

УДК 517.52

## О СОВПАДЕНИИ ОБОБЩЁННЫХ МОДУЛЕЙ ГЛАДКОСТИ НА НЕКОТОРОМ КЛАССЕ ФУНКЦИЙ

Г.Н. Казимиров

*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*

## ON THE COINCIDENCE OF GENERALIZED SMOOTHNESS MODULES ON SOME CLASS OF FUNCTIONS

G.N. Kazimirov

*F. Scorina Gomel State University*

Доказывается совпадение обобщённых модулей гладкости  $k$ -го порядка, определяемых при помощи оператора обобщённого сдвига, с разными и одинаковыми сдвигами.

**Ключевые слова:** оператор обобщённого сдвига, обобщённый модуль гладкости.

The coincidence of generalized modules of smoothness of order  $k$ , determined with the help of the generalized shift operator, with different and identical shifts is proved.

**Keywords:** generalized shift operator, generalized modulus of smoothness.

### Введение

Хорошо известны прямые и обратные теоремы теории приближений для  $2\pi$ -периодических функций, в которых установлены связи между наилучшими приближениями и модулями гладкости этих функций. Такие же теоремы получены и для непериодических функций, однако в них, вместо обычного модуля гладкости, фигурирует обобщённый модуль гладкости, определяемый при помощи некоторого оператора обобщённого сдвига. Некоторые из таких операторов были предложены М.К. Потаповым [1]. Им же были доказаны прямые и обратные теоремы для модулей гладкости (модулей непрерывности) порядка  $k = 1$ . Для случая  $k > 1$  эти теоремы получены Г.Н. Казимировым [2], [3]. Но в этих теоремах рассматриваются обобщённые модули гладкости, в которых обобщённые сдвиги берутся с разными шагами для каждой следующей обобщённой разности. Хотелось бы получить такие же теоремы и для обобщённых модулей, в которых каждая следующая разность берётся с одним и тем же шагом. В данной статье сделан первый шаг в этом направлении.

### 1 Используемые определения и леммы

Будем говорить, что  $f \in L_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , если функция  $f$  измерима на отрезке  $[-1, 1]$  и

$$\|f\|_p = \left( \int_{-1}^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty,$$

а для  $p = \infty$  функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[-1, 1]$  и  $\|f\|_\infty = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|$ . Через  $L_{p,\alpha,\beta}$  обозначим множество таких функций  $f$ , что

$$f(x)(1-x)^\alpha(1-x)^\beta \in L_p$$

$$\text{и } \|f\|_{p,\alpha,\beta} = \|f(x)(1-x)^\alpha(1-x)^\beta\|_p.$$

Рассмотрим один из операторов обобщённого сдвига, предложенных в [1]. Положим

$$T_t(f, x) = \frac{1}{2} \left[ f(x \cos t + \sqrt{1-x^2} \sin t) + f(x \cos t - \sqrt{1-x^2} \sin t) \right]. \quad (1.1)$$

Введём также обозначения:

$$\Delta_t^1(f, x) = T_t(f, x) - f(x),$$

$$\Delta_{t_1, \dots, t_k}^k(f, x) = \Delta_{t_k}^1(\Delta_{t_1, \dots, t_{k-1}}^{k-1}(f, x), x), \quad k = 2, 3, \dots,$$

$$\tilde{\omega}_k(f, \delta)_{p,\alpha,\beta} = \sup_{|t_i| \leq \delta, i=1, \dots, k} \|\Delta_{t_1, \dots, t_k}^k(f, x)\|_{p,\alpha,\beta},$$

$$\Delta_t^k(f, x) = \Delta_t^1(\Delta_t^{k-1}(f, x), x), \quad k = 2, 3, \dots,$$

$$\omega_k(f, \delta)_{p,\alpha,\beta} = \sup_{|t| \leq \delta} \|\Delta_t^k(f, x)\|_{p,\alpha,\beta}.$$

**Лемма 1.1.** Пусть числа  $p, \alpha, \beta$  такие, что

$$1 \leq p \leq \infty, \quad \alpha = \beta = -\frac{1}{2p}$$

при  $1 \leq p < \infty$  и  $\alpha = \beta = 0$  при  $p = \infty$ . Тогда, если  $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ , то  $T_t(f, x) \in L_{p,\alpha,\beta}$  и

$$\|T_t(f, x)\|_{p,\alpha,\beta} \leq C \|f\|_{p,\alpha,\beta},$$

где постоянная  $C$  не зависит от  $f$  и  $t$ .

Лемма 1.1 доказана в [1, с. 235–236].

### 2 Основной результат

**Теорема 2.1.** Пусть даны числа  $p, \alpha, \beta, k$

такие, что  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $\alpha = \beta = -\frac{1}{2p}$  при  $1 \leq p < \infty$

и  $\alpha = \beta = 0$  при  $p = \infty$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Пусть также  $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ . Если существует функция  $g$ , такая, что

$$\sup_{|t| \leq \pi} |g(t)| < +\infty \text{ и } T_t(f, x) = f(x)g(t) \quad \forall x \in [-1, 1], \quad \forall t \in [-\pi, \pi], \quad (2.1)$$

то

$$\tilde{\omega}_k(f, \delta)_{p,\alpha,\beta} = \omega_k(f, \delta)_{p,\alpha,\beta}.$$

**Доказательство.** Заметим, что  $T_{-t}(f, x) = T_t(f, x)$ . Поэтому достаточно рассмотреть случай  $t \in [0, \pi]$ . В силу Леммы 1.1 числа  $\tilde{\omega}_k(f, \delta)_{p,\alpha,\beta}$  и  $\omega_k(f, \delta)_{p,\alpha,\beta}$  существуют. В силу условия

$$\Delta_t^1(f, x) = f(x)g(t) - f(x) = f(x)(g(t) - 1),$$

$$\Delta_t^k(f, x) = f(x)(g(t) - 1)^k,$$

$$\Delta_{t_1, \dots, t_k}^k(f, x) = f(x)(g(t_1) - 1) \cdot \dots \cdot (g(t_k) - 1).$$

Тогда

$$\tilde{\omega}_k(f, \delta)_{p,\alpha,\beta} = \sup_{0 \leq t_i \leq \delta} |g(t_1) - 1| \cdot \dots \cdot |g(t_k) - 1| \|f\|_{p,\alpha,\beta},$$

$$i = 1, \dots, k,$$

$$\omega_k(f, \delta)_{p,\alpha,\beta} = \sup_{0 \leq t \leq \delta} |g(t) - 1|^k \|f\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Поскольку для  $a \geq 0$

$$\sup_{a \leq z \leq b} z^k = \sup_{a \leq z_i \leq b} z_1 \cdot \dots \cdot z_k, \quad i = 1, \dots, k,$$

то теорема доказана.  $\square$

**Пример 2.1.** Пусть

$$f(x) = \cos(n \arccos x) = P_n(x)$$

полиномы Чебышёва. Тогда

$$T_t(P_n, x) = \frac{1}{2} \left[ P_n(x \cos t + \sqrt{1-x^2} \sin t) + P_n(x \cos t - \sqrt{1-x^2} \sin t) \right].$$

Положим  $x = \cos \theta$ . Если  $\theta \in [0, \pi]$ , то  $x \in [-1, 1]$ .

Поэтому

$$T_t(P_n, \cos \theta) = \frac{1}{2} [P_n(\cos(\theta-t)) + P_n(\cos(\theta+t))] =$$

$$T_t(P_n, \cos \theta) = \frac{1}{2} [\cos n(\arccos(\cos(\theta-t))) + \cos n(\arccos(\cos(\theta+t)))].$$

Если  $\theta - t, \theta + t \in [0, \pi]$ , то

$$T_t(P_n, \cos \theta) = \frac{1}{2} [\cos n(\theta-t) + \cos n(\theta+t)] =$$

$$T_t(P_n, \cos \theta) = \cos n\theta \cdot \cos nt = P_n(\cos \theta) \cdot \cos nt,$$

или  $T_t(P_n, x) = P_n(x) \cdot g(t)$ , где  $g(t) = \cos nt$ .

Если  $\theta + t \in [\pi, 2\pi]$ , то  $2\pi - (\theta + t) \in [0, \pi]$  и  $\cos(\theta + t) = \cos(2\pi - (\theta + t))$ .

Поэтому  $\arccos(\cos(\theta + t)) = 2\pi - (\theta + t)$ . Следовательно

$$\cos n(\arccos(\cos(\theta + t))) = \cos(2\pi n - n(\theta + t)) = \cos n(\theta + t).$$

Если  $\theta - t \in [-\pi, 0]$ , то

$$\cos(\theta - t) = \cos(-(t - \theta)) = \cos(t - \theta),$$

где  $t - \theta \in [0, \pi]$ .

Таким образом,

$$\cos n(\arccos(\cos(\theta - t))) = \cos(n(t - \theta)) = \cos n(\theta - t).$$

Итак,

$$T_t(P_n, x) = P_n(x) \cdot g(t) \quad \forall x \in [-1, 1], \quad \forall t \in [0, \pi]$$

и  $\sup_{t \in [0, \pi]} |g(t)| = 1 < +\infty$ .

**Пример 2.2.** Положим  $f(x) = \sin(n \arccos x)$ .

Так же, как и в примере 2.1, получаем

$$T_t(f, \cos \theta) = \frac{1}{2} [\sin n(\theta-t) + \sin n(\theta+t)] = \sin n\theta \cos nt,$$

или

$$T_t(f, x) = f(x) \cdot g(t) \quad \forall x \in [-1, 1], \quad \forall t \in [0, \pi].$$

### Заключение

Таким образом, в статье доказано совпадение обобщённых модулей гладкости, определяемых при помощи оператора обобщённого сдвига вида (1.1), в которых обобщённые разности рассматриваются с разными и одинаковыми шагами для функций, удовлетворяющих условию (2.1). Примерами функций, удовлетворяющих условию (2.1), являются алгебраические многочлены Чебышёва и функции из примера 2.2, которые не являются многочленами.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Потапов, М.К. Об условиях совпадения некоторых классов функций / М.К. Потапов // Труды Семинара им. И.Г. Петровского. – 1981. – Вып. 6. – С. 223–238.
2. Казимиров, Г.Н. О теоремах Джексона для  $k$ -го обобщённого модуля гладкости / Г.Н. Казимиров. – 40 с. – Деп. в ВИНТИ РАН 27.12.94, № 3054-В94.
3. Казимиров, Г.Н. Эквивалентная структурная характеристика данного обобщённого модуля гладкости / Г.Н. Казимиров // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 3 (4). – С. 49–51.

Поступила в редакцию 29.04.2020.