где

$$y = \frac{j_0 R}{2B_0}; \quad \varkappa_0 = -\frac{\pi^2 p'(V) R^3}{B_0^2} \frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon} = \frac{1+\varepsilon^2}{4\varepsilon^2}\gamma. \quad (60)$$

Левые части неравенств (57) и (59) в функции от y и y_0 при различных значениях параметров ε, δ, $t = \alpha R$, $\gamma = \frac{2p_0 R^2}{B^0 \rho^2}$ представлены на графиках (рис. 1—4). Как показывает рассмотрение этих графиков, с помощью подходящего выбора формы сечения плазменного шнура можно существенно улучшить его устойчивость по сравнению с плазменным шнуром круглого поперечного сечения. При этом винтовые плазменные трубки можно рассматривать как модель замкнутых плазменных конфигураций, магнитная ось которых представляет собой спираль, навитую на тор. Эллиптичность и грушевидность сечений магнитных поверхностей можно создать также и наложением двухзаходной и трехзаходной токовых обмоток [9]. Соответствующая система может быть устойчивой и при переменном продольном токе в плазме.

На рис. 1 показаны области устойчивости для случая круговой магнитной оси в функции от y_0 при различных параметрах ε, δ и γ, причем цифры на кривых *1—5* соответствуют значениям γ, равным 0,1; 0,4; 1; 2; 10. В отличие от случая круглого поперечного сечения $\varepsilon = 1$ при наличии эллиптичности появляется зависимость предельной плотности тока от давления, характеризуемого параметром γ. При $\varepsilon = 0{,}5$ и $\delta = -4/3$ предельная плотность тока увеличивается в два раза по сравнению со случаем $\varepsilon = 1$.

На рис. 2 показаны области устойчивости для винтовой плазменной трубки эллиптического поперечного сечения ($\delta = 0$) при различных параметрах t, ε и γ. При указанных на рис. 2 параметрах t, равных 0,2 и 0,4, области устойчивости существуют только при $\varepsilon \neq 1$. Устойчивость в отсутствие продольного тока имеется только для тех вариантов, когда кривая $f(y)$ пересекает ось ординат. На рис. 3 и 4 построены области устойчивости для случаев грушевидных поперечных сечений при $\delta = 4/3$ и $\delta = -4/3$.

Из приведенных рисунков следует, что заостренность профиля граничной поверхности существенно влияет на устойчивость плазмы, причем устойчивость улучшается, если $\varepsilon > 1$, $\delta > 0$ или $\varepsilon < 1$, $\delta < 0$. Графики при $y < 0$ соответствуют случаю, когда ток течет вдоль направления магнитного поля, а графики при $y > 0$ соответствуют случаю обратного направления продольного тока в плазме.

Авторы выражают благодарность акад. М. А. Леонтовичу за полезные замечания.

Поступила в Редакцию 28/V 1968 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. Mercier. Intern. Conf. Plasma Phys. and Control. Nucl. Fusion. Salzburg. Sept. 1961, p. 95.
2. M. Bineau. Ibid., p. 35.
3. J. Green, J. Johnson. Phys. Rev. Letters, **7**, 401 (1961).
4. Л. С. Соловьев. ЖЭТФ, **53**, 626 (1967).
5. Л. С. Соловьев. ЖЭТФ, **53**, 2063 (1967).
6. Л. С. Соловьев. В сб. «Вопросы теории плазмы». Т. 3. М., Атомиздат, 1963.
7. А. И. Морозов, Л. С. Соловьев. В сб. «Вопросы теории плазмы». Т. 2. М., Атомиздат, 1963.
8. В. Д. Шафранов. «Ядерный синтез», 5, 511 (1968).
9. Л. С. Соловьев, В. Д. Шафранов. В сб. «Вопросы теории плазмы». Т. 5. М., Атомиздат, 1967.

К нелинейной теории нагрева плазмы в ВЧ-ловушке в условиях циклотронного резонанса

В. Б. КРАСОВИЦКИЙ

УДК 533.9

В работах [1—4] было показано, что заряженная частица, помещенная в скрещенные ВЧ-электрическое и постоянное магнитное поля, может быть ускорена поперек магнитного поля до больших энергий, если частота поля ω близка к гирочастоте частицы $\omega_H = \frac{eH_0}{mc}$: $\Delta = 1 - \frac{\omega_H}{\omega} < \left(\frac{eE_0}{mc\omega}\right)^{2/3}$, где E_0 — амплитуда ВЧ-поля. При этом рассматривалось движение частицы в заданном поле, что справедливо лишь при выполнении условия $\frac{E_0^2}{8\pi} \gg n_0 \frac{mv^2}{2}$ (n_0 — плотность, а v — скорость ускоряемых частиц). При конечной плотности плазмы с ростом энергии частиц это условие может быть нарушено, и эффекты обратного влияния на поле со стороны ускоряемых токов могут существенно изменить амплитуду поля, а следовательно, и весь ход процесса ускорения.

Поскольку в экспериментах всегда приходится иметь дело с плазмой достаточно большой плотности, то представляет интерес рассмотреть задачу в приближении самосогласованного поля, т. е. с учетом изменения амплитуды поля. Такое рассмотрение и будет проведено ниже в случае $\Delta > 0$ и $\Delta < 0$.

Исходная система уравнений состоит из кинетического уравнения для электронов плазмы с самосогласованным полем и уравнений, описывающих изменение этого поля:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{u}_z \frac{\partial f_e}{\partial z} + \frac{e}{m}\left\{\mathbf{E} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{c}[\mathbf{u}, \mathbf{H} + \mathbf{H}_0]\right\}\frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{u}} + 0; \\ &\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \mathbf{n}_z \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \\ &= \frac{4\pi e}{c^2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\int (f_e - f_i)\,\mathbf{u}\,d\mathbf{u}, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $f_e = f_e(t, z, \mathbf{u})$ — функция распределения электронов плазмы; $\mathbf{H}_0$ — постоянное магнитное поле, параллельное оси z; $\mathbf{E} = (E_x 0 E_z)$; $\mathbf{H} = (0 H_y 0)$. Кроме того, мы считаем, что отрицательный заряд электронов скомпенсирован положительным зарядом ионов, принятых неподвижными *.

Если известен начальный вид функции распределения, то решение кинетического уравнения можно найти, используя метод характеристик [5]. Этот метод позволяет свести уравнение в частных производных для функции распределения к системе уравнений движения, описывающих движение отдельных заряженных частиц, решая которые, можно определить и функцию распределения. Основной трудностью при этом является то, что поскольку частиц бесконечно много, а начальное положение каждой из них относительно волны различно, то фактически приходится иметь дело с бесконечной системой дифференциальных уравнений. Поэтому ниже мы используем специальную модель, позволяющую обойти указанные трудности и получить аналитическое решение задачи.

Предположим, что в начальный момент времени создана стоячая поперечная линейно поляризованная волна, поле которой имеет вид $E_x^{(0)} = E_0 \cos \omega t \sin kz$ и $H_y^{(0)} = -E_0 \sin \omega t \times \cos kz$. В поле волны в точках $z = n\lambda$ ($n = 0; \pm 1 \ldots, \lambda = 2\pi/k$) расположены электронейтральные слои плазмы с размерами δz, малыми по сравнению с длиной волны: $\delta z \ll \lambda$. Число электронов в каждом сгустке будем считать равным n_1. Кроме того, предположим, что начальная энергия всех частиц плазмы равна нулю. Функция распределения, соответствующая сделанным выше предположениям, может быть представлена в следующем виде:

$$f_{0e}(z, \mathbf{u}) = f_i(z, \mathbf{u}) = n_1 \delta(\mathbf{u}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(z - n\lambda). \qquad (2)$$

При таком выборе f_{0e} вследствие периодичности системы начальное положение частиц относительно волны одинаково, а следовательно, все частицы будут двигаться по одному и тому же закону. При этом вместо бесконечной системы уравнений движения необходимо решить уравнение, описывающее поведение лишь одной частицы.

Уравнения характеристик, соответствующие кинетическому уравнению (1), имеют вид

$$dt = \frac{dz}{v_z} = \frac{d\mathbf{u}}{\frac{e}{m}\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{H} + \mathbf{H}_0]\right\}}$$

и эквивалентны системе уравнений движения:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{m}\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{H} + \mathbf{H}_0]\right\}; \quad \frac{dz}{dt} = v_z. \qquad (3)$$

При этом поля в правой части уравнений движения берутся в той точке $z(t)$, где находится частица. Если формально предположить, что решение этой системы уравнений имеет вид $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ и $z = z(t)$, то, учитывая выражение (2), можно найти $f_e(t, z, \mathbf{u})$:

$$f_e(t, z, \mathbf{u}) = n_1 \delta[\mathbf{u} - \mathbf{v}(t)] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[z - n\lambda - z(t)]. \qquad (4)$$

Зная функцию распределения (4), можно определить поляризационный ток, создаваемый электронами, и подставить его в правые части уравнений для полей. Если при этом предположить, что зависимость ВЧ-поля от z на протяжении всего процесса остается такой же, как в начальный момент: $E_x = E(t) \sin kz$*, то

* Формально учет ионов не дает вклада в уравнения (1), так как ионный ток, входящий в (1), равен нулю. Однако мы рассматриваем систему, не ограниченную вдоль оси z, поэтому наличие нескомпенсированного заряда привело бы, согласно уравнению Пуассона, к возникновению бесконечно сильных продольных электрических полей.

* Это предположение справедливо при не слишком больших плотностях плазмы, когда $\omega_0 \ll \omega_H$ (ω_0 — плазменная частота), т. е. энергия продольного движения частиц плазмы мала по сравнению с поперечной. Если это условие не выполнено, то может оказаться существенной деформация поля вдоль оси z. В этом случае решение необходимо искать в виде суммы гармоник по k.

уравнения для полей можно представить в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}+c^2k^2E\right)\sin kz=-4\pi e n_1\times \\ &\times\frac{\partial}{\partial t}\left\{v_x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left[z-n\lambda-z(t)\right]\right\}; \\ &\frac{\partial E_z}{\partial t}=-4\pi e n_1 v_z(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left[z-n\lambda-z(t)\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Усредняя эти уравнения по периоду системы и вводя эффективную плотность плазмы $n_0 = n_1/l$, получаем уравнения в полных производных для полей:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2E}{dt^2}+\omega^2E=-8\pi e n_0\frac{d}{dt}\left[v_x\sin\frac{\omega}{c}z(t)\right]; \\ &\frac{dE_z}{dt}=-4\pi e n_0\frac{dz}{dt};\quad \omega=ck. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Уравнения (6) совместно с уравнениями (3) представляют собой замкнутую систему уравнений для полей и параметров плазмы. В безразмерных переменных

$$\tau=\omega t;\ \xi=\frac{\omega z}{c};\ \beta_x=\frac{v_x}{c};\ \varepsilon=\frac{eE}{mc\omega};$$

$$\Omega=\frac{\omega_H}{\omega};\ q=\frac{\omega_0}{\omega}=\sqrt{\frac{4\pi e^2 n_0}{m\omega^2}}$$

она принимает вид

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{\beta}_x+\Omega^2\beta_x=\sin\xi\dot{\varepsilon}; \\ &\ddot{\varepsilon}+\varepsilon=-2q^2\sin\xi\dot{\beta}_x; \\ &\ddot{\xi}+q^2\xi=\beta_x\cos\xi\dot{\varepsilon}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

При выводе уравнений (7) мы считали $q \ll 1$ и пренебрегли членами порядка q по сравнению с единицей, а также воспользовались формулой $H_y = \frac{1}{\omega}\cdot\frac{dE}{dt}$. Из сравнения уравнения (7) с соответствующей системой уравнений из работы [4], где принималось $q = 0$, видно, что кроме учета обратного влияния на поле, о котором уже упоминалось выше, в нашем случае учтены продольные колебания электронов относительно неподвижных ионов. Так как это обстоятельство может существенно изменить условия неустойчивости по сравнению со случаем $q = 0$, то рассмотрим сначала уравнения системы (7) в линейном приближении. Полагая $\varepsilon = \varepsilon_0\cos\tau$, $\sin\xi \approx \xi$ и $\cos\xi \approx 1$, будем искать решение уравнений (7) в следующем виде:

$$\beta_x=\frac{1}{2}\left(\beta_1 l^{i\tau}+\beta_1^* l^{-i\tau}\right)l^{\lambda\tau};\ \xi=\xi_1 l^{\lambda\tau}.$$

Тогда для λ получим уравнение

$$\lambda^4+(\Delta^2+q^2)\lambda^2+\Delta^2q^2+\frac{1}{4}\varepsilon_0^2\Delta=0. \qquad (8)$$

Нас интересуют корни этого уравнения, действительная часть которых положительна. В этом случае система плазма — поле неустойчива: малые возмущения параметров плазмы экспоненциально нарастают со временем с показателем экспоненты $\gamma = Re\,\lambda > 0$. Решая уравнение (8), находим

$$\lambda=\pm\left[-\frac{1}{2}(\Delta^2+q^2)\pm\pm\frac{1}{2}\sqrt{(\Delta^2-q^2)^2-\Delta\varepsilon_0^2}\right]^{1/2}. \qquad (9)$$

Сначала подробно исследуем случай, когда частота поля превышает гирочастоту частиц плазмы: $\Delta > 0$. Согласно уравнению (9), в этом случае неустойчивость имеет место, если $\Delta\varepsilon_0^2 > (q^2 - \Delta^2)^2$, т. е. при начальных значениях ε_0, меньших, чем в случае $q = 0$. При $\Delta = q$ пороговое значение амплитуды поля отсутствует, и плазма оказывается неустойчивой при любых начальных значениях амплитуды поля ε_0.

Как следует из формулы (9), развитие процесса неустойчивости определяется соотношением между параметрами ε_0 и $q^{3/2}$. В случае $\varepsilon_0 \gg q^{3/2}$ поляризационные эффекты не влияют на ход процесса, так как при этом неустойчивость развивается за времена порядка $1/\gamma$, малые по сравнению с характерным временем плазменного колебания: $\frac{1}{\gamma} \ll \frac{1}{q}$. Этот случай соответствует приближению заданного поля, рассмотренному в работе [4].

При достаточно большой плотности плазмы, когда выполнено условие $q^{3/2} \gg \varepsilon_0$, поляризационные эффекты начинают играть решающую роль при развитии процесса, так как инкремент нарастания $\gamma = \varepsilon_0/4\sqrt{q}$ оказывается малым по сравнению с частотой продольных колебаний $\gamma\sqrt{q}$. Ниже мы рассмотрим этот случай в нелинейном приближении и найдем максимальную энергию, которую приобретают электроны плазмы.

Решение системы уравнений (7) будем искать в следующем виде:

$$\beta_x=\beta_1(\tau)\cos\left[\Omega\tau+\vartheta(\tau)\right];\ \varepsilon=\varepsilon_1(\tau)\cos\left[\tau+\varphi(\tau)\right];$$

$$\xi=\xi_1(\tau)\cos\left[q\tau+\psi(\tau)\right], \qquad (10)$$

где амплитуды и фазы медленно меняются во времени. Подставляя (10) в (7) и пренебрегая вторыми производными от амплитуд, получаем следующую нелинейную систему уравнений:

$$\dot{\beta}_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_1 J_1(\xi_1); \quad \dot{\varepsilon}_1 = -q^2\beta_1 J_1(\xi_1);$$

$$\dot{\xi}_1 = \frac{1}{4q}\beta_1\varepsilon_1 J_0(\xi_1); \tag{11}$$

$$\vartheta = \varphi = \psi = 0,$$

где J_0 и J_1 — функции Бесселя. При выводе системы (11) мы воспользовались формулами

$$\cos(\xi_1 \cos q\tau) = J_0(\xi_1) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n}(\xi_1)\cos 2nq\tau;$$

$$\sin(\xi_1 \cos q\tau) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n+1}(\xi_1)\cos(2n+1)q\tau.$$

Рассмотрим решение системы (11), удовлетворяющее следующим начальным условиям: $\varepsilon_1(0) = \varepsilon_0$; $\beta_1(0) = \xi_1(0) = 0$. Решая совместно уравнения для β_1 и ε_1, а затем для ξ_1 и ε_1, получаем соотношения

$$\left.\begin{aligned} 2q^2\beta_1^2 + \varepsilon_1^2 &= \varepsilon_0^2;\\ \varepsilon_1^2 &= \varepsilon_0^2 + 8q^3 \ln|J_0(\xi_1)|, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

которые являются интегралами движения системы (11). Выражая из соотношений (12) $\beta_1(\tau)$ и $\varepsilon_1(\tau)$ через функции от $\xi_1(\tau)$ и используя уравнение для $\dot{\varepsilon}_1$, получаем нелинейное уравнение первого порядка для функции $\xi_1(\tau)$:

$$\dot{\xi}_1 = \frac{1}{2\sqrt{q}} J_0(\xi_1) \times \sqrt{-\ln|J_0(\xi_1)|\,[\xi_0^2 + 8q^3\ln|J_0(\xi_1)|]}. \tag{13}$$

Разлагая $J_0(\xi_1)$ в ряд при малых ξ_1, находим, что на начальной стадии процесса амплитуда продольного смещения экспоненциально нарастает с показателем экспоненты $\gamma = \varepsilon_0/4\sqrt{q}$. Максимальную амплитуду смещения $\xi_{\text{макс}}$ можно определить из условия $\dot{\varepsilon}_1(\xi_{1\text{макс}}) = 0$. Легко видеть, что существует два значения ξ_1, при которых правая часть уравнения (13) обращается в нуль, причем максимальная амплитуда определяется меньшим из них. Одно из них совпадает со значением первого нуля функции Бесселя J_0 и равно $\xi_1^{(1)} = 2{,}4$, а второе можно определить из условия $\ln|J_0(\xi_1^{(2)})| = -\varepsilon_0^2/8q^3$.

Поскольку $\xi_0^2/q^3 \ll 1$, то, полагая $J_0(\xi_1^{(2)}) = 1 - \left[\frac{\xi_1^{(2)}}{2}\right]^2$, находим $\xi_1^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\varepsilon_0}{q^{3/2}}$. Таким образом, максимальное продольное смещение частиц плазмы равно $\xi_{1\text{макс}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\varepsilon_0}{q^{3/2}} \ll 1$ и частица не сможет дойти до точки $\xi_1^{(2)} = 2{,}4$. Подставляя $\xi_{1\text{макс}}$ в соотношения (12), можно определить минимальное значение электрического поля $\varepsilon_{\text{мин}}$ и максимальную поперечную энергию частицы:

$$\varepsilon_{\text{мин}} = 0; \quad \beta_{1\text{макс}}^2 = 2\beta_{x\,\text{макс}}^2 = \frac{\varepsilon_0^2}{q^2} = \left(\frac{eE_0}{mc\omega_0}\right)^2. \tag{14}$$

Так как максимальное продольное смещение частицы мало по сравнению с длиной волны: $\xi_{1\text{макс}} \ll 1$, то можно в уравнении (13) заменить функции Бесселя их асимптотиками при $\xi_1 \ll 1$ и определить форму колебаний:

$$\xi_1(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\varepsilon_0}{q^{3/2}}\,\mathrm{ch}^{-1}\left[\mathrm{arech}\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}\,q^{3/2}\xi_1(0)} - \gamma\tau\right], \tag{15}$$

где $\xi_1(0)$ — малое возмущение: $\xi_1(0) \ll \xi_{1\text{макс}}$. Как следует из уравнения (15), в начале процесса [при $\xi_1 \sim \xi_1(0)$] амплитуда смещения экспоненциально растет и достигает значения $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\varepsilon_0}{q^{3/2}}$. После этого начинается обратный процесс — превращение энергии возбужденных осцилляторов в энергию ВЧ-поля. Математически это соответствует изменению знака перед корнем в правой части уравнения (13).

В заключение рассмотрим случай $\Delta < 0$: $\Delta = -|\Delta|$. Согласно формуле (9), действительная часть λ в этом случае отлична от нуля при выполнении условия

$$\varepsilon_0^2 > 4q^2|\Delta|. \tag{16}$$

Если в начальный момент неравенство (16) выполнено, система является неустойчивой и энергия частиц плазмы начинает возрастать. При этом амплитуда поля убывает и может стать меньше $\varepsilon_c = 2q\sqrt{|\Delta|}$, а система при этом перейдет в устойчивое состояние. Максимальную энергию в этом случае определяем, используя закон сохранения энергии (12):

$$\beta_{1\text{макс}}^2 = \frac{1}{q^2}(\varepsilon_0^2 - \varepsilon_c^2) = \frac{\varepsilon_0^2}{q^2} - 4|\Delta|.$$

Поступила в Редакцию 13/VII 1967 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. T. Consoli. Nucl. Fusion, 3, 237 (1963).
2. R. Hall. VI International Conference on Phenomena of Ionized Gases. Paris, 1963.
3. R. Hall. Compte rendu du colloque intern. sur l'interaction des champs h. f. associes a un champ magnetique statique avec un plasma. Saclay, 1964, p. 68.
4. В. Б. Красовицкий. АЭ, 22, 413 (1967).
5. В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений. М., Физматгиз, 1959, стр. 330.