*Проблемы физики, математики и техники*, № 2 (43), 2020

**МАТЕМАТИКА**

УДК 512.542

# О ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ОБОБЩЕННО АБНОРМАЛЬНЫХ СВЕРХРАЗРЕШИМЫХ ПОДГРУПП КОНЕЧНЫХ ГРУПП

**А.Ф. Васильев**

*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*

# ON PRODUCTS OF GENERALIZED ABNORMAL SUPERSOLUBLE SUBGROUPS OF FINITE GROUPS

**A.F. Vasil'ev**

*F. Scorina Gomel State University*

Введено и изучено понятие $X$-абнормальной подгруппы конечных групп. Установлено несколько признаков сверхразрешимости конечных групп в терминах произведений $X$-абнормальных подгрупп. В частности, доказана сверхразрешимость группы $G = AB = CD$, где $A$ и $B$ – субнормальные сверхразрешимые, а $C$ и $D$ – $X$-абнормальные сверхразрешимые подгруппы $G$.

***Ключевые слова***: *конечная группа*, *сверхразрешимая группа*, *абнормальная подгруппа*, *X-абнормальная подгруппа*.

The concept of an $X$-abnormal subgroup of finite groups is introduced and studied. Several attributes of the supersolubility of finite groups in terms of products of $X$-abnormal subgroups are established. In particular, the supersolubility of the group $G = AB = CD$ is proved, where $A$ and $B$ are subnormal, and $C$ and $D$ are $X$-abnormal supersoluble subgroups in $G$.

***Keywords***: *finite group*, *supersoluble subgroup*, *abnormal subgroup*, *X-abnormal subgroup*.

## Введение

Рассматриваются только конечные группы. В работе используются стандартные определения и обозначения [1], [2].

Хорошо известно, что произведение двух сверхразрешимых (нормальных) подгрупп группы $G$ не обязательно сверхразрешимо. В 1957 году Бэр [3] доказал, что, если группа $G = AB$, где $A$ и $B$ – нормальные сверхразрешимые подгруппы $G$ и коммутант $G'$ нильпотентен, то $G$ сверхразрешима. Этот результат послужил отправной точкой для появления многочисленных исследований (см. например, [4]–[13]), посвященных нахождению признаков и критериев сверхразрешимости групп в терминах произведений нормальных и обобщенно нормальных сверхразрешимых подгрупп.

Полярным к понятию нормальности является понятие абнормальности для подгрупп. Напомним [1], что подгруппа $H$ группы $G$ называется абнормальной в $G$, если $x \in \langle H, H^x \rangle$ для любого $x \in G$. Обозначается $H \ abn\ G$.

Имеется целый ряд обобщений абнормальности для подгрупп. Хорошо известны и применяются понятия самонормализуемой, субабнормальной, слабо абнормальной, контранормальной и др. подгрупп.

Во многих случаях возникает факторизация группы абнормальными подгруппами. Например, симметрическая группа $S_4$ представима в произведение своих абнормальных подгрупп: силовской 2-подгруппы и подгруппы, изоморфной $S_3$. В работах [14], [15] в классе разрешимых групп исследовались классы групп $\mathfrak{X}$, замкнутые относительно взятия произведений абнормальных $\mathfrak{X}$-подгрупп. В частности, было получено описание всех разрешимых наследственных насыщенных формаций и разрешимых формаций Фитинга с данным выше свойством. Отметим, что класс всех сверхразрешмых групп, являясь наследственной насыщенной формацией, не попадает в список формаций, полученных в работе [14]. На это также указывает и приведенный выше пример. Поэтому возникает естественная задача: исследовать, при каких условиях произведение ненормальных (абнормальных) сверхразрешимых подгрупп сверхразрешимо? Рассмотрению ряда случаев этой общей задачи и посвящена настоящая работа.

## 1 Предварительные сведения

***Лемма* 1.1.** *Пусть $H$ и $R$ – подгруппы группы $G$, $N \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если $H \ abn\ R$, то $HN / N \ abn\ RN / N$*;

2) *если $N \subseteq H$ и $H / N \ abn\ G / N$, то $H \ abn\ G$.*

*Доказательство*. Установим справедливость 1). Пусть $H \ abn\ R$. Для любого $xN \in RN / N$ найдутся $w \in R$ и $n \in N$ такие, что $x = wn$. Тогда

$$xN = wN \in \langle H, H^w \rangle N / N =$$
$$= \langle HN / N, H^w N / N \rangle = \langle HN / N, (HN / N)^{xN} \rangle.$$

Таким образом, $HN / N \ abn \ RN / N$. Утверждение 1) доказано.

Докажем утверждение 2). Для любого $x \in G$ ввиду абнормальности $H / N$ в $G / N$ получаем, что $xN \in \langle H / N, (H / N)^{xN} \rangle = \langle H, H^x \rangle / N$. Отсюда следует, что найдутся элементы $h \in \langle H, H^x \rangle$ и $n \in N$ такие, что $x = hn$. Тогда

$$x \in \langle H, H^x \rangle N = \langle H, H^x \rangle. \qquad \square$$

Пусть $p$ – простое число. Напомним [16, с. 6], что группа $G$ называется строго $p$-замкнутой, если силовская $p$-подгруппа $G_p$ группы $G$ нормальна в $G$ и $G / G_p$ является абелевой группой экспоненты, делящей $p-1$. Нам потребуется следующая известная теорема Бэра [16, теорема 1.12].

***Теорема* 1.2.** *Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда*

(*a*) *G является дисперсивной по Оре, и*

(*b*) $N_G(G_p) / C_G(G_p)$ *является строго p-замкнутой для любой силовской p-подгруппы* $G_p$ *группы G и любого* $p \in \pi(G)$.

Отметим следующие свойства класса всех сверхразрешимых групп (см., например, [1, гл. 1, § 4.9], [16, гл. 1]).

***Теорема* 1.3.** *Класс всех сверхразрешимых групп образует наследственную насыщенную формацию, которая имеет локальный экран f такой, что* $f(p) = \mathfrak{A}(p-1)$ *для любого простого p, где* $\mathfrak{A}(p-1)$ *– формация всех абелевых групп экспоненты, делящей* $p-1$.

## 2 Обобщенно абнормальные подгруппы конечных групп

В настоящем разделе рассмотрим некоторые обобщения понятия абнормальной подгруппы.

В работе [17] Роуз ввел следующее обобщение абнормальной подгруппы.

***Определение* 2.1.** Подгруппа *H* группы *G* называется контранормальной в *G*, если $H^G = G$. Будем использовать обозначение $H \ cn \ G$.

Свойства контранормальных подгрупп собраны в следующей лемме.

***Лемма* 2.2.** *Пусть H и R – подгруппы группы G*, $N \trianglelefteq G$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если* $H \ cn \ R$, *то* $HN / N \ cn \ RN / N$, *в частности, если* $H \ cn \ G$, *то* $HN / N \ cn \ G / N$;

2) *если* $N \subseteq H$ *и* $H / N \ cn \ G / N$, *то* $H \ cn \ G$;

3) *если* $H \ cn \ R$, $R \ cn \ G$, *то* $H \ cn \ G$;

4) *если* $H \ abn \ G$, *то* $H \ cn \ G$.

*Доказательство*. Установим справедливость 1). Пусть $H \ cn \ R$. Тогда $H^R N / N = RN / N \supseteq (HN / N)^{RN/N}$. Обозначим $(HN / N)^{RN/N} = K / N$. Пусть $x \in R$. Тогда $xN \in RN / N$ и $(HN / N)^{xN} \subseteq K / N$. Поэтому $H^x \subseteq H^x N \subseteq K$ для любого $x \in R$. Отсюда следует, что $H^R \subseteq K$ и $H^R N / N \subseteq K / N$. Итак,

$$H^R N / N = RN / N = (HN / N)^{RN/N},$$

т. е. $HN / N \ cn \ RN / N$.

Если рассмотреть $R = G$, то

$$HN / N \ cn \ G / N$$

и утверждение 1) доказано.

Установим справедливость 2). Пусть $N \subseteq H$ и $H / N \ cn \ G / N$. Тогда

$$G / N = (H / N)^{G/N} = \langle (H / N)^{xN} \mid \text{для любого } xN \in G / N \rangle.$$

Так как $(H / N)^{xN} = H^x / N \subseteq H^G / N$, получаем $(H / N)^{G/N} \subseteq H^G / N \subseteq G / N = (H / N)^{G/N}$. Таким образом, $(H / N)^{G/N} = H^G / N = G / N$ и $H^G = G$. Это означает, что $H \ cn \ G$. Утверждение 2) доказано.

Установим справедливость 3). Пусть $H \ cn \ R \ cn \ G$. Из $H^R = R$ для любого $g \in G$ следует, что $R^g = \langle H^x \mid \text{ для всех } x \in R \rangle^g = \langle H^{xg} \mid \text{ для всех } x \in R \rangle$. Тогда $G = R^G = \langle R^g \mid \text{ для всех } g \in G \rangle = \langle H^{xg} \mid \text{ для всех } x \in R \text{ и всех } g \in G \rangle = H^G$. Утверждение 3) доказано.

Утверждение 4) следует из того, что всякая подгруппа, содержащая абнормальную подгруппу, самонормализуема. $\square$

Заметим, что обратное утверждение к 4) леммы 2.2 неверно, на что указывает пример подгруппы $H = \langle (1,2) \rangle$ в симметрической группе $S_4$.

Рассмотрим еще одно обобщение абнормальности и контранормальности, основанное на одной идее обобщения нормальности, предложенной А. Манном в [18]. Функторное развитие результатов [18] можно найти в работах [19], [20].

***Определение* 2.3.** Подгруппу *H* группы *G* будем называть *X*-абнормальной в *G*, если для любого эпиморфизма σ группы *G* либо $H^\sigma = G^\sigma$, либо $H^\sigma$ содержится в собственной абнормальной подгруппе $R^\sigma$ группы $G^\sigma$.

***Лемма* 2.4.** *Пусть H – подгруппа группы G и* $N \trianglelefteq G$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если H X-абнормальна в G, то* $HN / N$ *X-абнормальна в* $G / N$;

2) *если* $N \subseteq H$ *и* $H / N$ *X-абнормальна в* $G / N$, *то H X-абнормальна в G.*

Доказательство следует из работы [19].

***Лемма* 2.5.** *Пусть $H$ – подгруппа группы $G$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если $H$ контранормальна и субнормальна в $G$ одновременно*, *то* $H = G$;

2) *если $G$ – разрешимая группа и $H$ $X$-абнормальна и субнормальна в $G$ одновременно*, *то* $H = G$.

*Доказательство*. Установим справедливость 1). Пусть $H \ cn \ G$. Если $H \neq G$, то в $G$ найдется нормальная подгруппа $K \neq G$, содержащая $H$. Тогда для любого $x \in G$ подгруппа $H^x \subseteq K^x = K$. Поэтому $H^G \subseteq K$. Получили противоречие с $H^G = G$. Значит, $H = G$. Утверждение 1) доказано.

Установим справедливость 2). Оставаясь в предположениях 2) леммы, допустим, что $H \neq G$. Так как $H$ субнормальна в $G$, то найдется нормальная максимальная подгруппа группы $G$ такая, что $H \subseteq M$. Тогда $HM / M$ является $X$-абнормальной и субнормальной в $G / M$ одновременно. Так как $G / M$ – группа простого порядка и не содержит собственных абнормальных подгрупп, то получаем противоречие. □

***Лемма* 2.6.** Если $G = AB$, где $A$ и $B$ – $X$-абнормальные нильпотентные подгруппы группы $G$, то $G$ нильпотентна.

*Доказательство*. Пусть группа $G$ – контрпример минимального порядка к утверждению леммы. Тогда $G = H_1H_2$, где $H_i$ – $X$-абнормальная нильпотентная подгруппа группы $G$, $i = 1, 2$, но $G$ ненильпотентна. По теореме Виландта – Кегеля $G$ разрешима. Пусть $N$ – минимальная нормальная подгруппа группы $G$. Для факторгруппы $G / N$ все условия леммы выполняются. Поэтому $G / N$ нильпотентна для любой минимальной нормальной подгруппы $N$ группы $G$.

Так как класс всех нильпотентных групп образует насыщенную формацию, заключаем, что $N$ – единственная минимальная нормальная подгруппа в группе $G$ и $\Phi(G) = 1$. При этом $N = C_G(N) = F(G)$ является $p$-группой, $p$ – некоторое простое число. В $G$ имеется максимальная подгруппа $M$, для которой $G = [N]M$, при этом $M \cong G / N$ нильпотентна.

Рассмотрим подгруппу $H_iN$, где $i = 1, 2$. Если $H_iN = G$, где $i = 1, 2$, то $H_i$ – максимальная подгруппа группы $G$. Так как все дополнения к $N$ являются максимальными подгруппами в $G$ и сопряжены в ней, то по теореме Оре следует, что этот случай невозможен. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $H_1N \neq G$. Тогда $H_1N / N$ является собственной подгруппой нильпотентной группы $G / N$. Но тогда $H_1N / N$ является одновременно субнормальной и $X$-абнормальной подгруппой в $G / N$. По лемме 2.5 получаем, что $H_1N / N = G / N$. Это противоречит с $H_1N \neq G$. □

Связь контранормальных и $X$-абнормальных подгрупп устанавливает

***Лемма* 2.7.** *Справедливы следующие утверждения*.

(1) *В любой группе всякая контранормальная подгруппа является $X$-абнормальной.*

(2) *Пусть $G$ – разрешимая группа. Тогда и только тогда подгруппа $H$ является контранормальной в $G$*, *когда подгруппа $H$ является $X$-абнормальной в $G$.*

*Доказательство*. Установим справедливость (1). Пусть подгруппа $H$ является контранормальной подгруппой в группе $G$. Если $G$ – простая группа, то при $H \neq G$ в $G$ найдется максимальная подгруппа $W$, содержащая $H$. Так как $W$ абнормальна в $G$, получаем $X$-абнормальность $H$ в $G$.

Допустим, что $G$ непроста. Рассмотрим любой эпиморфизм $\sigma$ группы $G$ такой, что $H^\sigma \neq G^\sigma$. Тогда в $G$ найдется нормальная подгруппа $N = \operatorname{Ker}\sigma$, для которой $HN / N$ отлична от $G / N$. Тогда $HN / N \leq M / N < G / N$, где $M / N$ – максимальная в $G / N$ подгруппа. Из $H^G = G$ и максимальности $M$ в $G$ следует, что $M \ abn \ G$. Ввиду леммы 1.1 $M / N \ abn \ G / N$. Итак, $H^\sigma$ содержится в $M^\sigma \ abn \ G^\sigma$. Утверждение (1) доказано.

Установим справедливость (2). Если $H \ cn \ G$, то по (1) $H$ $X$-абнормальна в $G$.

Обратно. Пусть подгруппа $H$ является $X$-абнормальной в $G$. Предположим, что $H^G \neq G$. Так как $G$ разрешима, через $H^G$ можно провести композиционный ряд

$$H^G = H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_{n-1} = W \lhd H_n = G,$$

где $H_i / H_{i-1}$ – циклическая группа простого порядка, $i = 1, \ldots, n$. Из 1) леммы 2.4 заключаем, что $1 \cong HW / W$ $X$-абнормальна в $G / W$, поэтому содержится в собственной абнормальной подгруппе из $G / W$. Но $G / W$ является циклической группой простого порядка, поэтому не имеет собственных абнормальных подгрупп. Получили противоречие. Значит, $H^G = G$ и $H$ является контранормальной в $G$. □

Заметим, что в общем случае $X$-абнормальность подгруппы не обязательно совпадает с контранормальностью. Например, в простой неабелевой группе единичная подгруппа является $X$-абнормальной, но не является контранормальной.

## 3 Основные результаты

Хорошо известно, что если подгруппы $A$ и $B$ имеют взаимно простые индексы в группе $G$, то $G = AB$. В 1960 году Виландт [21] доказал, что группа $G$ разрешима, если она имеет три разрешимые подгруппы, индексы которых в $G$ попарно взаимно просты. В работе [22] Дерк установил сверхразрешимость группы $G$, имеющей четыре сверхразрешимые подгруппы, индексы которых в $G$ попарно взаимно просты. Фрисен [23] показал сверхразрешимость группы $G$ с двумя нормальными сверхразрешимыми подгруппами, имеющими взаимно простые индексы в $G$. В этом направлении получена следующая.

***Теорема* 3.1.** *Группа G сверхразрешима, если она имеет три X-абнормальные сверхразрешимые подгруппы, индексы которых в G попарно взаимно просты.*

*Доказательство*. Пусть группа $G$ – контрпример минимального порядка к утверждению теоремы. Тогда $G$ имеет три $X$-абнормальные сверхразрешимые подгруппы $H_1, H_2, H_3$ с попарно взаимно простыми индексами. При этом сама группа $G$ сверхразрешимой не является. Ясно, что $H_i \neq G,\ i = 1,2,3.$

По теореме Виландта группа $G$ разрешима. Пусть $N$ – минимальная нормальная подгруппа группы $G$. Заметим, что при любом эпиморфизме $\sigma$ группы $G$ подгруппы $H_i^{\sigma}$ являются $X$-абнормальными сверхразрешимыми подгруппами и имеют попарно взаимно простые индексы. Для факторгруппы $G/N$ все условия теоремы выполняются. Поэтому $G/N$ сверхразрешима для любой минимальной нормальной подгруппы $N$ группы $G$.

Так как по теореме 1.3 класс всех сверхразрешимых групп образует насыщенную формацию, то $N$ – единственная минимальная нормальная подгруппа в группе $G$ и $\Phi(G) = 1.$ Из разрешимости $G$ следует, что $N$ – $p$-группа для некоторого простого числа $p$, причем $N = C_G(N) = F(G).$ Заметим, что найдется максимальная в $G$ подгруппа $R$ такая, что $G = [N]R.$ Ввиду $R \cong G/N$ подгруппа $R$ сверхразрешима.

Индекс любой подгруппы, не содержащей $N$, делится на $p$. Поэтому $N$ содержится по крайней мере в двух подгруппах системы подгрупп $H_1, H_2, H_3.$ Будем считать, что $N \subseteq H_i,\ i = 1,2.$ Из $N = C_G(N)$ и $N \subseteq H_i$ следует, что $O_{p'}(H_i) = 1,$ а значит, $F(H_i)$ является $p$-группой для любого $i = 1,2.$ По теореме 1.2 $H_i$ дисперсивна по Оре. Таким образом, $p$ является наибольшим простым делителем порядка $|H_i|,\ i = 1,2,$ а значит, и группы $G$. Так как $N$ – силовская $p$-подгруппа в $H_i$ и $N$ нормальна в $H_i,\ i = 1,2,$ то из $G = H_1H_2$ вытекает, что $N$ – силовская $p$-под-группа группы $G$. Следовательно, $R$ – $p'$-группа.

Согласно тождеству Дедекинда

$$H_i = H_i \cap [N]R = [N](H_i \cap R)$$

для любого $i = 1,2.$ Из [1, лемма 4.5] следует, что $H_i / F(H_i) = H_i / N \simeq H_i \cap R$ является абелевой группой экспоненты, делящей $p-1.$ Далее заметим, что $H_1 \cap R, H_2 \cap R$ имеют взаимно простые индексы в $R$, значит,

$$R = (H_1 \cap R)(H_2 \cap R).$$

Из 1) леммы 2.4 следует, что $H_i \cap R$ является $X$-абнормальной в $R$ подгруппой, $i = 1,2.$ Так как $H_i \cap R$ абелева, а значит, нильпотентна, то по лемме 2.6 вытекает нильпотентность подгруппы $R$. Но тогда $H_iN/N,\ i = 1,2,$ является субнормальной и $X$-абнормальной подгруппой в $G/N$ одновременно. По лемме 2.5 $H_i \cap R = R,$ значит, $H_i = G,\ i = 1,2.$ Получили противоречие. □

***Следствие* 3.1.1.** *Группа G сверхразрешима, если она имеет три контранормальные сверхразрешимые подгруппы, индексы которых в G попарно взаимно просты.*

***Теорема* 3.2.** *Пусть группа $G = AB$ есть произведение своих X-абнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B. Если G метанильпотентна, то группа G сверхразрешима.*

*Доказательство*. Пусть группа $G$ – контрпример минимального порядка к утверждению леммы. Тогда $G = H_1H_2,$ где $H_i$ – $X$-абнормальная сверхразрешимая подгруппа группы $G$, $i = 1,2,$ но $G$ несверхразрешима. Так как по условию $G$ метанильпотентна, то $G$ разрешима.

Пусть $N$ – минимальная нормальная подгруппа группы $G$. Для факторгруппы $G/N$ все условия леммы выполняются. Поэтому $G/N$ сверхразрешима для любой минимальной нормальной подгруппы $N$ группы $G$.

Используя теорему 1.3, легко показать, что $N$ – единственная минимальная нормальная подгруппа в группе $G$ и $\Phi(G) = 1.$ В этом случае $G = [N]M,$ где $N$ – $p$-группа ($p$ – некоторое простое число), $N = C_G(N) = F(G),$ а $M$ – некоторая сверхразрешимая максимальная подгруппа группы $G$.

Рассмотрим подгруппу $H_iN,$ где $i = 1,2.$ Если $H_iN = G,$ где $i = 1,2,$ то $H_i$ – максимальная подгруппа группы $G$. Так как все дополнения к $N$ являются максимальными подгруппами в $G$ и сопряжены в ней, то по теореме Оре следует, что этот случай невозможен. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $H_1N \neq G.$ Тогда $H_1N/N$ является собственной подгруппой нильпотентной группы $G/N.$ Отсюда заключаем, что $H_1N/N$ и субнормальна и $X$-абнормальна в $G/N.$ По лемме 2.5 $H_1N/N = G/N.$ Получили противоречие. □

***Следствие* 3.2.1.** *Пусть группа $G = AB$ есть произведение своих контранормальных сверхразрешимых подгрупп A и B. Если G метанильпотентна, то группа G сверхразрешима.*

Напомним [8], что подгруппа $H$ группы $G$ называется $\mathbb{P}$*-субнормальной* в $G$, если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$$

такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ – простое число для любого $i = 1, \ldots, n$.

***Теорема* 3.3.** *Пусть группа $G = AB$ – произведение сверхразрешимых $\mathbb{P}$-субнормальных в G подгрупп A и B. Если A и B X-абнормальны в G, то G сверхразрешима.*

*Доказательство*. Пусть $G$ – группа наименьшего порядка, для которой теорема неверна. По (*а*) теоремы 1.2 $A$ и $B$ дисперсивны по Оре. По [9, теореме 4.4] группа $G$ дисперсивна по Оре, поэтому является разрешимой. Пусть $N$ – минимальная нормальная подгруппа группы $G$. Так как для $G/N$ все условия теоремы выполняются, $G/N$ – сверхразрешимая группа. По теореме 1.3 класс всех сверхразрешимых групп $\mathfrak{U}$ является насыщенной формацией. Поэтому $N$ – единственная минимальная нормальная подгруппа группы $G$, $\Phi(G) = 1$, $N = C_G(N) = F(G)$, $N$ – $p$-группа для некоторого простого числа $p$. Тогда в $G$ найдется максимальная подгруппа $M$ такая, что $G = NM$, $N \cap M = 1$. Из дисперсивности по Оре группы $G$ следует, что $p$ – наибольший простой делитель $|G|$. Так как $M \cong G/N$ сверхразрешима и $O_p(M) = 1$ по [1, лемма 3.9], получаем, что $N$ – силовская $p$-подгруппа группы $G$.

Подгруппа $AN = AN \cap NM = N(AN \cap M)$. Заметим, что $O_{p'}(AN) = 1$ и $F_p(AN) = N$. Ввиду $AN \in \mathfrak{U}$ из леммы 4.5 из [1] и теоремы 1.3 следует, что

$$AN / F_p(AN) \cong AN \cap M \in f(p) = \mathfrak{A}(p-1).$$

Аналогично получаем, что

$$BN \cap M \in f(p) = \mathfrak{A}(p-1).$$

Заметим, что $M = (AN \cap M)(BN \cap M)$ является произведением $X$-абнормальных в $M$ подгрупп $AN \cap M$ и $BN \cap M$. Из лемм 2.5 и 2.6 следует, что $M \in \mathfrak{A}(p-1)$. Так как $G/N \in \mathfrak{U}$ и

$$M \cong G/F_p(G) \in f(p) = \mathfrak{A}(p-1)$$

заключаем, что $G \in \mathfrak{U}$. Получили противоречие. □

***Следствие* 3.3.1.** *Пусть группа $G = AB$ – произведение сверхразрешимых $\mathbb{P}$-субнормальных в G подгрупп A и B. Если A и B контранормальны в G, то G сверхразрешима.*

***Теорема* 3.4.** *Если группа $G = AB = CD$, где A и B – субнормальные сверхразрешимые подгруппы, а C и D – X-абнормальные сверхразрешимые подгруппы группы G, то G сверхразрешима.*

*Доказательство*. Пусть $G$ – контрпример минимального порядка к утверждению теоремы. Тогда $G = H_1H_2 = H_3H_4$, где $H_i$ – субнормальная сверхразрешимая для $i = 1, 2$ и $X$-абнормальная сверхразрешимая подгруппа для $i = 3, 4$ группы $G$. При этом сама группа $G$ сверхразрешимой не является. По [12, лемма 2.1] $G$ дисперсивна по Оре и $G/F(G)$ нильпотентна. Значит, $G$ разрешима.

Пусть $N$ – минимальная нормальная подгруппа группы $G$. Тогда для факторгруппы $G/N$ все условия теоремы выполняются. Поэтому $G/N$ сверхразрешима для любой минимальной нормальной подгруппы $N$ группы $G$.

Из теоремы 1.3 и выбора $G$ заключаем, что $N$ является единственной минимальной нормальной подгруппой в $G$ и $\Phi(G) = 1$, причем $N = C_G(N) = F(G)$. Кроме того $G = [N]R$, где $R$ – некоторая максимальная подгруппа группы $G$. Заметим, что $N$ – силовская $p$-подгруппа для наибольшего простого делителя $p$ порядка группы $G$.

Если $H_3N = G = H_4N$, то $H_i$ – максимальная подгруппа группы $G$ для $i = 3, 4$. Все дополнения к $N$ являются максимальными подгруппами в $G$ и сопряжены в ней. Тогда $H_3 = H_4^g$ для некоторого $g \in G$ и $G = H_3H_4$, что невозможно по теореме Оре. Значит, найдется $i \in \{3, 4\}$, для которого $H_iN \neq G$. Допустим, что $H_3N \neq G$. Тогда в нильпотентной группе $G/N$ подгруппа $H_3N/N$ является собственной. Отсюда заключаем, что $H_3N/N$ является субнормальной и $X$-абнормальной подгруппой в $G/N$ одновременно. Из леммы 2.5 следует, что $H_3N/N = G/N$. Получили противоречие. При $H_4N \neq G$ аналогично приходим к противоречию. □

***Следствие* 3.4.1.** *Если группа $G = AB = CD$, где A и B – субнормальные сверхразрешимые подгруппы, а C и D – контранормальные сверхразрешимые подгруппы группы G, то G сверхразрешима.*

**Заключение**

В работе найдены условия сверхразрешимости конечных групп, представимых произведением своих обобщенно абнормальных подгрупп.

Следующий пример показывает существенность условий доказанных теорем.

***Пример***. Пусть $S$ – симметрическая группа степени 3. Согласно [2, В, 10.7] существует точный неприводимый модуль $U$ над полем из 7 элементов. Нетрудно видеть, что $|U| = 7^2$. Рассмотрим полупрямое произведение $G = [U]S$.

Ясно, что группа $G$ не является сверхразрешимой. Подгруппы $H_1 = UG_2$, $H_2 = UG_3$ и $H_3 = S$ ($G_p$ – силовская $p$-подгруппа группы $G$, $p \in \{2,3\}$) являются по теореме 1.2 сверхразрешимыми подгруппами группы $G$. Отметим, что $H_i$, $i = 1, 2, 3$, имеют попарно взаимно простые индексы в группе $G$. Нетрудно видеть, что $H_1$ и $H_3$ – абнормальные подгруппы группы $G$, а $H_2 \trianglelefteq G$. Следовательно, требование наличия трех $X$-абнормальных подгрупп в теореме 3.1 является существенным.

Отметим, что в теореме 3.2 условие метанильпотентности группы $G$ нельзя отбросить. Это следует из приведенного во введении примера симметрической группы $S_4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

2. *Doerk*, *K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

3. *Baer*, *R.* Classes of finite groups and their properties / R. Baer // Illinois J. Math. – 1957. – Vol. 1. – P. 115–187.

4. *Asaad*, *M.* On the supersolubility of finite groups / M. Asaad, A. Shaalan // Arch. Math. – 1989. – Vol. 53, № 4. – P. 318–326.

5. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 11 (426). – С. 10–14.

6. *Alejandre*, *M.* On some permutable products of supersoluble groups / M. Alejandre, A. Ballester-Bolinches, J. Cossey, M. Pedraza-Aguilera // Rev. Mat. Iberoamericana. – 2004. – Vol. 20. – P. 413–425.

7. *Guo*, *W.* Criterions of supersolubility for products of supersoluble groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Publ. Math. Debrecen. – 2006. – Vol. 68, № 3–4. – P. 433–449.

8. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

9. *Васильев*, *А.Ф.* О произведениях $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп в конечных группах / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2012. – Т. 53, № 1. – С. 59–67.

10. *Мурашко*, *В.И.* О произведениях частично субнормальных подгрупп конечных групп / В.И. Мурашко, А.Ф. Васильев // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2012. – № 70 (4). – С. 24–27.

11. *Васильев*, *А.Ф.* О пермутируемых подгруппах конечных групп / А.Ф. Васильев, В.А. Васильев, Т.И. Васильева // Сиб. мат. журн. – 2014. – Т. 55, № 2. – С. 285–295.

12. *Монахов*, *В.С.* Конечные группы, факторизуемые субнормальными сверхразрешимыми подгруппами / В.С. Монахов, И.К. Чирик // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 3 (28). – С. 40–46.

13. *Монахов*, *В.С.* О сверхразрешимом корадикале произведения субнормальных сверхразрешимых подгрупп / В.С. Монахов, И.К. Чирик // Сиб. мат. журн. – 2017. – Т. 58, № 2. – С. 353–364.

14. *Васильев*, *А.Ф.* Об абнормально факторизуемых конечных разрешимых группах / А.Ф. Васильев // Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54, № 9. – С. 1163–1171.

15. *Vasil'ev*, *A.F.* On Products of Nonnormal Subgroups of Finite Groups / A.F. Vasil'ev // Acta Applicandae Mathematicae. – 2005. – Vol. 85, № 1. – P. 305–311.

16. *Between Nilpotent and Solvable* / H.G. Bray [at al.]; edited by M. Weinstein. – Passaic: Polugonal Publishing House, 1982. – 240 p.

17. *Rose*, *J.S.* Nilpotent Subgroups of Finite Soluble Groups / J.S. Rose // Math. Z. – 1968. – Vol. 106. – P. 97–112.

18. *Mann*, *A.* On subgroups of finite soluble groups. III / A. Mann // Israel J. Math. – 1973. – T. 16, № 4. – P. 446–451.

19. *Васильев*, *А.Ф.* Нормализаторные подгрупповые функторы конечных групп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Вестн. Бел. гос. ун-та. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. – 2006. – № 1. – С. 92–96.

20. *Васильева*, *Т.И.* О построении $\pi$-классов Шунка конечных $\pi$-разрешимых групп / Т.И. Васильева, А.И. Прокопенко // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 2 (19). – С. 38–41.

21. *Wielandt*, *H.* Über Normalstruktur von mehrfach factorisierbaren Gruppen / H. Wielandt // Austral. Math. Soc. – 1960. – Vol. 1. – P. 143–146.

22. *Doerk*, *K.* Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen / K. Doerk // Math. Z. – 1966. – Vol. 91. – P. 198–205.

23. *Frisen*, D.R. Products of normal supersolvable subgroups / D.R. Frisen // Proc. Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol. 30. – P. 46–48.

*Поступила в редакцию* 11.05.2020.