^1}. \quad (1.15)$$

Далее определим коэффициент отражения от данной структуры (1.3):

$$R_\nu=\frac{E_{-\nu}^{\downarrow 1}}{E_\nu^{\uparrow 1}}=\frac{\left(b_\nu^2-b_\nu^1\right)+\left(b_{-\nu}^2-b_\nu^1\right)R_\nu^{23}\eta_\nu^2\eta_{-\nu}^2}{\left(b_{-\nu}^1-b_\nu^2\right)+\left(b_{-\nu}^1-b_{-\nu}^2\right)R_\nu^{23}\eta_\nu^2\eta_{-\nu}^2}. \quad (1.16)$$

Полученное выражение, по существу, полностью совпадает с выражением (1.9) для коэффициента отражения от данной структуры, рассчитанным методом многократных отражений. В этом можно убедиться, используя соотношения (1.5).

2 Задача об отражении от периодической структуры на отражающей подложке

2.1 Постановка задачи. Рассмотрим периодическую систему, состоящую из $2N$ ($N \geq 2$ и целое) планарных биизотропных слоев, находящуюся на отражающей подложке (рисунок 2.1, *а*). В области $z \leq 0$ находится биизотропная среда 0 с параметрами ε_0, μ_0, χ_0, α_0; в области

$$\sum_{s=1}^{p-1} d_s < z \leq \sum_{s=1}^{p} d_s,$$

где d_s – толщина слоя s ($1 \leq s \leq 2N$), находится слой p, заполненный средой p ($p \leq 2N$). Для четного номера слоя p параметры среды равны ε_0, μ_0, χ_0, α_0 (как у среды 0), а толщина этого слоя равна d_0. Для нечетного p параметры среды равны ε_1, μ_1, χ_1, α_1, а толщина – d_1. Над этой структурой в области $z > \sum_{s=1}^{2N} d_s$ находится среда номер $2N + 1$, являющаяся подложкой с коэффициентом отражения $R_\nu^{(2N)(2N+1)}$.

Здесь и в дальнейшем первый и второй верхний индекс у коэффициентов прохождения и отражения характеризуют состав структуры, для которой записан соответствующий коэффициент. Так, например, R_ν^{sp} – это коэффициент отражения от биизотропной структуры, которая состоит только из слоёв с номерами $s + 1$, $s + 2$, … , $p - 1$, где $s < p$, и ограничена снизу и сверху полубесконечными средами s и p соответственно. При этом падающая волна распространяется из среды s в среду p (рисунок 2.1, *б*). Аналогично, T_ν^{sp} – коэффициент прохождения через такую же структуру, он задается выражением

$$T_\nu^{sp}=\frac{E_\nu^{\uparrow p}}{E_\nu^{\uparrow s}}. \quad (2.1)$$

Коэффициент отражения R_ν^{sp} можно рассчитать подобно формуле (1.3):

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

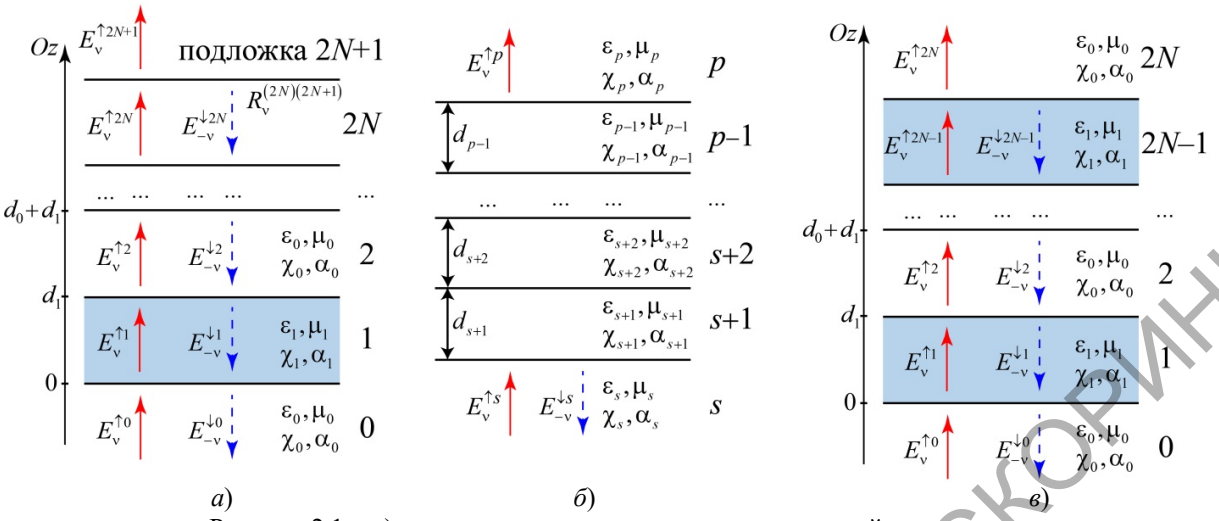

Рисунок 2.1 – *а*) схема отражения волны от периодической структуры из $2N$ биизотропных слоев на отражающей подложке $2N+1$;
б) схема прохождения и отражения волны при падении на произвольную структуру между полубесконечными средами s и p;
в) схема отражения волны от периодической структуры.

$$R_{\nu}^{sp} = \frac{E_{-\nu}^{\downarrow s}}{E_{\nu}^{\uparrow s}}, \qquad (2.2)$$

Рассмотрим нормальное падение плоской циркулярно поляризованной электромагнитной волны на структуру, изображённую на рисунке 2.1, *а*. Векторы электрического и магнитного полей в каждом из изображенных на рисунке 2.1, *а* слоев можно записать в виде

$$\vec{E}_{\nu}^{\uparrow p} = \left(\vec{i} + i\nu\vec{j}\right) E_{\nu}^{\uparrow p} \exp\left(ik_{\nu}^{p}\left(z - \sum_{s=1}^{p-1} d_s\right) - i\omega t\right),$$

$$\vec{H}_{\nu}^{\uparrow p} = -b_{\nu}^{p}\vec{E}_{\nu}^{\uparrow p},$$

$$\vec{E}_{-\nu}^{\downarrow p} = \left(\vec{i} + i\nu\vec{j}\right) E_{-\nu}^{\downarrow p} \exp\left(-ik_{-\nu}^{p}\left(z - \sum_{s=1}^{p-1} d_s\right) - i\omega t\right),$$

$$\vec{H}_{-\nu}^{\downarrow p} = -b_{-\nu}^{p}\vec{E}_{-\nu}^{\downarrow p}. \qquad (2.3)$$

В данных выражениях $0 \le p \le 2N$. В отличие от формул (1.1), здесь вводится начальная фаза, и она различна для слоев с $p \ge 2$.

2.2 Решение рекуррентным методом. В работе [10] рекуррентным методом был получен коэффициент отражения $R_{\nu}^{0(2N)}$ от подобной структуры, но при отсутствии подложки, когда слой номер $2N$ являлся полубесконечным (рисунок 2.1, *в*). При известном коэффициенте прохождения для такой структуры $T_{\nu}^{0(2N)}$ можно воспользоваться методом эквивалентных коэффициентов для нахождения коэффициента отражения от структуры, изображенной на рисунке 2.1, *а*. Этот метод заключается в замене промежуточных слоев 1 … $2N-1$ на эквивалентную границу раздела сред с коэффициентами прохождения и отражения между слоями 0 и $2N$, равными $T_{\sigma}^{0(2N)}$ и $R_{\sigma}^{0(2N)}$, причем выражения для этих коэффициентов одинаковы для обоих возможных направлений распространения волн ($0 \to 2N$ и $2N \to 0$), так как структура 1 … $2N$–1 симметрична:

$$T_{\sigma}^{0(2N)} = T_{\sigma}^{(2N)0}, \; R_{\sigma}^{0(2N)} = R_{\sigma}^{(2N)0}. \qquad (2.4)$$

Изображение эквивалентной структуры представлено на рисунке 2.2. В результате такой замены получаем структуру, состоящую из трех частей: полубесконечной среды 0, слоя $2N$ толщины d_0 и подложки $2N+1$.

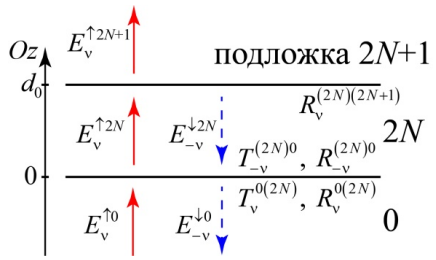

Рисунок 2.2 – Схема отражения волны от биизотропного слоя $2N$ на отражающей подложке $2N+1$ с эквивалентными коэффициентами прохождения и отражения на границе 0 ($2N$)

Коэффициент отражения для такой структуры может быть получен на основе формулы (1.7) с соответствующей заменой коэффициентов прохождения и отражения и параметров слоев:

$$R_{\nu}^{0(2N+1)} = R_{\nu}^{0(2N)} + \frac{R_{\nu}^{(2N)(2N+1)} T_{\nu}^{0(2N)} T_{-\nu}^{(2N)0} \eta_{\nu}^{0} \eta_{-\nu}^{0}}{1 - R_{\nu}^{(2N)(2N+1)} R_{-\nu}^{(2N)0} \eta_{\nu}^{0} \eta_{-\nu}^{0}}. \qquad (2.5)$$

Учитывая соотношения (2.4), приходим к следующему результату:

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$R_\nu^{0(2N+1)} = R_\nu^{0(2N)} + \frac{R_\nu^{(2N)(2N+1)} T_\nu^{0(2N)} T_{-\nu}^{0(2N)} \eta_\nu^0 \eta_{-\nu}^0}{1 - R_\nu^{(2N)(2N+1)} R_{-\nu}^{0(2N)} \eta_\nu^0 \eta_{-\nu}^0}. \quad (2.6)$$

Далее рассмотрим случай отражения электромагнитной волны от структуры, не содержащей подложку.

2.2.1 Периодическая структура без подложки. Таким образом, текущая задача состоит в вычислении коэффициента прохождения для структуры слоев 0 … 2*N*. Воспользуемся рекуррентным подходом, описанным в работе [10]. Он заключается в нахождении зависимости $T_\sigma^{0(2N)}$ и $R_\sigma^{0(2N)}$ от коэффициентов прохождения и отражения для «сокращенных» структур: $T_\sigma^{2(2N)}$ и $R_\sigma^{2(2N)}$, $T_\sigma^{4(2N)}$ и $R_\sigma^{4(2N)}$, … . Найдем такие связи с помощью формулы (1.9):

$$R_\nu^{0(2N)} = \rho_\nu^{01} \frac{1 - \eta_\nu^1 \eta_{-\nu}^1 \dfrac{R_\nu^{1(2N)}}{\rho_\nu^{10}}}{1 - R_\nu^{1(2N)} \rho_{-\nu}^{10} \eta_\nu^1 \eta_{-\nu}^1},$$
$$R_\nu^{1(2N)} = \rho_\nu^{10} \frac{1 - \eta_\nu^0 \eta_{-\nu}^0 \dfrac{R_\nu^{2(2N)}}{\rho_\nu^{01}}}{1 - R_\nu^{2(2N)} \rho_{-\nu}^{01} \eta_\nu^0 \eta_{-\nu}^0}, \quad (2.7)$$

где $\eta_\sigma^p = \exp\left(ik_\sigma^p d_p\right)$. Аналогично получим выражения для коэффициентов прохождения:

$$T_\nu^{0(2N)} = \tau_\nu^{01} \frac{\eta_\nu^1 T_\nu^{1(2N)}}{1 - R_\nu^{1(2N)} \rho_{-\nu}^{10} \eta_\nu^1 \eta_{-\nu}^1},$$
$$T_\nu^{1(2N)} = \tau_\nu^{10} \frac{\eta_\nu^0 T_\nu^{2(2N)}}{1 - R_\nu^{2(2N)} \rho_{-\nu}^{01} \eta_\nu^0 \eta_{-\nu}^0}. \quad (2.8)$$

Отметим, что коэффициенты отражения $R_\nu^{s(2N)}$ выражаются через коэффициенты отражения $R_\nu^{p(2N)}$ для структуры с меньшим количеством слоев ($p > s$), а коэффициенты прохождения $T_\nu^{s(2N)}$ зависят одновременно от $T_\nu^{p(2N)}$ и $R_\nu^{p(2N)}$.

Осуществляя непосредственные подстановки вторых выражений в первые в формулах (2.7) и (2.8), получим

$$R_\nu^{0(2N)} = \frac{A + BR_\nu^{2(2N)}}{C + DR_\nu^{2(2N)}}, \quad T_\nu^{0(2N)} = \frac{F\,T_\nu^{2(2N)}}{C + DR_\nu^{2(2N)}}, \quad (2.9)$$

где

$$A = \rho_\nu^{01} \rho_\nu^{01} \left(1 - \eta_\nu^1 \eta_{-\nu}^1\right),$$
$$B = \rho_\nu^{01} \eta_\nu^0 \eta_{-\nu}^0 \left(\eta_\nu^1 \eta_{-\nu}^1 - \rho_\nu^{01} \rho_{-\nu}^{01}\right),$$
$$C = \rho_\nu^{01} \left(1 - \rho_\nu^{10} \rho_{-\nu}^{10} \eta_\nu^1 \eta_{-\nu}^1\right), \quad (2.10)$$
$$D = \eta_\nu^0 \eta_{-\nu}^0 \left(\rho_\nu^{10} \rho_{-\nu}^{10} \eta_\nu^1 \eta_{-\nu}^1 - \rho_\nu^{01} \rho_{-\nu}^{01}\right),$$
$$F = \tau_\nu^{01} \eta_\nu^1 \tau_\nu^{10} \eta_\nu^0 \rho_\nu^{01}.$$

Связь коэффициентов $T_\sigma^{2(2N)}$ и $R_\sigma^{2(2N)}$ с $T_\sigma^{4(2N)}$ и $R_\sigma^{4(2N)}$ определяется выражениями, аналогичными (2.9):

$$R_\nu^{2(2N)} = \frac{A + BR_\nu^{4(2N)}}{C + DR_\nu^{4(2N)}}, \quad T_\nu^{2(2N)} = \frac{F\,T_\nu^{4(2N)}}{C + DR_\nu^{4(2N)}}. \quad (2.11)$$

Затем, подставляя (2.11) обратно в (2.9) получаем связь $T_\sigma^{0(2N)}$ и $R_\sigma^{0(2N)}$ с $T_\sigma^{4(2N)}$ и $R_\sigma^{4(2N)}$. Проводя такого рода рекурсию, получим связь $T_\sigma^{0(2N)}$ и $R_\sigma^{0(2N)}$ с $T_\sigma^{(2p)(2N)}$ и $R_\sigma^{(2p)(2N)}$ ($0 < p < 2N$):

$$R_\nu^{0(2N)} = \frac{A_{p-1} + B_{p-1} R_\nu^{(2p-2)(2N)}}{C_{p-1} + D_{p-1} R_\nu^{(2p-2)(2N)}} =$$
$$= \frac{\left(CA_{p-1} + AB_{p-1}\right) + \left(BB_{p-1} + DA_{p-1}\right) R_\nu^{(2p)(2N)}}{\left(CC_{p-1} + AD_{p-1}\right) + \left(DC_{p-1} + BD_{p-1}\right) R_\nu^{(2p)(2N)}} =$$
$$= \frac{A_p + B_p R_\nu^{(2p)(2N)}}{C_p + D_p R_\nu^{(2p)(2N)}},$$
$$T_\nu^{0(2N)} = \frac{F_{p-1} T_\nu^{(2p-2)(2N)}}{C_{p-1} + D_{p-1} R_\nu^{(2p-2)(2N)}} = \quad (2.12)$$
$$= \frac{\left(FF_{p-1}\right) T_\nu^{(2p)(2N)}}{\left(CC_{p-1} + AD_{p-1}\right) + \left(DC_{p-1} + BD_{p-1}\right) R_\nu^{(2p)(2N)}} =$$
$$= \frac{F_p T_\nu^{(2p)(2N)}}{C_p + D_p R_\nu^{(2p)(2N)}}.$$

Далее запишем рекуррентные соотношения для коэффициентов *A*, *B*, *C*, *D*, *F*:

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= CA_n + AB_n, & A_0 &= 0, \\ B_{n+1} &= BB_n + DA_n, & B_0 &= 1, \\ C_{n+1} &= CC_n + AD_n, & C_0 &= 1, \\ D_{n+1} &= DC_n + BD_n, & D_0 &= 0, \\ F_{n+1} &= FF_n, & F_0 &= 1. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Явный вид выражений для этих коэффициентов может быть найден методом производящей функции. Это уже было сделано в работе [10] для A_n:

$$A_n = \frac{-A\left((z_+)^n - (z_-)^n\right)}{(AD - BC)(z_+ - z_-)(z_+ z_-)^n}, \quad (2.14)$$

где введены новые величины $z_\pm$:

$$z_\pm = \frac{-(B + C) \pm \sqrt{(B + C)^2 + 4(AD - BC)}}{2(AD - BC)}. \quad (2.15)$$

Здесь при вычислении квадратного корня по формуле Муавра можно получить две пары значений z_+, z_-, которые можно получить друг из друга перестановкой $z_+ \leftrightarrow z_-$. Поскольку в окончательных выражениях для коэффициентов прохождения и отражения такая замена не меняет вид формул, то в качестве значения квадратного корня в формуле (2.15) может быть выбран произвольный вариант, соответствующий формуле Муавра. Используя первое уравнение (2.13), найдем B_n:

$$B_n = \frac{(C - 1/z_-)(z_+)^n - (C - 1/z_+)(z_-)^n}{(AD - BC)(z_+ - z_-)(z_+ z_-)^n}. \quad (2.16)$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Чтобы найти C_n и D_n достаточно сделать в выражениях (2.14) и (2.16) замены $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow C$:

$$C_n = \frac{\left(B - 1/z_-\right)\left(z_+\right)^n - \left(B - 1/z_+\right)\left(z_-\right)^n}{\left(AD - BC\right)\left(z_+ - z_-\right)\left(z_+ z_-\right)^n},$$
$$D_n = \frac{-D\left(\left(z_+\right)^n - \left(z_-\right)^n\right)}{\left(AD - BC\right)\left(z_+ - z_-\right)\left(z_+ z_-\right)^n}. \quad (2.17)$$

Коэффициенты F_n имеют вид

$$F_n = \left(F\right)^n. \quad (2.18)$$

Теперь, когда известны выражения (2.14), (2.16)–(2.18) для всех коэффициентов рекуррентной последовательности, определим коэффициенты отражения и прохождения для структуры, изображенной на рисунке 2.1, *в*, положив в формулах (2.12) $p = N - 1$:

$$R_\nu^{0(2N)} = \frac{A_{N-1} + B_{N-1} R_\nu^{(2N-2)(2N)}}{C_{N-1} + D_{N-1} R_\nu^{(2N-2)(2N)}}, \quad (2.19)$$

$$T_\nu^{0(2N)} = \frac{F_{N-1} T_\nu^{(2N-2)(2N)}}{C_{N-1} + D_{N-1} R_\nu^{(2N-2)(2N)}}. \quad (2.20)$$

Здесь величины $T_\nu^{(2N-2)(2N)}$ и $R_\nu^{(2N-2)(2N)}$ – коэффициенты прохождения и отражения для биизотропного слоя $2N - 1$, находящегося в биизотропной среде 0. Выражения для них в случае непоглощающих сред были найдены в работе [8]:

$$T_\nu^{(2N-2)(2N)} = \frac{\tau_\nu^{01} \eta_\nu^1 \tau_\nu^{10}}{1 - \rho_\nu^{10} \rho_{-\nu}^{10} \eta_\nu^1 \eta_{-\nu}^1} = \frac{F}{\eta_\nu^0 C},$$
$$R_\nu^{(2N-2)(2N)} = \frac{\rho_\nu^{01}\left(1 - \eta_\nu^1 \eta_{-\nu}^1\right)}{1 - \rho_\nu^{10} \rho_{-\nu}^{10} \eta_\nu^1 \eta_{-\nu}^1} = \frac{A}{C}. \quad (2.21)$$

Используя формулы (2.19)–(2.21), получаем окончательный вид выражений для коэффициентов $R_\nu^{0(2N)}$ и $T_\nu^{0(2N)}$:

$$R_\nu^{0(2N)} = \frac{A_N}{C_N}, \quad (2.22)$$

$$T_\nu^{0(2N)} = \frac{F_N}{\eta_\nu^0 C_N}. \quad (2.23)$$

Также запишем формулы для $R_\nu^{0(2N)}$ и $T_\nu^{0(2N)}$ в явной форме, используя выражения (2.14)–(2.18):

$$R_\nu^{0(2N)} = \frac{-A\left(\left(z_+\right)^N - \left(z_-\right)^N\right)}{\left(B - 1/z_-\right)\left(z_+\right)^N - \left(B - 1/z_+\right)\left(z_-\right)^N},$$
$$T_\nu^{0(2N)} = \frac{\left(F\right)^N \left(AD - BC\right)\left(z_+ - z_-\right)\left(z_+ z_-\right)^N}{\eta_\nu^0 \left(\left(B - 1/z_-\right)\left(z_+\right)^N - \left(B - 1/z_+\right)\left(z_-\right)^N\right)}. \quad (2.24)$$

Таким образом, формулы (2.24) определяют коэффициенты отражения и прохождения при распространении нормально падающей плоской электромагнитной волны через планарную структуру из N биизотропных слоев с параметрами ε_1, μ_1, χ_1, α_1 и толщиной d_1, расположенных на расстоянии d_0 друг от друга в биизотропной среде с параметрами ε_0, μ_0, χ_0, α_0.

2.2.2 Периодическая структура с подложкой. Когда все величины, указанные на рисунке 2.2, найдены, можно определить коэффициент отражения от периодической структуры, находящейся на отражающей подложке $2N + 1$. Для этого воспользуемся формулой (2.6), куда будем подставлять коэффициенты прохождения $T_\sigma^{0(2N)}$ и отражения $R_\sigma^{0(2N)}$ (2.24):

$$R_\nu^{0(2N+1)} = R_\nu^{0(2N)} + \frac{R_\nu^{(2N)(2N+1)} T_\nu^{0(2N)} T_{-\nu}^{0(2N)} \eta_\nu^0 \eta_{-\nu}^0}{1 - R_\nu^{(2N)(2N+1)} R_{-\nu}^{0(2N)} \eta_\nu^0 \eta_{-\nu}^0}. \quad (2.25)$$

Это же выражение для коэффициента отражения $R_\nu^{0(2N+1)}$ можно получить альтернативным способом, а именно, используя рекуррентный подход, описанный в предыдущем подразделе. Отличительной особенностью является получение связей между коэффициентами отражения для структуры, представленной на рисунке 2.1, *а*, т.е. структура содержит $2N$ слоёв и подложку. Рассматривая подложку как отдельный слой номер $2N + 1$ с известным коэффициентом отражения и используя формулы (2.12), можно показать, что коэффициент отражения от периодической структуры на подложке имеет вид

$$R_\nu^{0(2N+1)} = \frac{A_N + B_N R_\nu^{(2N)(2N+1)}}{C_N + D_N R_\nu^{(2N)(2N+1)}} = \frac{-A\left(\left(z_+\right)^N - \left(z_-\right)^N\right) + \left(\left(C - 1/z_-\right)\left(z_+\right)^N - \left(C - 1/z_+\right)\left(z_-\right)^N\right) R_\nu^{(2N)(2N+1)}}{\left(\left(B - 1/z_-\right)\left(z_+\right)^N - \left(B - 1/z_+\right)\left(z_-\right)^N\right) - D\left(\left(z_+\right)^N - \left(z_-\right)^N\right) R_\nu^{(2N)(2N+1)}}. \quad (2.26)$$

Подставляя выражения (2.24) в формулу (2.25), а также используя явный вид для коэффициентов A, B, C, D, F, можно показать, что коэффициент отражения $R_\nu^{0(2N+1)}$ принимает вид, совпадающий с представлением (2.26). Это подтверждает правомерность использованного альтернативного подхода. Далее рассмотрим решение данной задачи более универсальным методом.

2.3 Решение матричным методом. Матричный метод является широко распространенным подходом для решения граничных задач электродинамики. Его применение для расчета коэффициентов периодических структур позволяет в явном виде представить структуру повторяющихся элементов. Используя введенные в (1.11) матрицы, запишем граничные условия для

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф.СКОРИНЫ

векторов напряженностей электрического и магнитного полей в структуре, изображенной на рисунке 2.1, *а*:

$$z=0: \qquad \mathbf{M}_0\mathbf{E}_0=\mathbf{M}_1\mathbf{E}_1,$$

$$z=\sum_{s=1}^{1} d_s:\ \mathbf{M}_1\mathbf{\Phi}_1\mathbf{E}_1=\mathbf{M}_0\mathbf{E}_2,$$

$$\begin{cases} z=\sum_{s=1}^{2} d_s:\ \mathbf{M}_0\mathbf{\Phi}_0\mathbf{E}_2=\mathbf{M}_1\mathbf{E}_3, \\ z=\sum_{s=1}^{3} d_s:\ \mathbf{M}_1\mathbf{\Phi}_1\mathbf{E}_3=\mathbf{M}_0\mathbf{E}_4, \end{cases} \tag{2.27}$$

$$\ldots$$

$$\begin{cases} z=\sum_{s=1}^{2N-2} d_s:\ \mathbf{M}_0\mathbf{\Phi}_0\mathbf{E}_{2N-2}=\mathbf{M}_1\mathbf{E}_{2N-1}, \\ z=\sum_{s=1}^{2N-1} d_s:\ \mathbf{M}_1\mathbf{\Phi}_1\mathbf{E}_{2N-1}=\mathbf{M}_0\mathbf{E}_{2N}. \end{cases}$$

Промежуточные пропущенные уравнения для граничных условий будут подобны двум парам уравнений, выделенным фигурной скобкой. Условие на границе слоя $2N$ и подложки имеет вид

$$R_{\nu}^{(2N)(2N+1)}=\frac{E_{-\nu}^{\downarrow 2N}\left(\eta_{-\nu}^{0}\right)^{*}}{E_{\nu}^{\uparrow 2N}\eta_{\nu}^{0}}. \tag{2.28}$$

Непосредственной подстановкой уравнений (2.27) можно выразить матрицу амплитуд $\mathbf{E}_0$ через $\mathbf{E}_{2N}$:

$$\mathbf{E}_0=\mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{M}_1\mathbf{\Phi}_1^{-1}\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{M}_0\times \\ \times\left(\mathbf{\Phi}_0^{-1}\mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{M}_1\mathbf{\Phi}_1^{-1}\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{M}_0\right)^{2N-2}\mathbf{E}_{2N}. \tag{2.29}$$

Представляя матрицы амплитуд в явном виде и используя соотношение (2.28) получим

$$\begin{bmatrix} E_{\nu}^{\uparrow 0} \\ E_{-\nu}^{\downarrow 0} \end{bmatrix}=\mathbf{\Phi}_0\left(\mathbf{\Phi}_0^{-1}\mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{M}_1\mathbf{\Phi}_1^{-1}\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{M}_0\right)^{2N-1}\times \\ \times\begin{bmatrix} 1 \\ R_{\nu}^{(2N)(2N+1)}\eta_{\nu}^{0}\eta_{-\nu}^{0} \end{bmatrix}E_{\nu}^{\uparrow 2N}. \tag{2.30}$$

Для удобства введем матрицу-столбец $\mathbf{\Lambda}$, тогда выражение (2.30) будет более компактным:

$$\mathbf{\Lambda}=\mathbf{\Phi}_0\left(\mathbf{\Phi}_0^{-1}\mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{M}_1\mathbf{\Phi}_1^{-1}\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{M}_0\right)^{2N-1}\times \\ \times\begin{bmatrix} 1 \\ R_{\nu}^{(2N)(2N+1)}\eta_{\nu}^{0}\eta_{-\nu}^{0} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{bmatrix}, \tag{2.31}$$

$$\begin{bmatrix} E_{\nu}^{\uparrow 0} \\ E_{-\nu}^{\downarrow 0} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{bmatrix}E_{\nu}^{\uparrow 2N}.$$

Используя определение коэффициента отражения от структуры (2.2), а также формулы (2.31), получим

$$R_{\nu}^{0(2N+1)}=\frac{E_{-\nu}^{\downarrow 0}}{E_{\nu}^{\uparrow 0}}=\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}. \tag{2.32}$$

Таким образом, получены три различных представления коэффициента отражения от периодической структуры на отражающей подложке, изображенной на рисунке 2.1, *а*. Это формулы (2.25), (2.26) и (2.32).

3 Численный анализ

Сначала проведем анализ выражений (1.9) и (1.16), – коэффициентов отражения для биизотропного слоя на отражающей подложке (рисунок 1.1). Как уже говорилось ранее, R_{ν} в общем случае – комплексная величина. Ее фаза имеет смысл разности фаз между падающей и отраженной волнами, а квадрат модуля – энергетический коэффициент отражения:

$$\mathrm{R}_{\nu}=\frac{\left|\vec{S}_{-\nu}^{\downarrow 1}\right|}{\left|\vec{S}_{\nu}^{\uparrow 1}\right|}=\frac{\left|E_{-\nu}^{\downarrow 1}\right|^2}{\left|E_{\nu}^{\uparrow 1}\right|^2}=\left|R_{\nu}\right|^2, \tag{2.33}$$

где $\vec{S}_{-\nu}^{\downarrow 1}$ и $\vec{S}_{\nu}^{\uparrow 1}$ – векторы Умова – Пойнтинга, определяющие плотность потока переносимой энергии.

В частном случае полностью отражающей металлической подложки ($R_{\nu}^{23}=-1$) получаем $\mathrm{R}_{\nu}\equiv 1$ при сочетаниях остальных параметров задачи, соответствующих непоглощающим средам 1 и 2. На рисунке 3.1 приведены графики зависимости фазы коэффициента отражения от толщины слоя 2 при различных значениях параметра невзаимности χ_1. На графике видим, что указанная зависимость от d_2 имеет периодический характер, это связано с периодичностью следующего слагаемого:

$$\eta_{\nu}^2\eta_{-\nu}^2=\exp\left(id_2\left(k_{\nu}^2+k_{-\nu}^2\right)\right)= \\ =\cos\left(d_2\left(k_{\nu}^2+k_{-\nu}^2\right)\right)+i\sin\left(d_2\left(k_{\nu}^2+k_{-\nu}^2\right)\right). \tag{2.34}$$

Так как толщина слоя 2, обозначаемая d_2, в остальных слагаемых формул (1.9) и (1.16) не присутствует, то период зависимости $\mathrm{R}_{\nu}\left(d_2\right)$ совпадает с периодом выражения (2.34):

$$d_{2\ \mathrm{per}}=\frac{\lambda}{2\sqrt{\varepsilon_2\mu_2-\chi_2^{\ 2}}}. \tag{2.35}$$

Отметим, что при выполнении равенства $\chi_1\mu_2=\chi_2\mu_1$ графики для $\arg R_+$ и $\arg R_-$ совпадают (рисунок 3.1, *б*). При $\chi_1\mu_2<\chi_2\mu_1$ (рисунок 3.1, *а*) график для $\arg R_+$ (красная линия) в большей части рассматриваемого диапазона лежит выше графика для $\arg R_+$ (синяя линия). При $\chi_1\mu_2>\chi_2\mu_1$ (рисунок 3.1, *а*) наблюдается противоположная картина. Однако, в точках

$$d_2=m\cdot d_{2\ \mathrm{per}},\quad m=0,1,2,\ldots \tag{2.36}$$

коэффициенты отражения $R_{\pm}$ совпадают для любых сочетаний параметров ε_1, μ_1, α_1, χ_1, ε_2, μ_2, α_2, χ_2.

Далее проанализируем коэффициент отражения для периодической структуры, состоящей из $2N$ биизотропных слоев, находящейся на отражающей подложке (рисунок 2.1, *а*). Введём обозначение для энергетического коэффициента таким образом, чтобы количество повторяющихся пар слоев было определено верхним индексом:

$$\mathrm{R}_{\nu}^{N}=\frac{\left|\vec{S}_{-\nu}^{\downarrow 0}\right|}{\left|\vec{S}_{\nu}^{\uparrow 0}\right|}=\frac{\left|E_{-\nu}^{\downarrow 0}\right|^2}{\left|E_{\nu}^{\uparrow 0}\right|^2}=\left|R_{\nu}^{0(2N+1)}\right|^2. \tag{2.37}$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

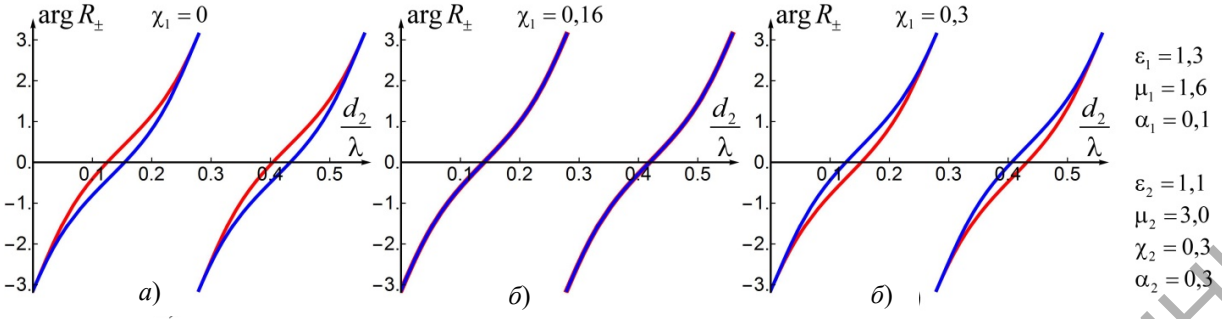

Рисунок 3.1 – Зависимость аргумента коэффициента отражения для биизотропного слоя, находящегося на полностью отражающей подложке, от отношения d_2 / λ при *а*) $\chi_1 = 0$; *б*) $\chi_1 = 0{,}16$; *в*) $\chi_1 = 0{,}3$. Красному цвету соответствует $\nu = +1$, синему – $\nu = -1$

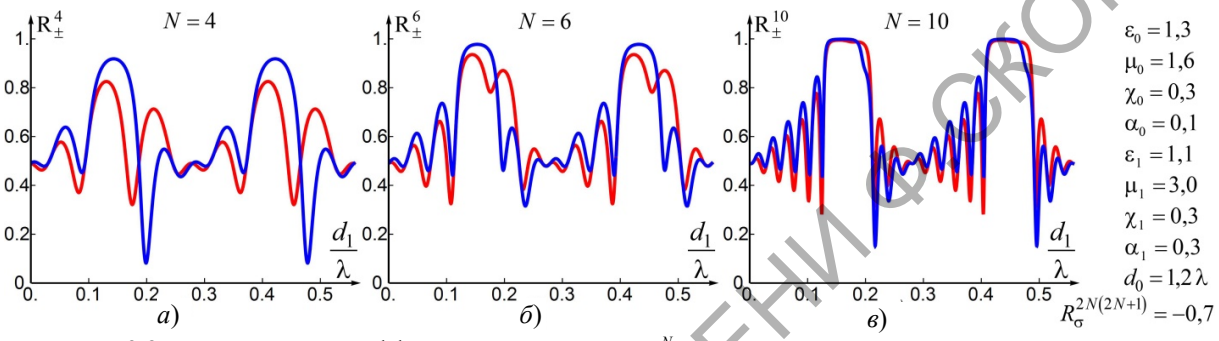

Рисунок 3.2 – Зависимость коэффициента отражения R_ν^N для периодической структуры от отношения d_1 / λ при различном количестве слоев: *а*) $N = 4$; *б*) $N = 6$; *в*) $N = 10$

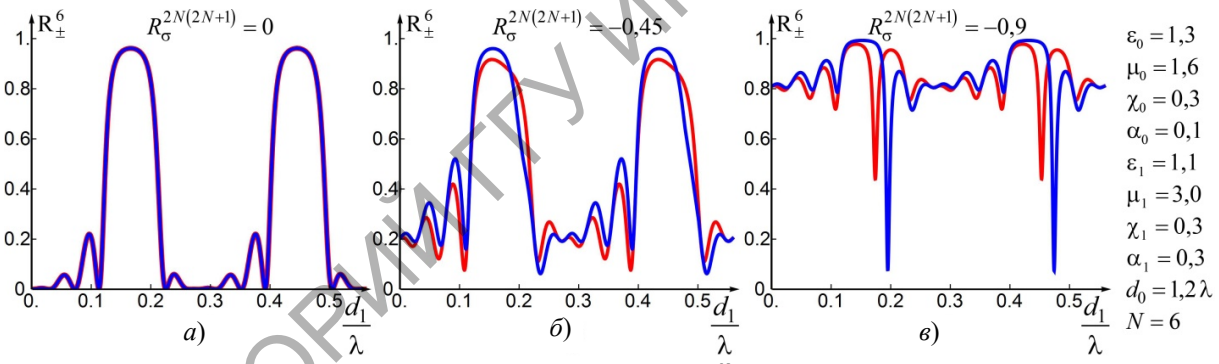

Рисунок 3.3 – Зависимость коэффициента отражения R_ν^N от отношения d_1 / λ для различных коэффициентов отражения подложки: *а*) $R_\nu^{(2N)(2N+1)} = 0$; *б*) $R_\nu^{(2N)(2N+1)} = -0{,}45$; *в*) $R_\nu^{(2N)(2N+1)} = -0{,}9$

Рассмотрим частично отражающую подложку с $R_\nu^{(2N)(2N+1)} = -0{,}7$ и построим графики зависимости энергетического коэффициента отражения от толщины нечетных слоев d_1 для различных значений N (рисунок 3.2). Данные графики также являются периодическими. На рисунке 3.2 и всех дальнейших рисунках приведены только два первых периода зависимостей. Период может быть найден по аналогии с отражением от одного биизотропного слоя:

$$d_{1\,\mathrm{per}} = \frac{\lambda}{2\sqrt{\varepsilon_1\mu_1 - \chi_1^{\,2}}}. \qquad (2.38)$$

За один период для каждой из поляризаций (левой и правой) на графиках наблюдается по N минимумов и максимумов. Увеличение количества слоев N изменяет положение и форму участков вблизи глобальных экстремумов.

Графики зависимости энергетического коэффициента отражения от толщины d_1 для различных коэффициентов отражения подложки приведены на рисунке 3.3. На рисунке 3.3, *а* нулевому значению $R_\nu^{(2N)(2N+1)}$ соответствует подложка из биизотропной среды 0, в данном случае графики для обеих поляризаций совпадают. При приближении коэффициента отражения $R_\nu^{(2N)(2N+1)}$ к минус единице, энергетический коэффициент отражения от периодической структуры приближается к единице (рисунки 3.3, *б*, 3.3, *в*). При $R_\nu^{(2N)(2N+1)} = -1$ (металлическая

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

подложка) графики $\mathrm{R}_{\nu}^{N}\left(d_1\right)$ вырождаются в горизонтальные прямые $\mathrm{R}_{\nu}^{N}=1$. В общем случае, когда $R_{\nu}^{(2N)(2N+1)}\neq 0,\ \pm 1$, графики $\mathrm{R}_{\nu}^{N}\left(d_1\right)$ для различных поляризаций отличаются и они несимметричны. Однако, как и в задаче с одним биизотропным слоем, в точках $d_1=m\cdot d_{1\,\mathrm{per}}$ графики для различных поляризаций пересекаются.

На рисунке 3.4 представлены графики зависимости коэффициента отражения $R_{\nu}^{0(2N+1)}$ от d_1 на комплексной плоскости. Они представляют собой набор несимметричных витков, проходящих через точку $R_{\nu}^{0(2N+1)}=R_{\nu}^{(2N)(2N+1)}$ (это также справедливо для комплексных значений $R_{\nu}^{(2N)(2N+1)}$). При $R_{\nu}^{(2N)(2N+1)}=-1$ они вырождаются в окружности единичного радиуса с центрами в начале координат. В случае $R_{\nu}^{(2N)(2N+1)}=0$ графики для энергетических коэффициентов отражения (рисунок 3.3, *а*) при различных поляризациях совпадают, однако амплитудные коэффициенты отражения при этом различаются: это видно из различия графиков для левой и правой поляризации на рисунке 3.4, *а*.

Построим аналогичные графики, но исследуем зависимость коэффициента отражения от толщины четных слоев d_0 (рисунок 3.5). В данном случае приведено значительно меньшее количество графиков, поскольку все закономерности, отмеченные выше для графиков $\mathrm{R}_{\nu}^{N}\left(d_1\right)$ и $R_{\nu}^{0(2N+1)}\left(d_1\right)$, верны и для зависимостей коэффициентов прохождения от d_0, но период зависимостей теперь равен

$$d_{0\,\mathrm{per}}=\frac{\lambda}{2\sqrt{\varepsilon_0\mu_0-\chi_0^{\,2}}}. \qquad (2.39)$$

Сравнивая графики на рисунках 3.2, *а* и 3.5, *а*, 3.3, *а* и 3.5, *б*, 3.4, *а* и 3.5, *в*, можем видеть, что они отличаются. Это говорит о различном влиянии толщин четных и нечетных слоев. Все эти графики имеют области, соответствующие практически полному отражению, между которыми находятся области, для которых характерно частичное отражение (для $R_{\nu}^{(2N)(2N+1)}=0$ также наблюдаются области с практически полным пропусканием падающего излучения).

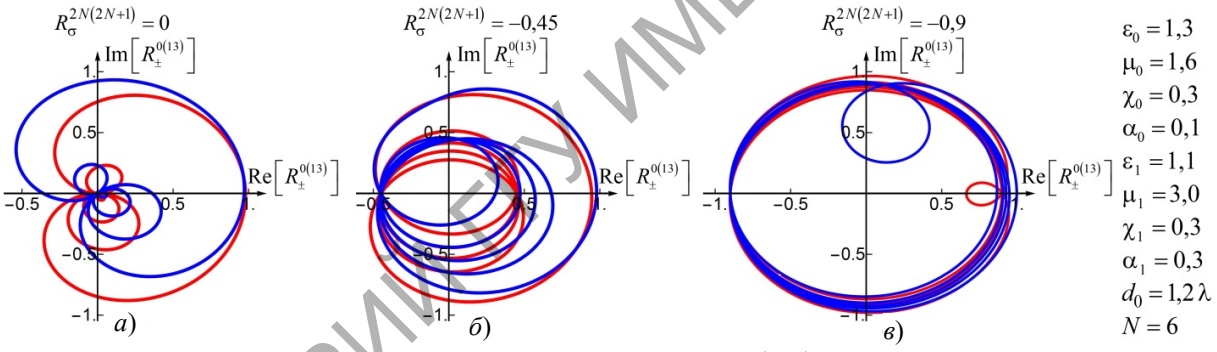

Рисунок 3.4 – График зависимости коэффициента отражения $R_{\nu}^{0(2N+1)}$ от d_1 на комплексной плоскости для различных коэффициентов отражения подложки:
а) $R_{\nu}^{(2N)(2N+1)}=0$; *б*) $R_{\nu}^{(2N)(2N+1)}=-0{,}45$; *в*) $R_{\nu}^{(2N)(2N+1)}=-0{,}9$

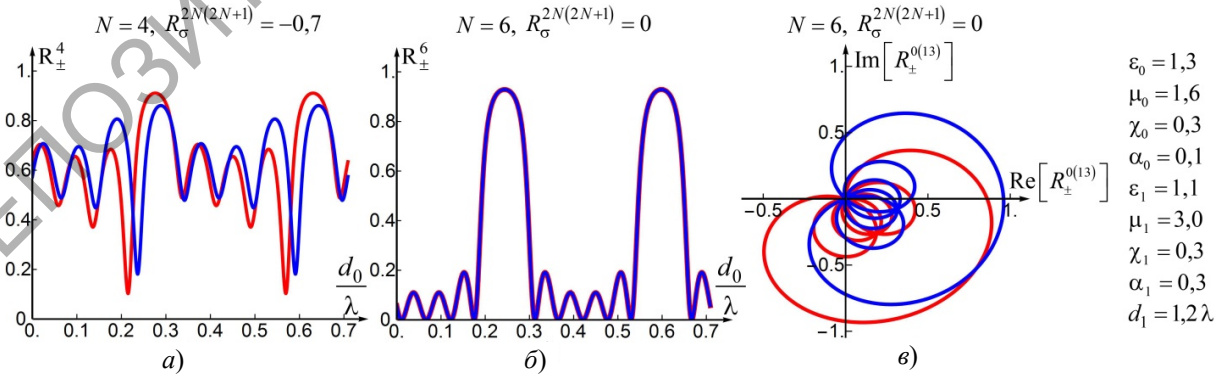

Рисунок 3.5 – Зависимость коэффициента отражения R_{ν}^{N} от отношения d_0/λ для следующих параметров: *а*) $N=4,\ R_{\nu}^{(2N)(2N+1)}=-0{,}7$; *б*) $N=6,\ R_{\nu}^{(2N)(2N+1)}=0$; *в*) График зависимости $R_{\nu}^{0(2N+1)}$ от d_0 на комплексной плоскости для $N=6,\ R_{\nu}^{(2N)(2N+1)}=0$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Еще раз подчеркнем, что различие коэффициентов отражения (модуля и фазы) для левой и правой поляризации свидетельствует о том, что при падении эллиптически поляризованной волны (в случае изотропной среды 0 – $\chi_0 = 0$, $\alpha_0 = 0$) эллипс поляризации отраженной волны будет повернут, а также будет иметь другую эллиптичность, т. е. на основе рассмотренных в работе структур можно проектировать устройства, работающие как преобразователи поляризации.

Заключение

В данной работе решена задача об отражении электромагнитной волны от одного биизотропного слоя на частично отражающей подложке, а также найдены выражения для коэффициента отражения от такой структуры (1.9) и (1.16). В частном случае полностью отражающей металлической подложки 3 (рисунок 1.1) проведен численный анализ. Обнаружено, что зависимость фазы R_v от толщины слоя 2 имеет периодический характер, причём период зависимости определяется выражением (2.35). При выполнении равенства $\chi_1\mu_2 = \chi_2\mu_1$ графики для arg R_+ и arg R_- совпадают. Также найдены значения толщины d_2 (формула (2.36)), при которых коэффициенты отражения $R_\pm$ совпадают для любых сочетаний параметров сред в структуре ε_1, μ_1, α_1, χ_1, ε_2, μ_2, α_2, χ_2.

На основе этой задачи построено решение задачи об отражении от биизотропной периодической структуры, расположенной на подложке, имеющей известный коэффициент отражения. Коэффициент отражения от описанной периодической структуры определяется формулами (2.25), (2.26) и (2.32). Численный анализ показал, что зависимости коэффициента отражения от толщин нечетных и четных слоев также являются периодическими с рядом минимумов и максимумов, локализованных в пределах диапазона значений толщины слоя, соответствующего одному периоду. В случае коэффициента отражения подложки, модуль которого отличен от нуля и единицы, коэффициенты отражения от периодической структуры при левой и правой поляризации падающей волны различны как по модулю, так и по фазе, что позволяет использовать такую структуру для преобразования поляризации падающей волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Веселаго*, *В.Г.* Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ε и μ / В.Г. Веселаго // Успехи физических наук. – 1967. – Т. 92, № 7. – С. 517–526.

2. *Shelby*, *R.A.* Experimental verifications of a negative index of refraction / R.A. Shelby, D.R. Smith, S. Schultz // Science. – 2001. – Vol. 292. – P. 77–79.

3. *Electromagnetic Waves in Chiral and Biisotropic Media* / I.V. Lindell [et al.]. – Boston and London: Artech House, 1994. – 500 p.

4. *Bolioli*, *S.* Advances in Complex Electromagnetic Materials / S. Bolioli. – Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1997. – P. 33–51.

5. *FDTD Modeling of Transient Microwave Signals in Dispersive and Lossy Bi-Isotropic Media* / A. Grande [et al.] // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 2004. – Vol. 52, № 3. – P. 773–784.

6. *A time-domain modeling for EM wave propagation in bi-isotropic media based on the TLM method* / A.C. Cabeceira [et al.] // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 2006. – Vol. 54, № 6. – P. 2780–2789.

7. *Tretyakov*, *S.A.* Electromagnetic Waves in Layered General Biisotropic Structures / S.A. Tretyakov, M.I. Oksanen // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. – 1992. – Vol. 6, № 10. – P. 1393–1411.

8. *Капшай*, *В.Н.* Прохождение плоских электромагнитных волн через биизотропный слой в биизотропной среде / В.Н. Капшай, А.А. Шамына, А.Н. Годлевская // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2011. – № 6 (69). – С. 80–87.

9. *Капшай*, *В.Н.* Прохождение плоских электромагнитных волн через многослойную биизотропную структуру / В.Н. Капшай, А.А. Шамына // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 4 (13). – С. 10–14.

10. *Капшай*, *В.Н.* Plane electromagnetic wave reflection of a periodic planar biisotropic structure / В.Н. Капшай, А.А. Шамына. // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2013. – № 6 (81). – С. 189–195.

11. *Капшай*, *В.Н.* Multiple reflections method in the problem of inclined electromagnetic wave incidence on the layered planar biisotropic medium / В.Н. Капшай, А.А. Шамына // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2015. – № 3 (90). – С. 146–152.

12. *Homogenization of Bi-isotropic Multilayered Metamaterial Structures* / O. Ouchetto [et al.] // IEEE Transactions on Nanotechnology. – 2017. – Vol. 16, № 6. – P. 946–953.

13. *Investigation of effective media applicability for ultrathin multilayer structures* / J. Sukharn [et al.] // Nanoscale. – 2019. – Vol. 11. – P. 12582–12588.

14. *Razzaz*, *F.* Evanescent and propagating electromagnetic waves in Bi-isotropic layers / F. Razzaz, M.A.S. Alkanhal // Waves in Random and Complex Media. – 2019. – Mode of access: https://doi.org/10.1080/17455030.2019.1632501. – Date of access: 10.04.2020.

15. *Капшай*, *В.Н.* Рассеяние электромагнитных волн на биизотропном шаре в биизотропной среде / В.Н. Капшай, В.В. Кондратюк // Проблемы

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

физики, математики и техники. – 2010. – № 3 (4). – С. 7–21.

16. *Капшай*, *В.Н.* Резонансная структура сечений рассеяния и экстинкции в проблеме Ми для биизотропного шара / В.Н. Капшай, А.А. Шамына, В.В. Кондратюк // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 28–32.

17. *Scattering Analysis of Planar Electric and Magnetic Dipoles in Multilayered Chiral Structures* / N.R. Rabelo [et al.] // Journal of Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications. – 2012. – Vol. 11, № 1. – P. 214–229.

18. *Prudêncio*, *F.R.* Asymmetric Band Diagrams in Photonic Crystals with a Spontaneous Nonreciprocal Response / F.R. Prudêncio, S.A. Matos, C.R. Paiva // Physical Review A. – 2015. – Vol. 91, № 6.

19. *Капшай*, *В.Н.* Отражение и преломление плоской электромагнитной волны на границе раздела биизотропных сред / В.Н. Капшай, В.В. Кондратюк // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2009. – № 5 (56). – С. 129–133.

Поступила в редакцию 05.05.2020.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф.СКОРИНЫ