

Этот факт еще раз свидетельствует о том, что в данном случае нет циклотронного ускорения, при котором замена бегущей волны на стоячую не должна изменять конечной энергии.

Таким образом, экспериментальные данные указывают на существование авторезонансного механизма ускорения и хорошо согласуются как с теоретическими положениями, установленными в работах [1—4], так и данными настоящей работы. Электроны, ускоряющиеся в таком ускорителе, могут найти применение в технике, в частности для эффективной инжекции частиц в магнитные ловушки [5, 6].

Поступила в Редакцию 5/IX 1966 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев. «Докл. АН СССР», 145, 1259 (1962).
2. А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев. ЖЭТФ, 44, 261 (1963).
3. А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев. В кн. «Труды Международной конференции по ускорителям (Дубна, 1963)». М., Атомиздат, 1964, стр. 1030.
4. В. Я. Давыдовский. ЖЭТФ, 43, 886 (1962).
5. Б. С. Акшанов, Ю. Я. Волколупов, К. Д. Синельников. ЖЭТФ, 36, 595 (1966).
6. Б. С. Акшанов, Ю. Я. Волколупов, К. Д. Синельников. ЖЭТФ, 36, 603 (1966).

Использование принципа максимума Л. С. Понтрягина в задачах о минимуме критических размеров и максимуме мощности реактора

Т. С. ЗАРИЦКАЯ, А. П. РУДИК

УДК 621.039.50

Принцип максимума Л. С. Понтрягина используется для решения задач о нахождении минимальных критических размеров при заданной мощности реактора и нахождении максимальной мощности реактора при заданных критических размерах.

В последнее время принцип максимума Л. С. Понтрягина [1] успешно используется как при определении оптимальных переходных режимов реакторов [2—4], так и при нахождении оптимальных пространственных компоновок реакторов, обладающих требуемыми физическими характеристиками [5]. В настоящей работе этот принцип используется еще в двух задачах, встречающихся в теории проектирования реакторов.

Постановка задачи о минимуме критических размеров при заданной мощности реактора

Предполагается, что задана мощность реактора W , а конструкционные материалы распределены равномерно по объему реактора. Резонансное поглощение и поглощение и размножение нейтронов в процессе замедления не учитываются. Принимается, что концентрацию $U(z)$ урана можно менять по объему реактора в пределах

$$0 \leq U(z) \leq U_{\text{макс}}. \quad (1)$$

Удельная мощность $\rho(z) \equiv N(z) U(z)$ единицы объема реактора ограничена:

$$\rho = N(z) U(z) - D \leq 0, \quad (2)$$

где $N(z)$ — плотность тепловых нейтронов в точке z ; D — постоянная. Требуется найти распределение $U(z)$, обеспечивающее мини-

мальные критические размеры реактора при заданной мощности W и соблюдении условий (1) и (2). Задача решается в двухгрупповом приближении для плоского симметричного реактора. Исходные уравнения, описывающие плотность тепловых $[N(z)]$ и замедляющихся $[n(z)]$ нейтронов, имеют обычный вид [6]

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 N}{dz^2} - \frac{1+U(z)}{L_0^2} N &= -n; \\ \frac{d^2 n}{dz^2} - \frac{n}{\tau} &= -\frac{\eta U}{\tau L_0^2} N, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где L_0^2 — квадрат длины диффузии среды с учетом конструкционных материалов, но без учета урана; τ — квадрат длины замедления (изменение τ при варьировании концентрации урана не учитывается); η — эффективное число рождающихся при делении нейтронов.

Метод Л. С. Понтрягина

Для использования математической теории оптимальных процессов [1] запишем уравнения (3) в виде четырех уравнений первого порядка, введя обозначения $x^{(1)} \equiv N$; $x^{(2)} \equiv \frac{dN}{dz}$; $x^{(3)} \equiv n$; $x^{(4)} \equiv \frac{dn}{dz}$ и добавив к ним уравнение для величины $x^{(5)}$, учитывающее, что мощность реактора задана и равна $W =$

$$= \int_0^H N(z) U(z) dz \quad (H \text{ — искомая полуширина})$$

реактора). В результате получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx^{(1)}}{dz} &= x^{(2)} \equiv f^{(1)}; \\ \frac{dx^{(2)}}{dz} &= \frac{1+U}{L_0^2} x^{(1)} - x^{(3)} \equiv f^{(2)}; \\ \frac{dx^{(3)}}{dz} &= x^{(4)} \equiv f^{(3)}; \\ \frac{dx^{(4)}}{dz} &= \frac{x^{(3)}}{\tau} - \frac{\eta U}{\tau L_0^2} x^{(1)} \equiv f^{(4)}; \\ \frac{dx^{(5)}}{dz} &= U x^{(1)} \equiv f^{(5)}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Функции $x^{(i)}$ удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} x^{(1)}(H) = x^{(3)}(H) = 0; \quad x^{(2)}(0) = x^{(4)}(0) = 0; \\ x^{(5)}(0) = 0; \quad x^{(5)}(H) = W. \end{aligned} \quad (5)$$

Гамильтониан системы (4) образуется по известному правилу [1]:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_{\alpha=1}^5 \psi_{\alpha} f^{(\alpha)} \equiv \chi + U\varphi; \\ \chi &= \psi_1 x^{(2)} + \frac{1}{L_0^2} \psi_2 x^{(1)} - \psi_3 x^{(3)} + \\ &+ \psi_4 x^{(4)} + \frac{1}{\tau} \psi_5 x^{(3)}; \\ \varphi &= x^{(1)} \left[\frac{1}{L_0^2} \left(\psi_2 - \frac{\eta}{\tau} \psi_4 \right) + \psi_5 \right], \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где вспомогательные функции ψ_i подчиняются уравнениям

$$\frac{d\psi_i}{dz} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^{(i)}} + \lambda \frac{\partial p}{\partial x^{(i)}}, \quad (7)$$

а функция p дается выражением (2). Функция λ определена следующим образом: если $p < 0$, то $\lambda \equiv 0$; если $p = 0$, то λ определяется из условия

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial U} = \lambda \frac{\partial p}{\partial U}. \quad (8)$$

Учитывая граничные условия (5) для функций $x^{(i)}$ и условия трансверсальности для функций ψ_i , получим граничные условия:

$$\psi_1(0) = \psi_3(0) = 0; \quad \psi_2(H) = \psi_4(H) = 0. \quad (8')$$

Принцип максимума Л. С. Понтрягина * тре-

* По терминологии работы [1], рассматриваемая задача на минимум критических размеров относится к классу задач на быстроедействие.

бует, что для отыскания оптимального распределения $U(z)$ необходимо найти такую непрерывную и тождественно не равную нулю вектор-функцию ψ (с компонентами ψ_i , $i = 1, \dots, 5$), чтобы, во-первых, гамильтониан $\mathcal{H}$ как функция аргумента U всюду в области $0 \leq z \leq H$ достигал супремума $\mathcal{H} = \sup_U \mathcal{H} \equiv M$; во-вторых, супремум гамильтониана $\mathcal{H}$ являлся бы постоянной положительной величиной; в-третьих, при существовании зоны с $p = 0$ в ней выполнялось условие $\lambda \geq 0$.

Допустимые типы управления

Принцип максимума Л. С. Понтрягина позволяет сразу определить допустимые виды управления, т. е. из какого типа зон, вид управления в которых известен, может состоять реактор. Очевидно, что в рассматриваемой задаче гамильтониан как функция аргумента U будет достигать супремума в следующих случаях:

$$1. U(z) = U_{\max}, \text{ если } \varphi(z) > 0.$$

$$2. U(z) = 0, \text{ если } \varphi(z) < 0.$$

$$3. U(z) = U_0(z),$$

где $U_0(z)$ определяется из условия $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial U} = 0$ (случай классического вариационного исчисления). Легко проверить, что при этом $\psi_i \equiv 0$, и поэтому зон с $U(z) = U_0(z)$ быть не может *.

4. $U(z) = \frac{D}{x^{(1)}(z)}$. Эта зона соответствует случаю, когда строго выполняется равенство в условии (2): $p = 0$.

Возможные компоновки двухзонного реактора

Теперь необходимо скомпоновать оптимальный реактор из зон трех допустимых типов: $U(z) = U_{\max}$, $U(z) = 0$ и $p = 0$. К сожалению, нет математического алгоритма нахождения оптимальной компоновки. Приходится проверять все возможные и выбирать ту, которая удовлетворяет принципу максимума Л. С. Понтрягина. Рассмотрим только двухзонный реактор (h — граница зон).

Ниже приводятся шесть возможных компоновок двухзонного реактора.

* Заметим, что поскольку функция $\varphi(z)$, согласно (6), — произведение функции, зависящей только от $x^{(i)}$, на функцию, зависящую только от ψ_i , то $U_0(z) \equiv 0$. Утверждение, что такой зоны не может быть, означает, что не может быть зоны $U(z) = 0$, в которой $\varphi(z) = 0$.

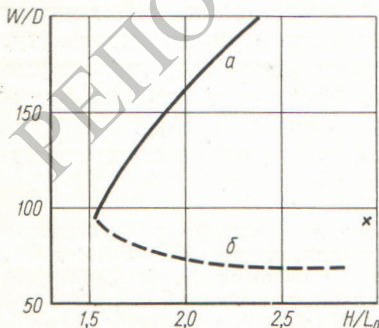
Компоновка	I	II	III	IV	V	VI
Первая зона ($0 \leq z \leq h$)	$p=0$	$p=0$	$U(z)=U_{\text{макс}}$	$U(z)=0$	$U(z)=U_{\text{макс}}$	$U(z)=0$
Вторая зона ($h \leq z \leq H$)	$U(z)=U_{\text{макс}}$	$U(z)=0$	$p=0$	$p=0$	$U(z)=0$	$U(z)=U_{\text{макс}}$

Очевидно, что компоновки III и IV не могут быть осуществлены вследствие граничных условий (5). Компоновка VI должна приводить к большим критическим размерам, чем компоновка V, в которой уран сосредоточен в центре. Таким образом, следует проанализировать компоновки I, II и V. Проанализируем компоновку I и покажем, что она является оптимальной. Кроме того, сравним критические размеры компоновок II и IV с критическими размерами компоновки I.

Оптимальная двухзонная компоновка

Решение системы уравнений для $x^{(i)}$. Системы уравнений (3) или (4) для $x^{(i)}$ легко могут быть решены аналитически. Не приводя довольно громоздкого решения, ограничимся лишь одним замечанием. В первой зоне при использовании условия $p=0$ система уравнений (3) перестает быть однородной относительно $N(z)$ и $n(z)$. Поэтому «сшивка» решений на границе зон в случае $z=h$ не приводит к уравнению критичности, т. е. не дает значения h . Граница зон h определяется из следующих соображений. По условиям постоянства гамильтониана и непрерывности функций $x^{(i)}$ и ψ_i как функций аргумента z , требуется, чтобы управление $U(z)$ было непрерывной функцией. Отсюда при $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U(h - \varepsilon) = U_{\text{макс}}. \quad (9)$$



Р и с. 1. Зависимость W/D от H/L_0 для компоновок I (a) и V (b) при $\eta = 1,07$; $\tau/L_0^2 = 0,01$ и $U_{\text{макс}} = 35,19$ (соответствует компоновке II).

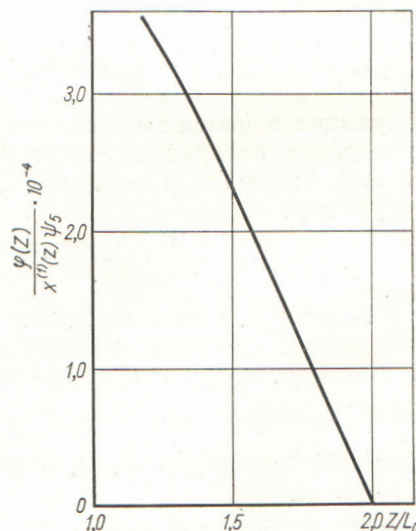
Очевидно, что приведенные рассуждения справедливы только в том случае, если $\varphi(h) \neq 0$. Как показано в следующем разделе, для оптимальной компоновки I $\varphi(h) \neq 0$.

Решение системы уравнений для ψ_i . Запишем в явном виде систему уравнений (7) для функций ψ_i :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dz} &= -\frac{1+U}{L_0^2} \psi_2 + \frac{\eta U}{\pi L_0^2} \psi_4 - U\psi_5 + \lambda U; \\ \frac{d\psi_2}{dz} &= -\psi_1; \\ \frac{d\psi_3}{dz} &= \psi_2 - \frac{\psi_4}{\tau}; \\ \frac{d\psi_4}{dz} &= -\psi_3; \\ \frac{d\psi_5}{dz} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

В первой зоне функция λ , согласно выражению (8), имеет вид

$$\lambda = \left[\frac{1}{L_0^2} \left(\psi_2 - \frac{\eta}{\tau} \psi_4 \right) + \psi_5 \right], \quad (11)$$



Р и с. 2. Вид функции $\varphi(z)/x^{(1)}(z)$ во второй зоне реактора для компоновки I.

т. е. функции ψ_i не зависят от U . Во второй зоне $\lambda = 0$, а в систему уравнений (10) входит $U(z) = U_{\text{макс}}$.

На рис. 1 приведена зависимость $W/D = f(H/L_0)$ для компонок I и V. Как показывают расчеты, для компоновки II критические размеры оказываются еще больше, чем для компоновки V (на рис. 1 дана одна из точек для компоновки II). На рис. 2 показана функция $\varphi(z)/x^{(1)}(z)$ во второй зоне реактора для компоновки I. Видно, что в этой зоне обеспечивается супремум гамильтониана. Кроме того, анализ показывает, что в первой зоне выполняется условие $\lambda > 0$. Таким образом, компоновка I действительно оптимальная.

Связь задачи

о минимуме критических размеров
с задачей о максимуме мощности

Выше была рассмотрена задача о минимуме критических размеров при заданной мощности реактора. Теперь рассмотрим обратную задачу: при заданных размерах реактора и указанных выше предположениях найдем компоновку, обеспечивающую максимальную мощность реактора. Покажем, что и в этом случае оптимальной будет компоновка I.

В чем заключается формальная разница при постановке этих двух задач?

В задаче о минимуме критических размеров отыскивается минимум функционала

$$J = + \int_0^H dz \text{ при заданном значении функционала } W = \int_0^H x^{(1)} U dz. \text{ В задаче о максимуме мощности задан функционал } J, \text{ а отыскивается максимум функционала } W. \text{ Прочие уравнения для } x^{(i)} \text{ в прямой и обратной задачах полностью совпадают.}$$

Определим, чем отличаются гамильтонианы и уравнения для ψ_i в этих задачах. Обозначим $J(z)$ через $x^{(0)}$, $W(z)$ через $x^{(5)}$. В прямой задаче добавка к гамильтониану

$$\Delta \mathcal{H}_{\text{пр}} = -\psi_0 + x^{(1)} U \psi_5, \quad (12)$$

в обратной

$$\Delta \mathcal{H}_{\text{обр}} = -\psi_0 + x^{(1)} U \psi_5, \quad (13)$$

т. е. вид гамильтониана в прямой и обратной задачах одинаков. Отсюда, согласно соотно-

шению (7), следует, что и системы уравнений для ψ_i тождественны. Сравним теперь граничные условия. В прямой задаче $x^{(0)}(0) = 0$; ψ_0 — неопределенная постоянная [$\psi_0 \leq 0$, поскольку отыскивается минимум $x^{(0)}(H)$]; $x^{(5)}(0) = 0$ и $x^{(5)}(H) = W$; ψ_5 — постоянная, определяемая из совместного решения уравнений для $x^{(i)}$ и ψ_i . Существенно отметить, что так как по одному из требований принципа максимума супремум гамильтониана должен быть постоянной положительной величиной, то оказывается, что $\psi_5 > 0$.

В обратной задаче $x^{(0)}(0) = 0$, $x^{(0)}(H) = H$, т. е. постоянная ψ_0 не определяется граничными условиями; $x^{(5)}(0) = 0$; ψ_5 — неопределенная постоянная [$\psi_5 > 0$, поскольку отыскивается максимум $x^{(5)}(H)$]. Таким образом, постоянные ψ_0 и ψ_5 в прямой и обратной задачах не определяются граничными условиями, а находятся как решения системы уравнений для $x^{(i)}$ и ψ_i . Поскольку эти решения однозначны, а системы тождественны, все $x^{(i)}$ и ψ_i (включая ψ_0 и ψ_5) одинаковы для обеих задач. Следовательно, решив задачу о минимуме критических размеров при заданной мощности, автоматически получаем решение задачи о максимуме мощности при заданных критических размерах.

Приведенные выше рассуждения справедливы, когда отыскивается оптимум любого функционала при заданном значении другого функционала: решения прямой и обратной задач совпадают. Однако в зависимости от знаков постоянных ψ_0 и ψ_5 возможны различные случаи: если $\psi_0 < 0$ и $\psi_5 > 0$, то в прямой задаче отыскивается минимум функционала $x^{(0)}$, а в обратной — максимум $x^{(5)}$; если $\psi_0 > 0$ и $\psi_5 > 0$, то в обеих задачах ищутся максимумы; если $\psi_0 < 0$ и $\psi_5 < 0$, в обеих задачах отыскиваются минимумы; если $\psi_0 > 0$ и $\psi_5 < 0$, то в прямой задаче ищется максимум, а в обратной — минимум.

В заключение следует отметить, что применение принципа максимума Л. С. Понтрягина позволило точно решить задачу о минимуме критических размеров реактора. Решение задачи разбивается на два этапа: строгое определение типов зон, из которых может состоять реактор, и компоновка реактора из этих зон. Последний этап не имеет алгоритма и сводится к проверке на оптимальность различных вариантов компонок.

Полученные результаты легко могут быть распространены на задачи с цилиндрической и сферической геометрией, а также на много-

групповые задачи. Однако учет резонансного поглощения в уране, по-видимому, потребует привлечения численных методов расчета и не позволит получить решения в аналитическом виде.

Авторы выражают глубокую благодарность В. Г. Болтянскому и Л. Н. Большеву за интересные разъяснения, касающиеся математической теории оптимальных процессов.

Поступила в Редакцию 27/VII 1966 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Понтрягин и др. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.
2. Joshikumi Shinohara, Jean Valat. C.r. Acad. Sci., 259, Groupe 6 (1964).
3. Z. Rosztoczy, L. Weaver. Nucl. Sci. and Engng, 20, 318 (1964).
4. J. Roberts, H. Smith. Nucl. Sci. and Engng, 22, 470 (1965).
5. Б. П. Кочуров. «Атомная энергия», 20, 243 (1966).
6. А. Д. Галанин. Теория ядерных реакторов на тепловых нейтронах. М., Атомиздат, 1959.

Быстрые кипящие реакторы с горючим в виде расплавленной соли

МЕЧИСЛАВ ТАУБЕ

(Институт ядерных исследований, Варшава — Жерань, ПНР)

УДК 621.039.526

Делается попытка классифицировать быстрые реакторы. Отдельно рассматриваются варианты быстрого реактора с жидким горючим в кипящем теплоносителе — растворителе. Оцениваются преимущества такого реактора, возможность его создания; приводятся основные характеристики реактора.

Характерной особенностью нынешнего этапа развития ядерной энергетики является то, что в области быстрых реакторов основное внимание уделяется реакторам с твердым (оксидным) горючим, охлаждаемым жидким металлом (натрием). Основные усилия сконцентрированы на дальнейшем усовершенствовании и внедрении реакторов этого типа в энергетику. Тем не менее заслуживают внимания исследования и разработки других типов реакторов, например с газовым и паровым теплоносителем. В частности, предлагается использовать гелий ($p \approx 70$ атм, $T \approx 660^\circ\text{C}$) [1, 2], а также водяной пар ($p \approx 170$ атм, $T \approx 540^\circ\text{C}$) [3]. Во всех упомянутых проектах в качестве горючего предполагается использовать окислы урана и плутония.

Существенное отличие имеет реактор с жидким горючим в виде трехкомпонентного сплава плутония (например, реактор LAMPRE-II) [4]. В стадии обсуждения и оценки находится реактор с жидким горючим в виде расплавленных хлоридов (UCl_3 , PuCl_3 , NaCl , MgCl_2 и др.). Известны два различных варианта реактора такого типа: 1) с косвенным охлаждением (через теплообменную систему) [4—7]; 2) с прямым охлаждением, когда отвод тепла теплоносителем (жидким свинцом) осуществ-

ляется за счет контактного теплообмена с жидкими хлоридами (горючим) [2, 4, 8].

Рассматривая возможные пути развития быстрых реакторов, нельзя не видеть возможности разработки других типов реакторов (табл. 1). В настоящей работе рассматривается быстрый реактор с жидким горючим и кипящим растворителем. В таком кипящем реакторе часть теплоносителя находится в жидком состоянии, а часть — в парообразном. Принципиально возможно осуществление нескольких вариантов таких реакторов (табл. 2); в конце 1965 г. было предложено два типа быстрых реакторов с кипящим теплоносителем, названных соответственно WARS [15] и SAWA [16].

Основные характеристики реакторов приведены в табл. 3. Отметим особенности, общие для обоих вариантов. Горючее в виде расплавленных хлоридов $\text{U}^{238}\text{Cl}_3$, $\text{Pu}^{239}\text{Cl}_3$; в качестве разбавителя NaCl ; температура плавления горючего $\sim 450^\circ\text{C}$; молярное соотношение $\text{U} : \text{Pu} = 4 : 1$; теплоемкость $\sim 0,30$ ккал/кг; удельный вес $\sim 5,0$ кг/л. Теплоноситель поступает в реактор в жидком виде. В активной зоне реактора при температуре $750\text{—}800^\circ\text{C}$ происходит кипение теплоносителя под давлением $20\text{—}40$ атм. Пар подается непосредственно в турбину или в теплообменник; парциальное давление хлоридов урана и плутония на шесть — восемь порядков ниже, чем теплоносителя. Теплоноситель химически инертен по отношению к компонентам горючего, но реагирует с некоторыми продуктами деления.