К устойчивости ядерной энергетической установки с циркулирующим горючим

В. Д. ГОРЯЧЕНКО

УДК 621.039.515

Рассматривается ядерная энергетическая установка с циркулирующим несжимаемым горючим. Активная зона реактора идеализируется системой с сосредоточенными параметрами, а теплообменник — звеном с распределенными параметрами. Доказывается устойчивость в малом стационарного режима работы такой установки. Для частного случая, когда ценность запаздывающих нейтронов пренебрежимо мала, доказывается устойчивость по отношению к произвольным отклонениям от состояния равновесия.

Описание математической модели

Устойчивость реакторов с циркулирующим топливом рассматривалась ранее в работах [1—4], в которых были приняты следующие предположения: 1) теплообменник не влияет на динамику установки, и, следовательно, температура горючего на входе в активную зону постоянна; 2) запаздывающие нейтроны отсутствуют. (Влияние запаздывающих нейтронов было учтено лишь для идеализированной модели реактора с постоянным отводом тепла [1, 4].) На практике эти предположения обычно не выполняются, поэтому в настоящей работе учитывается влияние на динамику как запаздывающих нейтронов, так и теплообменника.

Схема рассматриваемой установки приведена на рисунке. Делящееся вещество, которое является также теплоносителем, циркулирует по замкнутому контуру, проходя последовательно активную зону реактора и внешний контур циркуляции (теплообменник).

Упрощенная схема установки с циркулирующим горючим.

Для составления математической модели активной зоны предположим, что: 1) реактор с отрицательным температурным коэффициентом реактивности ε работает в режиме саморегулирования; 2) реактивность реактора зависит только от температуры горючего T; 3) горючее в активной зоне реактора полностью перемешивается, и поэтому можно считать, что все переменные, характеризующие активную зону, не зависят от пространственных координат * (вне активной зоны такое перемешивание не происходит); 4) тепловыделение в активной зоне пропорционально плотности нейтронов N; 5) горючее несжимаемо, а его плотность и теплоемкость постоянны; 6) излучатели запаздывающих нейтронов можно характеризовать одной (эквивалентной) группой с постоянной распада λ.

В результате этих предположений уравнения динамики активной зоны будут иметь вид:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{k-\beta}{l} N + \lambda C; \qquad (1)$$

$$k = k_0 - \varepsilon (T - T_0); \qquad (2)$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\beta}{l} N - \lambda C - \frac{C}{\tau_1} + \frac{C(t-\tau_2)}{\tau_1} e^{-\lambda \tau_2}; \qquad (3)$$

$$\tau_1 \frac{dT}{dt} = T_{\text{вх}} - T + a_1 N. \qquad (4)$$

Здесь k — реактивность; τ_1 и τ_2 — время прохождения горючего через активную зону и внешний контур соответственно; a_1 — константа.

* Примером такой установки может служить исследовательский реактор HRE [5]. Активная зона реактора HRE представляет собой сферу диаметром около 45 *см*, причем горючее поступает в активную зону по касательной, что вызывает образование завихрений и способствует более быстрому перемешиванию горючего.

Уравнение (1) — обычное уравнение баланса нейтронов [6]; уравнение (3) — видоизмененное уравнение излучателей запаздывающих нейтронов, которое содержит члены, характеризующие уход и возвращение в активную зону излучателей запаздывающих нейтронов; уравнение (4) выражает тепловой баланс горючего внутри активной зоны.

Назовем отношение $\xi = \frac{\beta - k_0}{\beta}$ коэффициентом ценности запаздывающих нейтронов. Для рассматриваемой модели из уравнений (1) — (3), записанных для стационарного режима, получим

$$\xi = \frac{\beta - k_0}{\beta} = \frac{\lambda\tau_1}{\lambda\tau_1 + 1 - e^{-\lambda\tau_2}}. \qquad (5)$$

В отличие от реакторов с неподвижным топливом, где $\xi = 1$, в данном случае происходит уменьшение ценности запаздывающих нейтронов ($\xi < 1$), обусловленное тем, что часть этих нейтронов испускается вне активной зоны и не участвует в реакции деления.

Предположим, что внешний контур циркуляции состоит из теплообменника, представляющего собой линейное звено с распределенными параметрами. Пусть $\Phi(p)$ — коэффициент передачи теплообменника по температуре, а $\varphi(t)$ — обратное преобразование Лапласа от $\Phi(p)$. В дальнейшем будем считать, что $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям

$$\varphi(t) \geqslant 0; \qquad (6)$$

$$\int_0^\infty \varphi(t)\,dt < 1. \qquad (7)$$

В остальном свойства функции $\varphi(t)$ произвольны.

Справедливость этих неравенств становится очевидной, если учесть, что $\varphi(t)$ характеризует изменение температуры горючего на выходе из теплообменника при импульсном изменении температуры на его входе, т. е. при $T(t) - T_0 = \delta(t)$. Действительно, при прохождении по первому контуру частицы горючего, несущей δ-импульс тепла, температура среды второго контура теплообменника повысится. Следующие за этой частицей другие частицы горючего отдадут свое тепло более нагретой среде второго контура. Следовательно, от этих частиц будет отводиться меньше тепла, чем при стационарном режиме, а их температура окажется выше стационарной. Это и означает, что $\varphi(t) > 0$. Далее, дополнительное количество тепла на входе в теплообменник, обусловленное импульсным изменением температуры на входе, пропорционально интегралу $\int_0^\infty \delta(t)\,dt = 1$, а соответствующее количество тепла на выходе из теплообменника пропорционально интегралу $\int_0^\infty \varphi(t)\,dt$ при том же самом коэффициенте пропорциональности. Так как часть тепла отводится во второй контур, то

$$\int_0^\infty \varphi(t)\,dt < \int_0^\infty \delta(t)\,dt = 1.$$

Заметим, что строгое аналитическое доказательство неравенств (6) и (7) связано с большими трудностями, поскольку в случае распределенного теплообменника конкретное выражение для $\Phi(p)$ оказывается весьма сложным [7]. Насколько известно, строгое доказательство этих неравенств в литературе отсутствует, исключение составляет лишь частный случай, когда температура второго контура теплообменника и коэффициент теплопередачи от первого контура ко второму постоянны. Как нетрудно убедиться, в этом случае

$$\Phi(p) = e^{-\alpha\tau_2 - p\tau_2};$$
$$\varphi(t) = e^{-\alpha\tau_2}\delta(t - \tau_2),$$

следовательно, неравенства (6) и (7) выполняются (положительная постоянная α пропорциональна коэффициенту теплопередачи от первого контура ко второму).

Линеаризованная система и характеристическое уравнение

Докажем, что рассматриваемая установка устойчива по крайней мере в малом. Перейдем в уравнениях (1) — (4) к малым отклонениям переменных от их равновесных значений:

$$y = \frac{N - N_0}{N_0}; \; y_1 = \frac{C - C_0}{C_0}; \; z = T - T_0;$$
$$z_{\text{вх}} = T_{\text{вх}} - T_{\text{вх}\,0}. \qquad (8)$$

Введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned} &\tau = \frac{t}{\tau_1};\\ &a = a_1 N_0; \; A = \frac{\varepsilon}{\beta_{\text{эфф}}}; \; \beta_{\text{эфф}} = \xi\beta;\\ &\sigma = \lambda\tau_1; \; \mu = \frac{\tau_2}{\tau_1};\\ &\xi = \frac{\lambda\tau_1}{\lambda\tau_1 + 1 - e^{-\lambda\tau_2}} = \frac{\sigma}{1 + \sigma - e^{-\mu\sigma}}. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

В итоге получим линеаризованную систему уравнений для активной зоны:

$$\frac{l}{\tau_1 \xi \beta} \cdot \frac{dy}{d\tau} = y_1 - y - Az; \quad (10)$$

$$\frac{dy_1}{d\tau} = \frac{\sigma}{\xi} (y - y_1) - e^{-\mu\sigma} [y_1 - y_1 (\tau - \mu)]; \quad (11)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = z_{\text{вх}} - z + ay, \quad (12)$$

где $z_{\text{вх}}$ — изменение температуры горючего на входе в активную зону (на выходе из теплообменника):

$$z_{\text{вх}} (\tau) = \int\limits_0^\tau \varphi (\tau - x) z (x) dx. \quad (13)$$

Уравнения (10) — (13) составляют полную линеаризованную систему уравнений динамики рассматриваемой установки.

Составим характеристическое уравнение системы (10) — (13), пренебрегая временем жизни мгновенных нейтронов. Такое пренебрежение допустимо потому, что в практически интересных случаях параметр $\frac{l}{\tau_1 \xi \beta}$ мал *, а условие несущественности этого параметра в данном случае выполняется [8]. Применив к уравнениям (10) — (13) преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях и составив характеристический детерминант системы, получим характеристическое уравнение

$$\frac{\sigma}{\xi} = (p + 1 + \sigma - e^{-\mu\sigma - \mu p}) \left[1 + \frac{aA}{p + 1 - \Phi (p)} \right]. \quad (14)$$

Доказательство устойчивости в малом

В уравнение (14) входят параметры σ, μ, a, A и параметры теплообменника, содержащиеся в $\Phi (p)$. (Коэффициент ценности ξ, согласно уравнению (9), зависит от μ и σ.) Докажем, что при отрицательном температурном коэффициенте реактивности ($A > 0$) рассматриваемая система устойчива в малом при любых физически реализуемых (положительных) значениях параметров μ, σ и a. Предварительно заметим, что

$$Re\, \Phi (j\omega) < 1; \quad (15)$$

$$Re\, \Phi (u + jV) < 1 \text{ при } u > 0. \quad (16)$$

Действительно, в соответствии с выражениями (6) и (7)

$$Re\, \Phi (j\omega) \leqslant | \Phi (j\omega) | = \left| \int\limits_0^\infty \varphi (t) e^{-j\omega t} dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\infty | \varphi (t) | dt < 1.$$

Аналогично, обозначив $e^{-ut} \varphi (t)$ через $\psi (t)$, получим

$$Re\, \Phi (u + jv) \leqslant | \Phi (u + jv) | = \left| \int\limits_0^\infty \psi (t) e^{-jvt} dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\infty | \psi (t) | dt < \int\limits_0^\infty \varphi (t) dt < 1,$$

поскольку при $u > 0$ в каждый момент времени $0 < \psi (t) < \varphi (t)$.

Составим формулы D-разбиения [9] плоскости действительных параметров μ и σ. Примем в выражении (14) $p = j\omega$ и разделим мнимую и действительную части, тогда получим уравнение D-кривой в виде

$$\left.\begin{aligned} &aA \frac{[1 - Re\, \Phi (j\omega)] (1 + \sigma - e^{-\mu\sigma} \cos \mu\omega) + [\omega - Im\, \Phi (j\omega)] (\omega + e^{-\mu\sigma} \sin \mu\omega)}{[1 - Re\, \Phi (j\omega)]^2 + [\omega - Im\, \Phi (j\omega)]^2} + e^{-\mu\sigma} (1 - \cos \mu\omega) = 0; \\ &aA \frac{[1 - Re\, \Phi (j\omega)] (\omega + e^{-\mu\sigma} \sin \mu\omega) - [\omega - Im\, \Phi (j\omega)] (1 + \sigma - e^{-\mu\sigma} \cos \mu\omega)}{[1 - Re\, \Phi (j\omega)]^2 + [\omega - Im\, \Phi (j\omega)]^2} + \omega + e^{-\mu\sigma} \sin \mu\omega = 0, \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

где действительный параметр ω принимает все положительные значения от нуля до бесконечности. Помимо D-кривой (17) D-разбиение включает в себя особую кривую

$$1 + \sigma - e^{-\mu\sigma} = 0, \quad (18)$$

соответствующую значению $\omega = 0$.

Очевидно, что особая кривая лежит вне области $\sigma > 0$, $\mu \geqslant 0$, так как в этой области $1 + \sigma - e^{-\mu\sigma} > 0$. Докажем, что D-кривая также располагается вне этой области. Рассмотрим уравнения (17). В зависимости от конкретных значений μ, σ и ω возможны четыре случая:

$$\left.\begin{aligned} &\omega - Im\, \Phi (j\omega) \leqslant 0; \\ &\omega + e^{-\mu\sigma} \sin \mu\omega \geqslant 0. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

* Как правило, $l \approx 10^{-5} \div 10^{-4}$ *сек*, $\tau \geqslant 1$ *сек*, $0,5 < \xi < 1$ и, следовательно, $\frac{l}{\tau_1 \xi \beta} \leqslant 10^{-2}$.

В силу выражения (15) $1 - Re\Phi(j\omega) > 0$ и, следовательно, ни в одном из этих четырех случаев одновременное выполнение равенств (17) невозможно (при положительных μ, σ, a и A). Именно, если неравенства (19) имеют одинаковый смысл, то не будет удовлетворяться первое уравнение системы (17); если же неравенства (19) противоположного смысла, то не будет выполняться второе уравнение (17). Таким образом, ни особая прямая (18), ни D-кривая (17) не лежат в области $\mu \geqslant 0$, $\sigma > 0$. Следовательно, для доказательства устойчивости установки достаточно показать, что все корни характеристического уравнения (14) имеют отрицательные действительные части в какой-либо одной точке области $\mu \geqslant 0$, $\sigma > 0$. В качестве такой точки выберем точку с координатами $\mu = 0$ (σ — некоторое положительное число). При этом характеристическое уравнение (14) будет иметь вид

$$\sigma = (p+\sigma)\left[1 + \frac{aA}{p+1-\Phi(p)}\right]. \qquad (20)$$

Предположим противное: пусть уравнение (20) имеет корни с положительной действительной частью и $p = u + jv$ — один из таких корней ($Re\, p = u > 0$). Подставим $p = u + jv$ в (20) и разделим мнимую и действительную части. В результате получим систему тождеств:

$$\frac{u+\sigma}{1+U} = -\frac{v}{V}; \quad u + (u+\sigma)U = vV, \qquad (21)$$

где

$$\left.\begin{aligned} U &= aA\frac{u+1-Re\,\Phi(u+jv)}{[u+1-Re\,\Phi(u+jv)]^2+[v-Im\,\Phi(u+jv)]^2};\\ V &= aA\frac{-v+Im\,\Phi(u+jv)}{[u+1-Re\,\Phi(u+jv)]^2+[v-Im\,\Phi(u+jv)]^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Согласно неравенству (16), $U > 0$ и, следовательно, левые части в системе (21) всегда положительны. Последнее означает, что, какими бы ни были знаки v и V, одновременное выполнение тождеств (21) невозможно. Следовательно, характеристическое уравнение (20) не имеет корней с положительной действительной частью, а выбранная нами точка плоскости μ, σ принадлежит области устойчивости. Таким образом, устойчивость в малом доказана.

Реактор без запаздывающих нейтронов

Исходная (нелинейная) система в этом предельном случае имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{l}{\tau_1}\cdot\frac{dy}{d\tau} &= -\varepsilon z(1+y);\\ \frac{dz}{d\tau} &= z_{\text{вх}} - z + ay. \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Здесь легко доказать устойчивость рассматриваемой установки по отношению к произвольным отклонениям переменных от состояния равновесия, т. е. устойчивость в целом. Составим коэффициент передачи $G(p)$ от мощности к реактивности, взятой с обратным знаком. С точностью до постоянных положительных множителей

$$G(p) = \frac{1}{p+1-\Phi(p)}. \qquad (24)$$

Согласно критерию Велтона — Сметса [10], для устойчивости реактора достаточно, чтобы

$$Re\,G(j\omega) > 0 \text{ при всех } \omega > 0. \qquad (25)$$

После подстановки $p = j\omega$ в (24) получим

$$Re\,G(j\omega) = \frac{1 - Re\,\Phi(j\omega)}{[1-Re\,\Phi(j\omega)]^2 + [\omega - Im\,\Phi(j\omega)]^2} > 0$$

в силу уравнения (15). Следовательно, устойчивость в целом доказана.

Автор благодарен Н. А. Железцову и Е. Ф. Сабаеву за критические замечания и внимание к настоящей работе.

Поступила в Редакцию 8/XII 1965 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Ergen. J. Appl. Phys., **25**, 6, 702 (1954).
2. W. Ergen, A. Weinberg. Physica, **20**, 7, 413 (1954).
3. J. Fleck. BNL-357, 1955.
4. R. Figueuredo. Доклад № 1815, представленный на Вторую международную конференцию по мирному использованию атомной энергии (Женева, 1958).
5. У. Р. Харпер. Основные принципы реакторов деления. Гл. 10. М., Госатомиздат, 1963.
6. М. А. Шульц. Регулирование энергетических ядерных реакторов. М., Изд-во иностр. лит., 1957.
7. Б. Н. Девятов. «Докл. АН СССР», **130**, 68 (1960).
8. А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. В сб. «Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы». М., «Наука», 1964.
9. Ю. И. Неймарк. Устойчивость линеаризованных систем. Л., Изд. Ленинградской военно-воздушной инженерной академии, 1949.
10. H. Smets. J. Appl. Phys., **30**, 1623 (1959).