

О средней вероятности столкновения для конечных цилиндров и других выпуклых тел

В. А. ЖАРКОВ, В. П. ТЕРЕНТЬЕВ

УДК 539.125.5:539.121.7

В некоторых прикладных задачах теории переноса нейтронов, например при вычислении вероятности избежать резонансного поглощения, при вычислении коэффициента размножения на быстрых нейтронах, коэффициента использования тепловых нейтронов, коэффициента самоэкранирования и пр., необходимо знать величину P (P — средняя вероятность однократного столкновения нейтрона с веществом при равномерном распределении источников по объему тела).

В работе [1] была рассчитана и табулирована вероятность P для шара, бесконечного цилиндра, бесконечной пластины и эллипсоидов вращения. Данные для бесконечного цилиндра с хорошей степенью точности справедливы и для конечных цилиндров, высота которых существенно превышает радиус, а данные для пластины могут быть использованы в случае тонких дискообразных тел.

Однако на практике часто приходится иметь дело с телами иной конфигурации, например с цилиндрами, у которых отношение высоты к диаметру не очень сильно отличается от единицы. В настоящей работе исследовано поведение вероятности для конечных цилиндров $P_{к.ц}$ и даны некоторые рекомендации по расчету P для тел произвольной формы.

Вероятность для тела произвольной конфигурации $P_{пр}$ удобно рассматривать в зависимости от величины $a = \frac{4V}{S}$, где Σ — сечение взаимодействия нейтронов; V и S — объем и площадь поверхности тела. В таких координатах значения вероятности P для тел различных геометрий сравнительно близки между собой, что видно из таблицы, в которой, в частности, приведены величины P для шара ($P_{ш}$), бесконечной пластины ($P_{пл}$) и бесконечного цилиндра ($P_{б.ц}$). Вероятность столкновения находится из соотношения

$$P = \frac{\Sigma}{V} \int_V d\mathbf{r} \int_V d\mathbf{r}' \frac{e^{-\Sigma|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}$$

Средняя вероятность однократного столкновения

a	$P_{ш}$	$P_{пл}$	$P_{к.ц}$			$P_{б.ц}$	$P_{пр}$
			$\alpha=1$	$\alpha=2$	$\alpha=4$		
0,2	0,104	0,163	0,109	0,110	0,114	0,115	0,094
0,4	0,193	0,260	0,210	0,209	0,210	0,207	0,176
0,6	0,270	0,334	0,295	0,292	0,289	0,284	0,248
0,8	0,336	0,393	0,366	0,361	0,357	0,350	0,312
1,0	0,393	0,443	0,425	0,420	0,413	0,404	0,368
1,2	0,443	0,486	0,475	0,470	0,463	0,452	0,418
1,4	0,487	0,523	0,518	0,513	0,507	0,494	0,462
1,6	0,525	0,555	0,555	0,551	0,545	0,531	0,501
1,8	0,559	0,584	0,587	0,584	0,578	0,564	0,536
2,0	0,589	0,610	0,616	0,613	0,607	0,593	0,568
2,2	0,616	0,633	0,641	0,638	0,633	0,619	0,596
2,4	0,640	0,653	0,664	0,661	0,655	0,642	0,621
2,6	0,661	0,672	0,684	0,681	0,675	0,663	0,644
2,8	0,680	0,689	0,701	0,699	0,694	0,681	0,665
3,0	0,698	0,705	0,717	0,715	0,710	0,698	0,683
3,2	0,713	0,719	0,732	0,730	0,725	0,714	0,700
3,4	0,728	0,732	0,745	0,743	0,739	0,728	0,716
3,6	0,741	0,744	0,757	0,755	0,751	0,741	0,730
3,8	0,753	0,755	0,768	0,766	0,762	0,753	0,743
4,0	0,764	0,765	0,778	0,777	0,773	0,764	0,755
4,5	0,787	0,788	0,800	0,799	0,795	0,787	0,780
5,0	0,807	0,807	0,818	0,817	0,814	0,807	0,801

Можно показать, что для конечного цилиндра высотой H и радиусом R эта формула принимает вид

$$P = 1 - \frac{1}{a} + \frac{2E_3\left(a \frac{1+\alpha}{2}\right)}{a(1+\alpha)} + \frac{8}{\pi a^2} \cdot \frac{\alpha}{(1+\alpha)^2} \times \left[\frac{2}{3} - Ki_4\left(a \frac{1+\alpha}{2}\right) + J \right], \quad (1)$$

где $\alpha = \frac{H}{R}$; $E_3(x) = \int_1^\infty e^{-xt} t^{-3} dt$ — функция, табу-

лированная в работе [2]; $Ki_4(x) = \int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch} t} (\operatorname{ch} t)^{-4} dt$ —

функция, табулированная в работе [3];

$$J = \int_0^\pi \int_0^\pi \left\{ \left(a \frac{1+\alpha}{2} - a \frac{1+\alpha}{\alpha} \sin \varphi \operatorname{ctg} \theta \right) \times \right. \\ \left. \times \left[\exp\left(-a \frac{1+\alpha}{\alpha} \frac{\sin \varphi}{\sin \theta}\right) - \right. \right.$$

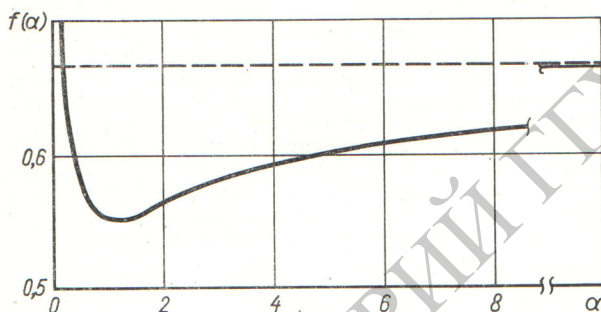
$$- \exp \left(-a \frac{1+\alpha}{2} \sec \theta \right) \Big] - 2 \cos \theta \times \\ \times \left[\exp \left(-a \frac{1+\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \right) + \exp \times \right. \\ \left. \times \left(-a \frac{1+\alpha}{2} \sec \theta \right) \right] \Big\} \sin^2 \theta \sin \varphi d\theta d\varphi.$$

В этом двойном интеграле интегрирование ведется по θ от $\arctg \left(\frac{2 \sin \varphi}{\alpha} \right)$ до $\pi/2$ и по φ от 0 до $\pi/2$.

В предельных случаях ($\alpha \rightarrow 0$ и $\alpha \rightarrow \infty$) формула (1) дает выражения соответственно для бесконечной плоскости и бесконечного цилиндра. Представляет интерес характер изменения вероятности P в зависимости от величины α при фиксированном a . Проведенное исследование показало, что при $a < 0,1 \div 0,2$ величина P сначала падает с ростом α , затем, пройдя через минимум в области $\alpha \sim 1 \div 2$, стремится к значению $P_{б.п.}$. Разлагая выражение для вероятности P в ряд по степеням α и ограничиваясь первым членом, при малых α получаем формулу

$$P = a f(\alpha).$$

Поскольку аналитический вид функции $f(\alpha)$ достаточно сложен, на рисунке приводится график этой функции, характеризующий поведение вероятности P в зависимости от α при фиксированном $a \ll 1$.



Зависимость величины P/a от α при $a \ll 1$.

При $a > 1,5 \div 2$ величина P с увеличением α сначала растет от значения $P_{пл.}$, проходит через максимум ($\alpha \sim 1 \div 2$), а затем падает до значения $P_{б.п.}$. В области больших значений α входящий в формулу (1) двойной интеграл J может быть вычислен из приближенного соотношения

$$J \approx \frac{3\pi}{32} \cdot \frac{\alpha^2}{1+\alpha} \cdot \frac{1}{a}, \quad (2)$$

в котором не учтены члены порядка a^{-2} . При промежуточных значениях α вероятность P монотонно падает с ростом α .

Такое поведение и сравнительно малое изменение величины P в зависимости от α позволяет при помощи кривых для двух-трех значений α определять вероятность P для цилиндрического тела любого размера

и с любым сечением взаимодействия. В настоящей работе путем численного интегрирования найдена величина двойного интеграла J для нескольких значений α при a , равных 1, 2 и 4. Результаты вычислений вероятности столкновения приводятся в таблице. Расчеты также показали, что использование выражения (2) при $a \geq 5$ позволяет вычислять вероятность $P_{к.ц.}$ для любого значения α с точностью не хуже 0,1%.

Знание вероятности столкновения для конечного цилиндра существенно расширяет возможности оценки величины P для других выпуклых тел на основании теорем Дрезнера [4], которые позволяют найти верхнюю и нижнюю границы P . Существует и другой путь оценки величины P для выпуклых тел произвольной формы. Для этого можно воспользоваться известным соотношением [5]:

$$P = 1 - \frac{\Psi}{a},$$

где Ψ — средняя вероятность однократного столкновения в теле, облучаемом изотропным потоком частиц. Известно, что функция Ψ может быть описана приближенным соотношением, не зависящим от конфигурации тела [6]:

$$\Psi = 1 - e^{-a},$$

и, следовательно, P можно представить в виде

$$P = 1 - \frac{1 - e^{-a}}{a}. \quad (3)$$

Величина P , подсчитанная по формуле (3), также приведена в таблице ($P_{пр.}$). Точность формулы (3) можно оценить, сравнивая значение $P_{пр.}$ со значениями P для тел, представленных в таблице. При больших a наибольшее различие значений наблюдается между $P_{пр.}$ и $P_{к.ц.}$ ($\alpha = 1$), но тем не менее для $a \geq 1,7$ это отличие не превосходит 10%, а для $a \geq 3$ — только 5%. Вопрос о применимости формулы (3) к расчету величины P для тел произвольной формы нуждается в дополнительном исследовании, однако маловероятно, что в этих случаях будет иметь место серьезное ухудшение точности.

Поступило в Редакцию 20/VIII 1966 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Case et al. Introduction to the Theory of Neutron Diffusion. Vol. I. U. S. Government Printing Office, Washington, 1953.
2. Г. Гольдштейн. Основы защиты реакторов. М., Госатомиздат, 1961.
3. W. Bickley, J. Naylor. Phil. Mag., (7), 20, 343 (1935).
4. L. Dresner. Nucl. Sci. Eng., 6, 63 (1959).
5. А. Вейнберг, Е. Вигнер. Физическая теория ядерных реакторов. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
6. G. Nisile. Nucleonics, 14, No. 3, 86 (1960).