

на составляет всего $0,2^\circ$ сахарной шкалы на каждые 10°C . Изменение температуры измерения от 15 до 42°C не влияет на показания дозиметрической системы.

Рассматриваемая дозиметрическая система, основанная на определении поглощенной дозы по изменению оптической активности 20%-ного раствора глюкозы при облучении, имеет следующие весьма существенные преимущества по сравнению с другими химическими дозиметрами:

1) широкий интервал измеряемых доз ($0,5 - 40 \text{ Mrad}$);

2) независимость регистрируемого радиационнохимического эффекта от мощности дозы, присутствия кислорода воздуха и газообразных продуктов радиолитиза, температуры облучения и измерения;

3) быстроту и достаточную точность метода определения радиационного эффекта и расчета поглощенной дозы; простоту изготовления дозиметрических образцов и доступность измерительной аппаратуры;

4) стабильность необлученных образцов при хранении в различных условиях и отсутствие послеэффекта;

5) хорошую воспроизводимость результатов, обусловленную использованием реактивов обычной степени чистоты и отсутствием необходимости разбавления облученного раствора или добавления в него реагентов при определении оптической активности.

Это позволяет рекомендовать 20%-ный водный раствор глюкозы для широкого практического применения в качестве стандартного дозиметра при измерении больших доз γ -излучения.

На основе рассмотренной дозиметрической системы авторами настоящей работы скон-

струирован действующий макет малогабаритного фотоэлектрического поляриметра, шкала которого проградуирована непосредственно в единицах поглощенной дозы.

Поступила в Редакцию 12/X 1967 г.
В окончательной редакции 1/IV 1968 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Кабакчи, Я. И. Лаврентович, В. В. Пенюковский. Химическая дозиметрия ионизирующих излучений. Киев, Изд-во АН УССР, 1963.
2. С. В. Стародубцев, Ш. А. Абляев, В. В. Генералова. «Атомная энергия», 8, 264 (1960).
3. Ш. А. Абляев, В. В. Генералова, С. В. Стародубцев. В кн. «Тр. Ташкентской конференции по мирному использованию атомной энергии (1959 г.)». Т. 1. Ташкент, Изд-во АН УзССР, 1961, стр. 159.
4. A. Glass. Nucleonics, 20, 66, 68, 70 (1962).
5. С. В. Стародубцев, В. В. Генералова, Г. В. Поляк. «Изв. АН УзССР. Серия физ.-мат. наук», № 1, 39, 46 (1963).
6. В. В. Генералова, М. Б. Кишиневская, Е. В. Поляк. В сб. «Радиационные нарушения в твердых телах и жидкостях». Ташкент, «Фанлар», 1967, стр. 113, 120.
7. Б. Толленс, К. Эльснер. Краткий справочник по химии углеводов. М.—Л., ГОНТИ, 1938, стр. 248.
8. И. В. Верещинский, А. К. Пикаев. Введение в радиационную химию. М., Изд-во АН СССР, 1963.
9. А. Н. Зайдель. Элементарные оценки ошибок измерения. М., «Наука», 1965.
10. В. В. Налимов, Н. А. Чернова. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. М., «Наука», 1965.
11. А. Н. Линник. Метод наименьших квадратов и основы математическо-статистической теории обработки наблюдений. М., Физматгиз, 1958.

Гидромагнитная устойчивость симметричных плазменных конфигураций*

Н. М. ЗУЕВА, П. С. СОЛОВЬЕВ

Общегеометрический критерий гидромагнитной устойчивости плазмы

Необходимое условие локальной устойчивости [1—3] произвольных равновесных плазменных конфигураций, когда

$$\nabla p = [jB], \quad j = \text{rot } B, \quad \text{div } B = 0, \quad (1)$$

* Работа прислана из ЖЭТФ, дата поступления в ЖЭТФ 14/II 1968 г.

УДК 533.9

где p — давление; j — плотность тока; B — магнитное поле, можно записать в виде [4]

$$\frac{1}{4} S^2 + F - G \geq 0. \quad (2)$$

Здесь

$$F = -\Omega \left\langle \frac{B^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle + S \left\langle \frac{jB}{|\nabla B|^2} \right\rangle; \quad (3)$$

$$G = \left\langle \frac{j^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle \left\langle \frac{B^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle - \left\langle \frac{jB}{|\nabla V|^2} \right\rangle^2, \quad (4)$$

где V — текущий объем системы вложенных магнитных поверхностей, отсчитываемый от магнитной оси; Φ , χ и J , I — продольный и поперечный потоки $\mathbf{B}$ и $\mathbf{j}$ соответственно; величины Ω и S , так же как и давление p , являются инвариантными функциями потоков и зависят только от V :

$$p' = I'\Phi' - J'\chi'; \Omega = I'\Phi'' - J'\chi''; S = \chi'\Phi'' - \Phi'\chi''; \quad (5)$$

штрихи означают дифференцирование по V , а угловые скобки — усреднение по бесконечно тонкому слою между соседними магнитными поверхностями:

$$\langle f \rangle = \frac{d}{dV} \int f d\tau. \quad (6)$$

Первый член в выражении (2) описывает стабилизацию вследствие перекрещенности силовых линий (shear), второй — стабилизацию из-за наличия магнитной ямы ($\min \bar{B}$), а третий член, всегда отрицательный в силу неравенства Шварца, связан с дестабилизирующим действием конечного давления плазмы.

Как показано в работе [5], для гидромагнитной устойчивости плазменных конфигураций, удерживаемых квазиоднородным магнитным полем, достаточно критерия (2) без члена $S^2/4$, причем условие квазиоднородности $\mathbf{B}$ соответствует ограничению случаев плазмы низкого давления $2p/B^2 \ll 1$.

В работе [5] рассматривалась устойчивость плазменных конфигураций при неподвижной границе плазмы. Можно показать, что учет смещений свободной границы плазмы в отсутствие поверхностных токов приводит к дополнительному условию устойчивости:

$$S \left\langle \frac{j_B}{V} \right\rangle > 0. \quad (7)$$

Это условие налагает некоторое ограничение на распределение плотности тока по сечению плазмы. Для плазменного цилиндра выражение (7) можно записать через компоненты $\mathbf{B}$ в цилиндрической системе координат r , ϕ , z в виде

$$\left(\frac{B_\phi}{rB_z} \right)' \left(\frac{rB_\phi}{B_z} \right)' \geq 0, \quad (8)$$

где штрихами обозначены производные по r . Если продольное магнитное поле B_z принять однородным, а плотность продольного тока j_z распределенной по закону

$$j_z = j_0 (1 - \lambda r^{2n}/r_\Sigma^{2n}), \quad n > 0, \quad (9)$$

то согласно (8) получим

$$0 \leq \lambda. \quad (10)$$

Таким образом, плотность тока должна спадать по радиусу.

Устойчивость плазменной конфигурации существенно зависит от кривизны k и кручения κ магнитной оси и от формы поперечного сечения плазменного шнура. Простейшей моделью плазменной конфигурации с отличными от нуля k и κ является плазменный шнур с винтовой магнитной осью. При этом k и κ постоянны, а наличие пространственной симметрии делает задачу двумерной. Предельными случаями винтовых конфигураций являются трансляционно симметричные конфигурации с прямой магнитной осью и аксиально симметричные конфигурации с круговой магнитной осью.

Равновесные конфигурации плазмы при винтовой симметрии

Условие винтовой симметрии заключается в том, что магнитное поле зависит только от двух переменных: r и $\theta = \phi - \alpha z$, где $\alpha = 2\pi/L$, а $L = \text{const}$ — шаг винта, отсчитываемый вдоль оси z цилиндрической системы координат r , ϕ , z .

При рассмотрении винтовых равновесных конфигураций в качестве основных поверхностных функций, которые зависят только от V , удобно использовать $\psi = A_z + \alpha r A_\phi$ (A_z , A_ϕ — компоненты векторного потенциала), $I_B(\psi) = B_z + \alpha r B_\phi$ и $p(\psi)$. При этом компоненты $\mathbf{B}$ и $\mathbf{j}$ выражаются через ψ , I_B и p формулами [6]

$$rB_r = \partial\psi/\partial\theta; \quad B_\phi - \alpha rB_z = -\partial\psi/\partial r; \quad B_z + \alpha rB_\phi = I_B; \quad (11)$$

$$rj_r = \partial I_B/\partial\theta; \quad j_\phi - \alpha rj_z = -\partial I_B/\partial r; \quad j_z + \alpha rj_\phi = \beta p' + I_B I_B'. \quad (12)$$

Здесь штрихами отмечены производные по ψ , а β обозначена часто встречающаяся в формулах винтового равновесия величина

$$\beta = 1 + \alpha^2 r^2. \quad (13)$$

Функция $\psi(r, \theta)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{r}{\beta} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = \frac{2\alpha I_B}{\beta^2} - p' - \frac{I_B I_B'}{\beta}, \quad (14)$$

в котором $p(\psi)$ и $I_B(\psi)$ — произвольные функции, определяющие распределение магнитного поля и плотности тока по сечению плазмы. По найденной функции $\psi(r, \theta)$ можно определить поля и токи в конфигурации, а также уравнения магнитных поверхностей $\psi = \text{const}$, обладающих винтовой симметрией. Такие маг-

винтовые поверхности можно представить себе состоящими из винтовых линий $r = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ с постоянным шагом $L = 2\pi/\alpha$. Тангенс угла наклона произвольной винтовой линии к оси z равен αr . Соответственно компоненты $\mathbf{B}$ и $\mathbf{j}$, параллельные винтовой линии и перпендикулярные к ней и к радиусу-вектору r , равны

$$B_{\parallel} = I_B / \sqrt{\beta}; \quad B_{\perp} = (\partial\psi/\partial r) / \sqrt{\beta}; \quad (15)$$

$$j_{\parallel} = (\beta p' + I_B I_B') / \sqrt{\beta}; \quad j_{\perp} = (\partial I_B / \partial r) / \sqrt{\beta}. \quad (16)$$

Поперечные потоки векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{j}$ связаны с функциями ψ и I_B соотношениями [7]

$$\chi = \Phi - L\psi; \quad I = J - L I_B. \quad (17)$$

Продольные потоки $\mathbf{B}$ и $\mathbf{j}$ можно получить интегрированием $B_{\parallel}$ и $j_{\parallel}$ по площади поперечного сечения магнитной конфигурации в плоскости r, z . Используя выражения (11) и (12), найдем

$$\Phi = \int (\alpha r I_B - \partial\psi/\partial r) \beta^{-1} dr dz;$$

$$J = \int [\alpha r (\beta p' + I_B I_B') - I_B \partial\psi/\partial r] \beta^{-1} dr dz. \quad (18)$$

Если наряду с текущим объемом V системы вложенных магнитных поверхностей ввести две новые поверхностные функции U и U_1 , так чтобы

$$\left. \begin{aligned} V &= 2\pi \int r dr dz; \quad U = 2\pi \int \beta^{-1} r dr dz; \\ U_1 &= 2\pi \alpha^{-1} \int (\partial\psi/\partial r) \beta^{-1} dr dz, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

то дифференциалы функций Φ и J выразятся через дифференциалы V , U и U_1 :

$$\left. \begin{aligned} 2\pi d\Phi &= \alpha (I_B dU - dU_1); \\ 2\pi dJ &= \alpha [p' dV + I_B (I_B dU - dU_1)]. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Таким образом, для нахождения всех потоков Φ , χ , J , I и их производных при заданных функциях $p(\psi)$ и $I_B(\psi)$ достаточно вычислить функции V , U и U_1 , определенные интегралами (19). В частности, для функций S и Ω получим выражения

$$V^3 S = -2\pi \Phi'' / \alpha = (U_1' - I_B U')'; \quad (21)$$

$$\begin{aligned} V^3 \Omega &= -2\pi I_B' \Phi'' / \alpha - p' V'' = \\ &= I_B' (U_1' - I_B U')' - p' V''. \end{aligned} \quad (22)$$

Более просто находятся не сами функции V , U и U_1 , а их производные по ψ . Интегрируя по площади, заключенной между двумя бесконечно близкими магнитными поверхностями в пло-

скости r, z , и учитывая, что $d\psi = dr \partial\psi/\partial r$, получаем

$$\begin{aligned} V' &= 2\pi \int \frac{r dz}{\partial\psi/\partial r}; \quad U' = 2\pi \int \frac{r dz}{\beta \partial\psi/\partial r}; \\ U_1' &= \frac{2\pi}{\alpha} \int \frac{dz}{\beta}. \end{aligned} \quad (23)$$

Аналогично вычисляются средние значения по слою:

$$\langle f \rangle = \frac{d}{dV} 2\pi \int f r dr dz = \frac{2\pi}{V'} \int f \frac{r dz}{\partial\psi/\partial r}. \quad (24)$$

Отсюда, в частности, вытекает:

$$\langle \beta^{-1} \rangle = U' / V'. \quad (25)$$

Решение уравнения (14) будем искать в виде ряда по степеням отклонения от винтовой магнитной оси $r = R$, $\theta = 0$. При этом функции $p(\psi)$ и $I_B(\psi)$ можно разложить в ряды по степеням ψ :

$$p = p_0 + p_0' \psi + \dots, \quad I_B = I_{B0} + I_{B0}' \psi + \dots$$

Если ограничиться случаем, когда сечения магнитных поверхностей в окрестности магнитной оси симметричны относительно поверхности $\theta = 0$, то с точностью до кубических по $r^2 - R^2$ и θ членов получим

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{\beta_0}{2} \cdot \frac{a}{1 + \varepsilon^2} \left\{ \left(1 + c \frac{r^2 - R^2}{R^2} \right) \frac{R^2 \theta^2}{\beta_0} + \right. \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{4R^2} (r^2 - R^2)^2 + \frac{1}{12R^2} \left[(1 + \varepsilon^2) \frac{b}{a} + \right. \\ &\left. \left. + 1 - c - \frac{2\varepsilon^2}{\beta_0} \right] (r^2 - R^2)^3 \right\}; \end{aligned} \quad (26)$$

$$\beta_0 = 1 + \alpha^2 R^2.$$

Здесь ε — отношение полуосей нормальных эллиптических сечений магнитных поверхностей в окрестности магнитной оси; c — постоянная, характеризующая несимметричность сечений магнитных поверхностей; a и b обозначают следующие величины:

$$\begin{aligned} a &= 2\alpha \beta_0^{-1} I_B - p' - \beta_0^{-1} I_B I_B'; \\ b &= \alpha^2 R^2 \beta_0^{-2} (I_B I_B' - 4\alpha \beta_0^{-1} I_B), \end{aligned} \quad (27)$$

которые берутся на магнитной оси $r = R$, $\theta = 0$.

Таким образом, с точностью до кубических членов по отклонению от магнитной оси равновесная конфигурация не зависит от вторых производных функций $p(\psi)$ и $I_B(\psi)$.

В отличие от случая аксиально симметричных тороидальных конфигураций магнитные поверхности, окружающие винтовую магнитную ось, существуют и в отсутствие токов

в плазме, когда $p' = 0$ и $I_B = 0$. Возможность существования таких замкнутых вакуумных магнитных поверхностей связана с отклонением от нуля кручения магнитной оси.

Выражение (26) для функции ψ с принятой точностью записывается в виде

$$\psi = \lambda_1 z^2 + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 xz^2 + \lambda_4 x^3 + \dots, \quad (28)$$

где

$$x = r - R; \quad z = -\theta/\alpha; \quad \lambda_1 = \frac{\alpha^2 R^2}{2} \cdot \frac{a}{1+\varepsilon^2}; \quad (29)$$

$$\lambda_2 = \frac{\beta_0}{2} \cdot \frac{a\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2};$$

$$\lambda_3 = \alpha^2 R \frac{ac}{1+\varepsilon^2}; \quad \lambda_4 = \frac{\beta_0 a}{3R} \left[\frac{\beta}{a} + \frac{1-c}{1+\varepsilon^2} + \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{\beta_0} \right) \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} \right]. \quad (30)$$

Постоянная c может быть определена, если мы зададим профиль поперечного сечения граничной магнитной поверхности Σ .

Пусть нормальное сечение границы Σ в системе координат $z \xi = x - x_0$, смещенной относительно магнитной оси на расстояние x_0 , описывается уравнением

$$\frac{\alpha^2 R^2}{\varepsilon^2 \beta_0} z^2 + \xi^2 - \frac{\delta}{R} \xi^3 = \rho^2. \quad (31)$$

Рассматриваемый профиль поперечного сечения при $\delta \neq 0$ имеет грушевидную форму, причем при $\delta > 0$ заострение направлено вдоль радиуса-вектора r , а при $\delta < 0$ — против r . В случае $\delta = 0$ нормальное сечение плазменной трубки эллиптическое с отношением полуосей $l_z/l_r = \varepsilon$, причем $l_r = \rho$.

Выражение для функции ψ , обращающейся в нуль на границе (31), имеет вид

$$\psi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha^2 R^2 a}{1+\varepsilon^2} (1 + \Delta \xi) \times \\ \times \left[z^2 + \frac{\beta_0 \varepsilon^2}{\alpha^2 R^2} \left(\xi^2 - \frac{\delta}{R} \xi^3 - \rho^2 \right) \right]. \quad (32)$$

Сравнивая выражения (32) и (28) и считая при этом, что смещение магнитной оси x_0 является малой величиной порядка ρ^2 , получаем

$$\Delta = 2c/R; \quad x_0 = -c\rho^2/R; \quad (33)$$

$$c = \frac{1+\varepsilon^2}{1+3\varepsilon^2} \left\{ \frac{b}{a} + \frac{1}{1+\varepsilon^2} \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \left(1 - \frac{4\alpha^2 R^2}{\beta_0} \right) + \frac{3\varepsilon^2 \delta}{2} \right] \right\}. \quad (34)$$

Таким образом, постоянная c зависит от параметра грушевидности δ профиля поперечного

сечения границы плазмы. Как мы увидим далее, устойчивость плазмы существенно зависит от параметров δ и ε , определяющихся формой заданной внешней магнитной поверхности.

Устойчивость винтовых плазменных конфигураций

Величины B^2 , j^2 и jB , входящие в критерий устойчивости (2), выражаются, согласно (11), (12), формулами

$$B^2 = \beta^{-1} [|\nabla\psi|^2 + I_B^2]; \quad (35)$$

$$j^2 = \beta^{-1} [I_B'^2 |\nabla\psi|^2 + (\beta p' + I_B I_B')^2]; \quad (36)$$

$$jB = \beta^{-1} [I_B |\nabla\psi|^2 + I_B (\beta p' + I_B I_B')], \quad (37)$$

где

$$|\nabla\psi|^2 = (\partial\psi/\partial r)^2 + (\partial\psi/\partial\theta)^2 \beta/r. \quad (38)$$

Подставив эти формулы в (3) и (4), получим следующие выражения для стабилизирующего фактора F и дестабилизирующего фактора G :

$$F = \frac{p'}{V'^5} \left\{ V'' \left\langle \frac{1}{\beta} + \frac{I_B^2}{\beta |\Delta\psi|^2} \right\rangle - \frac{2\pi I_B \Phi''}{\alpha} \left\langle \frac{1}{|\nabla\psi|^2} \right\rangle \right\}; \quad (39)$$

$$G = \frac{p'^2}{V'^4} \left\{ \left\langle \frac{1}{\beta} \right\rangle \left\langle \frac{\beta}{|\nabla\psi|^2} \right\rangle + I_B^2 \left(\left\langle \frac{1}{\beta |\nabla\psi|^2} \right\rangle \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left\langle \frac{\beta}{|\nabla\psi|^2} \right\rangle - \left\langle \frac{1}{|\nabla\psi|^2} \right\rangle^2 \right) \right\}. \quad (40)$$

Если ввести обозначения

$$Q_1 = \left\langle \frac{V'}{|\nabla\psi|^2} \right\rangle; \quad Q_2 = \left\langle \frac{V'}{\beta |\nabla\psi|^2} \right\rangle; \quad (41) \\ Q_3 = \left\langle \frac{V'\beta}{|\nabla\psi|^2} \right\rangle,$$

то критерий устойчивости (2) для случая винтовой симметрии задачи можно записать в виде

$$\frac{1}{4} (L\Phi'')^2 - p' [L\Phi'' I_B Q_1 - V'' (I_B^2 Q_2 + U')] - \\ - p'^2 [U' Q_3 + I_B^2 (Q_2 Q_3 - Q_1^2)] \geq 0. \quad (42)$$

Для удобства вычисления в окрестности магнитной оси полезно несколько преобразовать это выражение, представив функции V' и Q_i таким образом, чтобы были выделены их основная часть и поправки, которые легко вычисляются при известном разложении ψ по степеням удаления от магнитной оси $r = R$. Приняв

$$\left. \begin{aligned} W' &= \beta_0 U' - V' = \alpha^2 V' \langle (R^2 - r^2) \beta^{-1} \rangle; \\ q_2 &= Q_1 - \beta_0 Q_2 = \alpha^2 V' \langle (r^2 - R^2) \beta^{-1} |\nabla\psi|^{-2} \rangle; \\ q_3 &= Q_3 - \beta_0 Q_1 = \alpha^2 V' \langle (r^2 - R^2) |\nabla\psi|^{-2} \rangle; \\ q &= q_3 - \beta_0 q_2 = \alpha^4 V' \langle (r^2 - R^2)^2 \beta^{-1} |\nabla\psi|^{-2} \rangle, \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

с учетом выражений (21) и (22) получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} (I_B U' - U_1')^2 - p' [(I_B \beta_0^{-1} W'' + \\ & + I_B' U' - U_1') I_B Q_1 + (I_B^2 \beta_0^{-1} q_2 - U') V''] - \\ & - p'^2 [(Q_1 q - q_2 q_3) I_B^2 \beta_0^{-1} + (\beta_0 Q_1 + q_3) U'] \geq 0. \end{aligned} \quad (44)$$

В окрестности магнитной оси выражение (44) содержит большие члены, пропорциональные Q_1 . Таким образом, критерий устойчивости винтовой плазменной трубки в окрестности магнитной оси имеет вид

$$\begin{aligned} & -p' I_B \left(\frac{I_B}{\beta_0} \cdot \frac{W''}{V'} + \frac{I_B'}{\beta_0} - \frac{U_1''}{V'} \right) - \\ & - p'^2 \left(1 + \frac{I_B^2}{\beta_0} \cdot \frac{q}{V'} \right) > 0, \end{aligned} \quad (45)$$

причем входящие сюда функции V' , W' , q и U_1' определяются интегралами

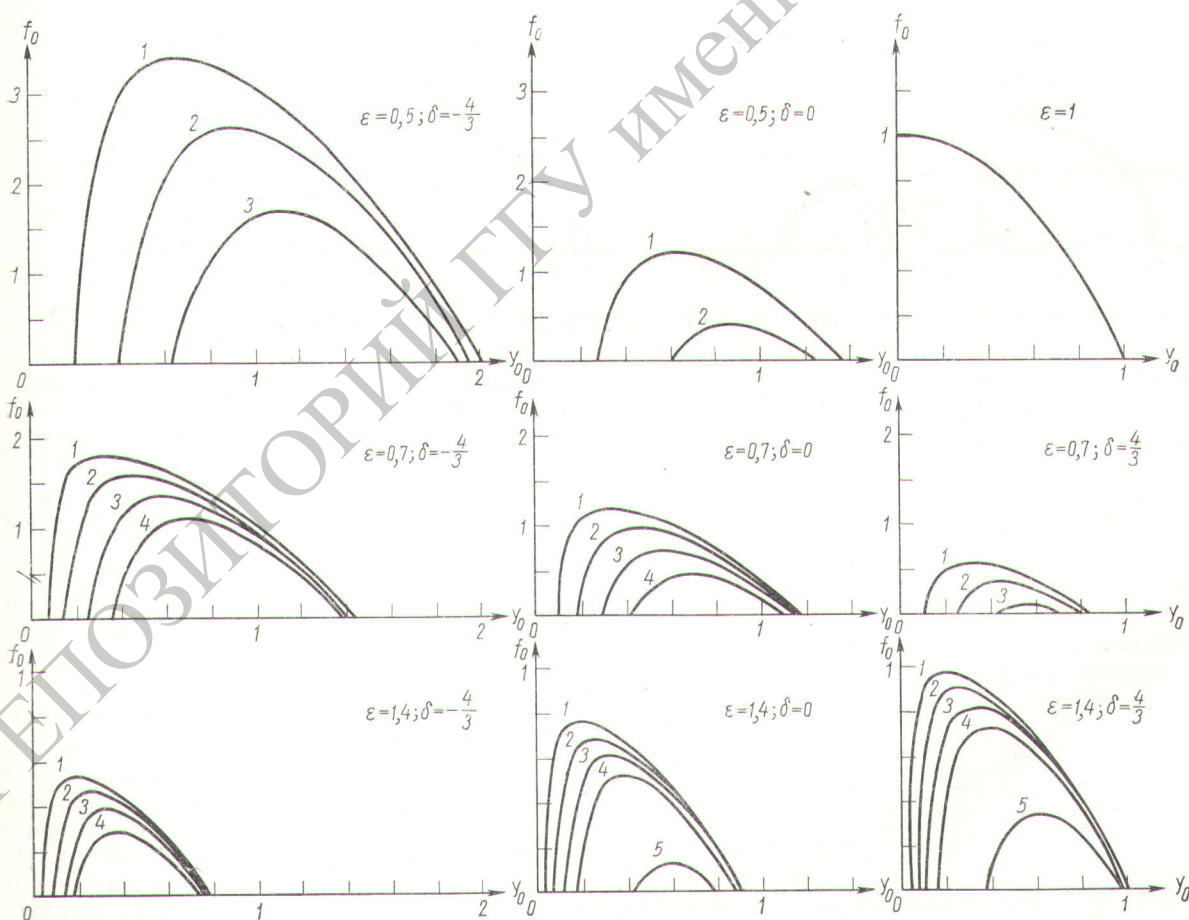
$$V' = 2\pi \int \frac{r dz}{\partial \psi / \partial r}; \quad W' = 2\pi \alpha^2 \int \frac{R^2 - r^2}{\beta} \cdot \frac{r dz}{\partial \psi / \partial r}; \quad (46)$$

$$q = 2\pi \alpha^4 \int \frac{(r^2 - R^2)^2}{\beta |\nabla \psi|^2} \cdot \frac{r dz}{\partial \psi / \partial r};$$

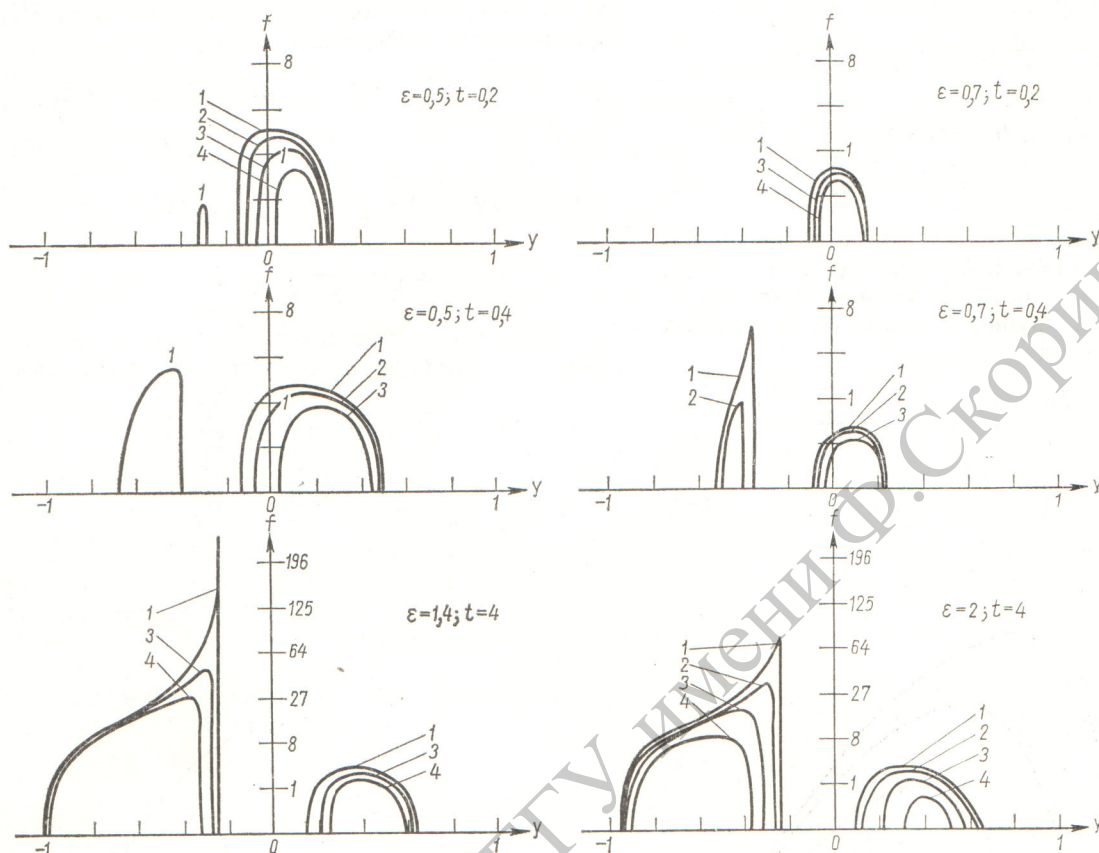
$$U_1' = \frac{2\pi}{\alpha} \int \frac{dz}{\beta}. \quad (47)$$

Для вычисления этих интегралов введем циклическую переменную ϑ согласно соотношениям

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{\frac{\psi}{\lambda_1}} \sin \vartheta; \quad x = \sqrt{\frac{\psi}{\lambda_2}} \cos \vartheta - \\ & - \frac{\psi}{2\lambda_2} \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1} \sin^2 \vartheta + \frac{\lambda_4}{\lambda_2} \cos^2 \vartheta \right) + \dots \end{aligned} \quad (48)$$



Р и с. 1. Области устойчивости плазменного тора при различных профилях поперечного сечения.


 Р и с. 2. Области устойчивости спиральной плазменной трубки эллиптического поперечного сечения при $\delta = 0$.

В результате получим

$$V' = \frac{4\pi^2}{\alpha\beta_0^{1/2}a} \cdot \frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon}; \quad q = \frac{16\pi^2\alpha^3R^2}{3\beta_0^{7/2}a^3} \frac{(1+\varepsilon^2)^3}{(1+\varepsilon)\varepsilon^4}; \quad (49)$$

$$U_1'' = -\frac{8\pi^2}{\beta_0^{5/2}a} \cdot \frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon}; \quad W'' = \frac{18\pi^2\alpha(1+\varepsilon^2)^2}{\beta_0^{5/2}a^2\varepsilon^5} + \\ + \left[1 + 2\varepsilon^2 \frac{\beta_0 - 2}{\beta_0} + (1+\varepsilon^2) \frac{b}{a} - (1-\varepsilon^2)c \right]. \quad (50)$$

Обозначим через y безразмерный параметр, характеризующий отношение плотности тока j_0 к магнитному полю B_0 на магнитной оси:

$$y = -\frac{j_0R}{2B_0} \cdot \frac{\beta_0}{\alpha R} = -\frac{j_0R}{2B_0} \left(\alpha R + \frac{1}{\alpha R} \right) = \\ = -\frac{j_0R}{2B_0} \left(t + \frac{1}{t} \right). \quad (51)$$

Подставив выражения (49), (50) в неравенство (45) и учитывая соотношения (11), (12) и (27), получим условие устойчивости плазмы

в окрестности винтовой магнитной оси $r = R$, $\varphi = \alpha z$:

$$1 - y^2 - \frac{t^2}{\varepsilon^3} \cdot \frac{(1+\varepsilon^2)^2}{1+\varepsilon} \cdot \frac{1}{1+y} + \frac{(1+\varepsilon^2)^2}{2\varepsilon^4} \times \\ \times \left[\frac{\beta_0 - 2\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} + \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \left(\frac{\beta_0 b}{a} - \frac{2t^2\varepsilon}{1+\varepsilon^2} \right) - \frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} \beta_0 c \right] > 0. \quad (52)$$

Отсюда видно, что устойчивость плазмы в окрестности магнитной оси зависит от отношения j_0R/B_0 , параметра $t = \alpha R$, характеризующего угол наклона винтовой магнитной оси к оси z , эксцентриситета приосевых сечений магнитных поверхностей, отношения b/a , определяющего распределение токов в плазме, и параметра несимметричности сечения плазменной трубки c .

В случае круглых нормальных приосевых сечений магнитных поверхностей $\varepsilon = 1$ зависимость от параметров c и b/a пропадает и условие устойчивости (52) принимает вид [8]

$$-y^2 - t^2 \left(\frac{2}{1+y} + 1 \right) > 0. \quad (53)$$

При $y = -1$ угол прокручивания силовых линий вокруг магнитной оси обращается в нуль вследствие компенсации прокручивания вакуумных силовых линий полем тока в плазме. Влияние поля тока в плазме на угол прокручивания силовых линий проявляется также в зависимости устойчивости плазмы от направления тока.

Уравнения (11), (12) и (27) позволяют выразить параметр b/a через давление плазмы:

$$\frac{b}{a} = -\frac{t^2}{\beta_0} \left[1 + \frac{1}{1+y} - \frac{\kappa}{(1+y)^2} \right], \quad (54)$$

где

$$\kappa = -\frac{\pi^2 p'(V) \beta_0^{5/2}}{\alpha^3 B_0^3} \cdot \frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon}. \quad (55)$$

В случае параболического распределения давления $p = p_0 (1 - V/V_\Sigma)$

$$\kappa = \frac{\beta_0^2}{t^2} \cdot \frac{1+\varepsilon^2}{4\varepsilon^2} \gamma; \quad \gamma = \frac{2p_0}{B_0^2} \cdot \frac{R^2}{\rho^2}. \quad (56)$$

Введенная выше величина ρ является шириной плазменной трубки, измеренной вдоль оси r .

Если подставить формулы (34) и (54) в условие (52), получим критерий устойчивости плазмы, выраженный через параметр грушевидности сечения внешней магнитной поверхности δ :

$$f = -y^2 - \frac{t^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{(1+\varepsilon^2)^2}{1+3\varepsilon^2} \left[\frac{2}{1+y} + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{(1-\varepsilon)^2}{1+\varepsilon} \cdot \frac{\kappa}{(1+y)^2} \right] + \frac{1+\varepsilon^2}{4\varepsilon^2} \cdot \frac{1+7\varepsilon^2}{1+3\varepsilon^2} \left\{ t^2 + \frac{1-\varepsilon^2}{1+7\varepsilon^2} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{5+\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} - 3\delta(1+t^2) \right] \right\} > 0. \quad (57)$$

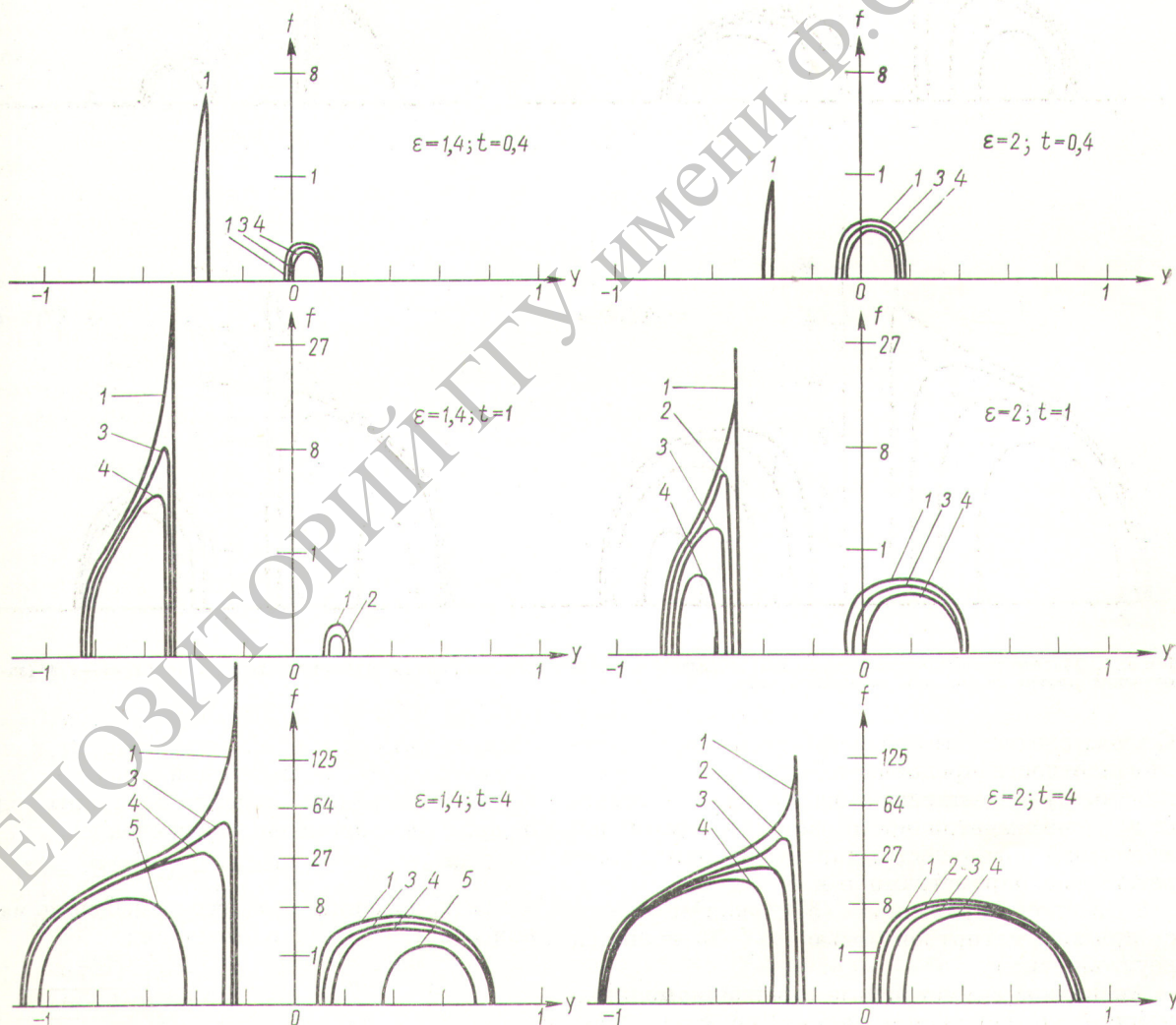
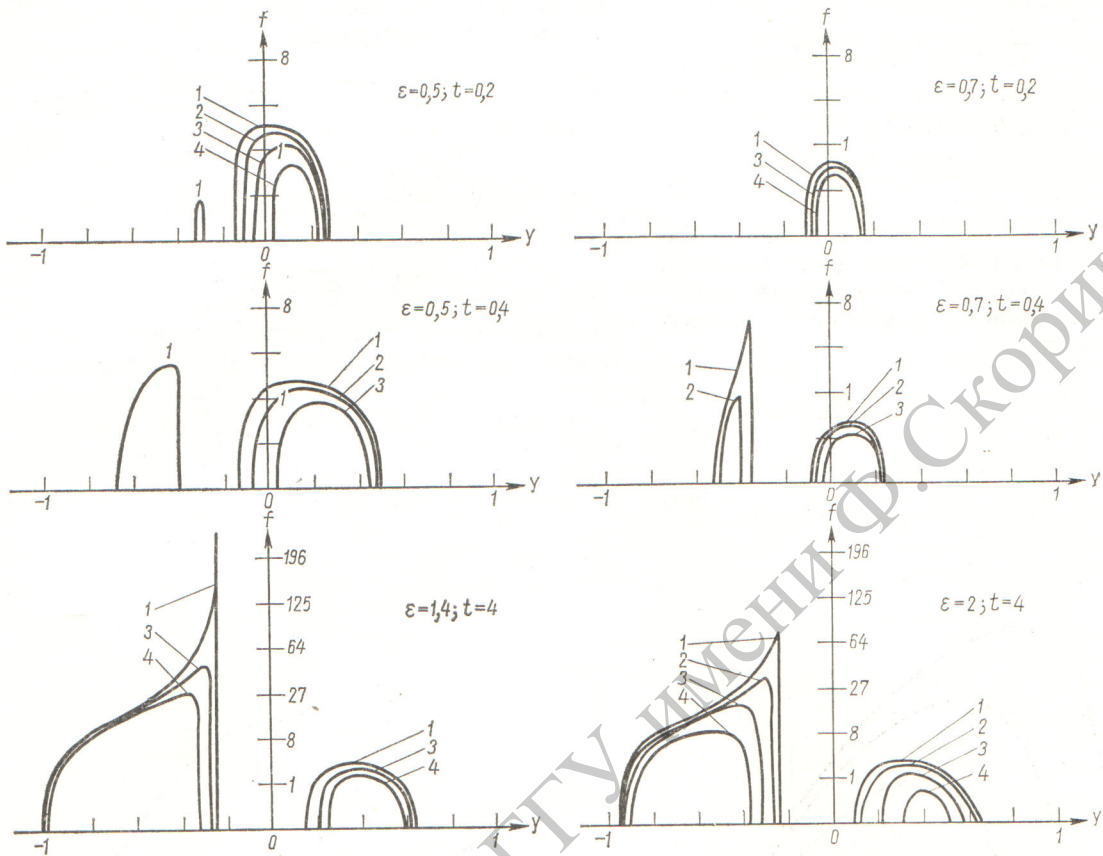


Рис. 3. Области устойчивости спиральной плазменной трубки грушевидного поперечного сечения при $\delta = 4/3$ (заострение в сторону нормали к магнитной оси).


 Р и с. 2. Области устойчивости спиральной плазменной трубки эллиптического поперечного сечения при $\delta = 0$.

В результате получим

$$V' = \frac{4\pi^2}{\alpha\beta_0^{1/2}a} \cdot \frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon}; \quad q = \frac{16\pi^2\alpha^3R^2}{\beta_0^{1/2}a^3} \cdot \frac{(1+\varepsilon^2)^3}{(1+\varepsilon)\varepsilon^4}; \quad (49)$$

$$U_1'' = -\frac{8\pi^2}{\beta_0^{5/2}a} \cdot \frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon}; \quad W'' = \frac{18\pi^2\alpha(1+\varepsilon^2)^2}{\beta_0^{5/2}a^2\varepsilon^5} +$$

$$+ \left[1 + 2\varepsilon^2 \frac{\beta_0 - 2}{\beta_0} + (1+\varepsilon^2) \frac{b}{a} - (1-\varepsilon^2)c \right]. \quad (50)$$

Обозначим через y безразмерный параметр, характеризующий отношение плотности тока j_0 к магнитному полю B_0 на магнитной оси:

$$y = -\frac{j_0R}{2B_0} \cdot \frac{\beta_0}{\alpha R} = -\frac{j_0R}{2B_0} \left(\alpha R + \frac{1}{\alpha R} \right) =$$

$$= -\frac{j_0R}{2B_0} \left(t + \frac{1}{t} \right). \quad (51)$$

Подставив выражения (49), (50) в неравенство (45) и учитывая соотношения (11), (12) и (27), получим условие устойчивости плазмы

в окрестности винтовой магнитной оси $r = R$, $\varphi = \alpha z$:

$$1 - y^2 - \frac{t^2}{\varepsilon^3} \cdot \frac{(1+\varepsilon^2)^2}{1+\varepsilon} \cdot \frac{1}{1+y} + \frac{(1+\varepsilon^2)^2}{2\varepsilon^4} \times$$

$$\times \left[\frac{\beta_0 - 2\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} + \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \left(\frac{\beta_0 b}{a} - \frac{2t^2\varepsilon^4}{1+\varepsilon^2} \right) - \frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} \beta_0 c \right] > 0. \quad (52)$$

Отсюда видно, что устойчивость плазмы в окрестности магнитной оси зависит от отношения j_0R/B_0 , параметра $t = \alpha R$, характеризующего угол наклона винтовой магнитной оси к оси z , эксцентриситета приосевых сечений магнитных поверхностей, отношения b/a , определяющего распределение токов в плазме, и параметра несимметричности сечения плазменной трубки c .

В случае круглых нормальных приосевых сечений магнитных поверхностей $\varepsilon = 1$ зависимость от параметров c и b/a пропадает и условие устойчивости (52) принимает вид [8]

$$-y^2 - t^2 \left(\frac{2}{1+y} + 1 \right) > 0. \quad (53)$$

При $y = -1$ угол прокручивания силовых линий вокруг магнитной оси обращается в нуль вследствие компенсации прокручивания вакуумных силовых линий полем тока в плазме. Влияние поля тока в плазме на угол прокручивания силовых линий проявляется также в зависимости устойчивости плазмы от направления тока.

Уравнения (11), (12) и (27) позволяют выразить параметр b/a через давление плазмы:

$$\frac{b}{a} = -\frac{t^2}{\beta_0} \left[1 + \frac{1}{1+y} - \frac{\kappa}{(1+y)^2} \right], \quad (54)$$

где

$$\kappa = -\frac{\pi^2 p(V) \beta_0^{3/2}}{\alpha^3 B_0^2} \cdot \frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon}. \quad (55)$$

В случае параболического распределения давления $p = p_0 (1 - V/V_\Sigma)$

$$\kappa = \frac{\beta_0^2}{t^2} \cdot \frac{1+\varepsilon^2}{4\varepsilon^2} \gamma; \quad \gamma = \frac{2p_0}{B_0^2} \cdot \frac{R^2}{\rho^2}. \quad (56)$$

Введенная выше величина ρ является шириной плазменной трубки, измеренной вдоль оси r .

Если подставить формулы (34) и (54) в условие (52), получим критерий устойчивости плазмы, выраженный через параметр грушевидности сечения внешней магнитной поверхности δ :

$$f = -y^2 - \frac{t^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{(1+\varepsilon^2)^2}{1+3\varepsilon^2} \left[\frac{2}{1+y} + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{(1-\varepsilon)^2}{1+\varepsilon} \cdot \frac{\kappa}{(1+y)^2} \right] + \frac{1+\varepsilon^2}{4\varepsilon^2} \cdot \frac{1+7\varepsilon^2}{1+3\varepsilon^2} \left\{ t^2 + \frac{1-\varepsilon^2}{1+7\varepsilon^2} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{5+\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} - 3\delta(1+t^2) \right] \right\} > 0. \quad (57)$$

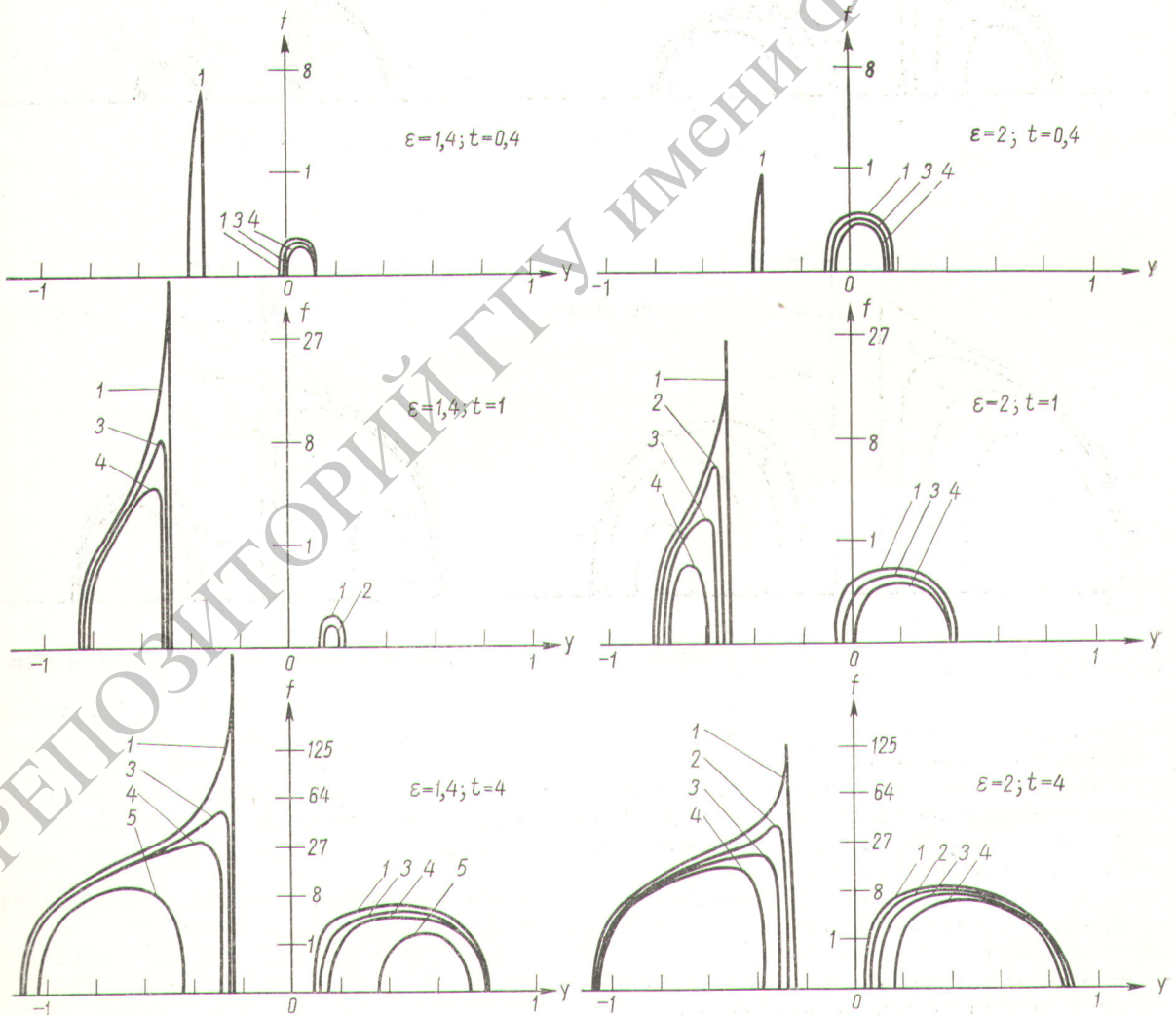
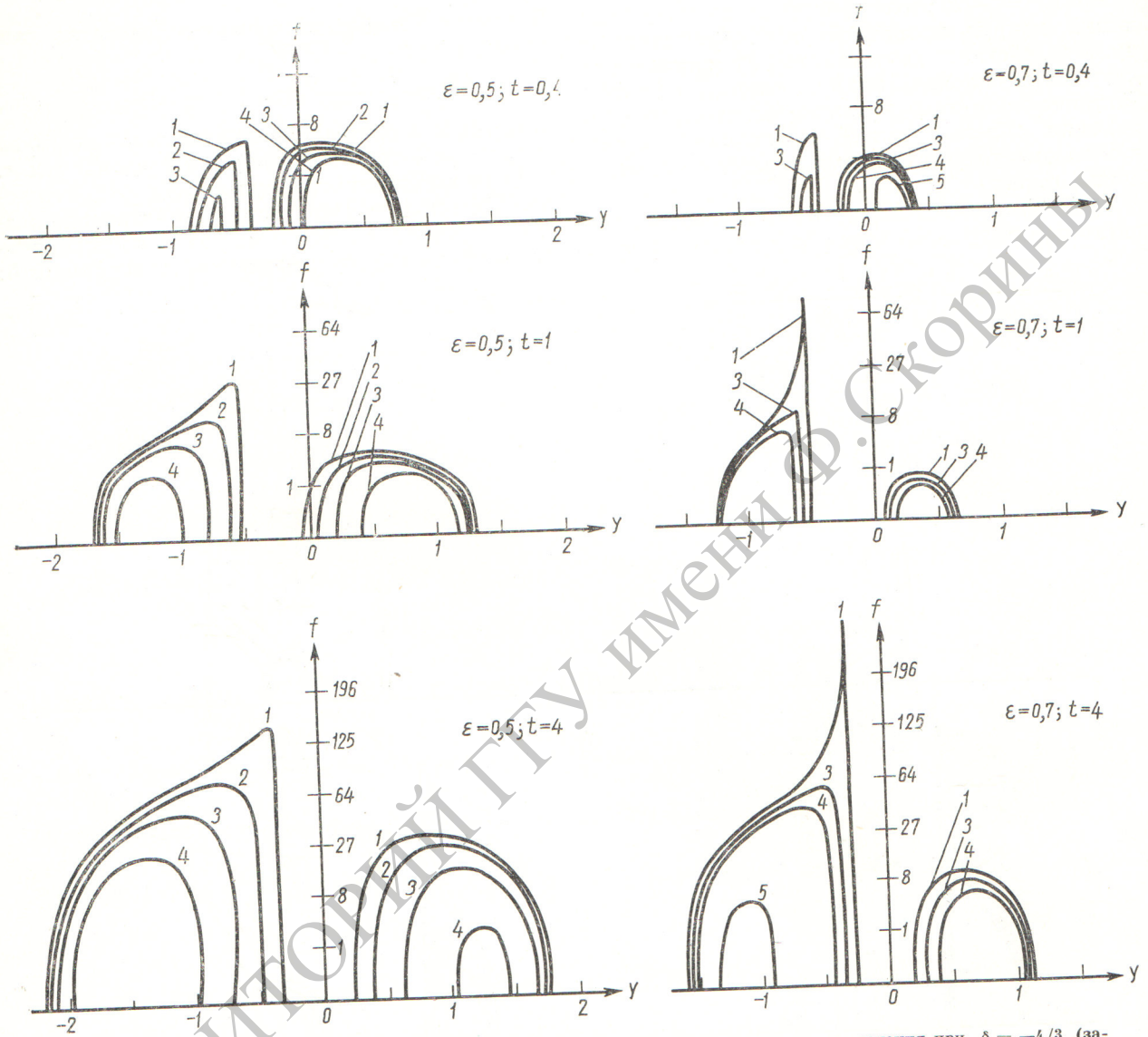


Рис. 3. Области устойчивости спиральной плазменной трубки грушевидного поперечного сечения при $\varepsilon = 4/3$ (заострение в сторону нормали к магнитной оси).



Р и с. 4. Области устойчивости спиральной плазменной трубки грушевидного поперечного сечения при $\delta = -4/3$ (заострение против нормали и магнитной оси).

Отсюда следует, что область устойчивых значений плотности продольного тока j_0 и давления плазмы p_0 существенно зависит от эллиптичности и несимметричности сечения граничной магнитной поверхности, характеризующихся соответственно параметрами ε и δ .

Согласно выражению (57), конфигурации с прямой магнитной осью $t \rightarrow 0$ являются неустойчивыми.

Аксиально симметричные тороидальные плазменные конфигурации можно получить предельным переходом $t \rightarrow \infty$. Из условия (57)

следует, что критерий устойчивости конфигурации с круговой магнитной осью $r = R$, профиль поперечного сечения границы плазмы в которой описывается уравнением

$$z^2/\varepsilon^2 + (r - R_0)^2 - (r - R_0)^3 \delta/R_0 = \rho^2, \quad (58)$$

в предположении о малости смещения магнитной оси $R - R_0 \ll \rho$ имеет вид

$$f_0 = -y_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2} \cdot \frac{(1+\varepsilon^2)^2}{1+3\varepsilon^2} \left[\frac{1+7\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} - 3\delta \frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} - \frac{4(1-\varepsilon)^2 \kappa_0}{(1+\varepsilon)\varepsilon y_0^2} \right] > 0, \quad (59)$$

где

$$y = \frac{j_0 R}{2B_0}; \quad \kappa_0 = -\frac{\pi^2 p'(V) R^3}{B_0^2} \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon} = \frac{1 + \varepsilon^2}{4\varepsilon^2} \gamma. \quad (60)$$

Левые части неравенств (57) и (59) в функции от y и y_0 при различных значениях параметров ε , δ , $t = \alpha R$, $\gamma = \frac{2p_0 R^2}{B_0^2}$ представлены на графиках (рис. 1—4). Как показывает рассмотрение этих графиков, с помощью подходящего выбора формы сечения плазменного шнура можно существенно улучшить его устойчивость по сравнению с плазменным шнуром круглого поперечного сечения. При этом винтовые плазменные трубки можно рассматривать как модель замкнутых плазменных конфигураций, магнитная ось которых представляет собой спираль, навитую на тор. Эллиптичность и грушевидность сечений магнитных поверхностей можно создать также и наложением двухзаходной и трехзаходной токовых обмоток [9]. Соответствующая система может быть устойчивой и при переменном продольном токе в плазме.

На рис. 1 показаны области устойчивости для случая круговой магнитной оси в функции от y_0 при различных параметрах ε , δ и γ , причем цифры на кривых 1—5 соответствуют значениям γ , равным 0,1; 0,4; 1; 2; 10. В отличие от случая круглого поперечного сечения $\varepsilon = 1$ при наличии эллиптичности появляется зависимость предельной плотности тока от давления, характеризуемого параметром γ . При $\varepsilon = 0,5$ и $\delta = -4/3$ предельная плотность тока увеличивается в два раза по сравнению со случаем $\varepsilon = 1$.

На рис. 2 показаны области устойчивости для винтовой плазменной трубки эллиптического поперечного сечения ($\delta = 0$) при различ-

ных параметрах t , ε и γ . При указанных на рис. 2 параметрах t , равных 0,2 и 0,4, области устойчивости существуют только при $\varepsilon \neq 1$. Устойчивость в отсутствие продольного тока имеется только для тех вариантов, когда кривая $f(y)$ пересекает ось ординат. На рис. 3 и 4 построены области устойчивости для случаев грушевидных поперечных сечений при $\delta = 4/3$ и $\delta = -4/3$.

Из приведенных рисунков следует, что заостренность профиля граничной поверхности существенно влияет на устойчивость плазмы, причем устойчивость улучшается, если $\varepsilon > 1$, $\delta > 0$ или $\varepsilon < 1$, $\delta < 0$. Графики при $y < 0$ соответствуют случаю, когда ток течет вдоль направления магнитного поля, а графики при $y > 0$ соответствуют случаю обратного направления продольного тока в плазме.

Авторы выражают благодарность акад. М. А. Леонтовичу за полезные замечания.

Поступила в Редакцию 28/V 1968 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. Mercier. Intern. Conf. Plasma Phys. and Control. Nucl. Fusion. Salzburg. Sept. 1961, p. 95.
2. M. Bineau. Ibid., p. 35.
3. J. Green, J. Johnson. Phys. Rev. Letters, 7, 401 (1961).
4. Л. С. Соловьев. ЖЭТФ, 53, 626 (1967).
5. Л. С. Соловьев. ЖЭТФ, 53, 2063 (1967).
6. Л. С. Соловьев. В сб. «Вопросы теории плазмы». Т. 3. М., Атомиздат, 1963.
7. А. И. Морозов, Л. С. Соловьев. В сб. «Вопросы теории плазмы». Т. 2. М., Атомиздат, 1963.
8. В. Д. Шафранов. «Ядерный синтез», 5, 511 (1968).
9. Л. С. Соловьев, В. Д. Шафранов. В сб. «Вопросы теории плазмы». Т. 5. М., Атомиздат, 1967.

К нелинейной теории нагрева плазмы в ВЧ-ловушке в условиях циклотронного резонанса

В. Б. КРАСОВИЦКИЙ

УДК 533.9

В работах [1—4] было показано, что заряженная частица, помещенная в скрещенные ВЧ-электрическое и постоянное магнитное поля, может быть ускорена поперек магнитного поля до больших энергий, если частота поля ω близка к гирочастоте частицы $\omega_H = \frac{eH_0}{mc}$:

$\Delta = 1 - \frac{\omega_H}{\omega} < \left(\frac{eE_0}{mc\omega} \right)^{2/3}$, где E_0 — амплитуда ВЧ-поля. При этом рассматривалось дви-

жение частицы в заданном поле, что справедливо лишь при выполнении условия $\frac{E_0^2}{8\pi} \gg n_0 \frac{mv^2}{2}$ (n_0 — плотность, а v — скорость ускоряемых частиц). При конечной плотности плазмы с ростом энергии частиц это условие может быть нарушено, и эффекты обратного влияния на поле со стороны ускоряемых токов могут существенно изменить амплитуду поля, а следовательно, и весь ход процесса ускорения.