Об одном аналитическом решении многогрупповых уравнений реактора

Е. С. ГЛУШКОВ, Н. Н. ПОНОМАРЕВ-СТЕПНОЙ, Н. А. ПЕТУШКОВА

УДК 621.039.51

При проведении нейтроннофизических расчетов ядерных реакторов широкое распространение получили численные многогрупповые методы, основанные на замене дифференциальных операторов конечноразностными [1, 2]. Однако в ряде случаев, например при расчете реакторов с учетом физического профилирования, расчете гетерогенных реакторов, реакторов больших размеров и т. д., аналитические методы оказываются более эффективными [3—7].

Предлагаемый в данной работе метод является обобщением одного из решений, полученного авторами ранее [3] при расчете физического профилирования реакторов для случая кратных корней характеристического уравнения. Этот метод удалось применить также и для расчета многозонных реакторов с использованием итераций источников.

В качестве исходной при построении решения принимается система уравнений

$$-\nabla^2\mathbf{\Phi}+\hat{M}\mathbf{\Phi}=Q(r)\,\mathbf{\Lambda}. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{\Phi}$ — вектор-функция, компонентами которой являются групповые потоки нейтронов; матрица $\hat{M}$ (нижнетреугольная) характеризует поглощение и замедление нейтронов; $Q(r)$ — распределение источников нейтронов деления; $\mathbf{\Lambda}$ — вектор, характеризующий групповой спектр нейтронов деления.

Общее решение системы (1) при заданном распределении $Q(r)$ может быть найдено как сумма общего решения соответствующей однородной системы:

$$-\nabla^2\mathbf{\Phi}(r)+\hat{M}\mathbf{\Phi}=0 \tag{2}$$

и какого-либо частного решения неоднородной системы (1).

Обычно общее решение системы (2) получается в предположении, что корни характеристического уравнения

$$\det(\hat{M}-\lambda\hat{E})=0 \tag{3}$$

(характеристические числа матрицы $\hat{M}$) являются простыми [3, 6]. (Заметим, что характеристические числа матрицы $\hat{M}$ совпадают с ее диагональными элементами $\lambda_j=\varkappa_j^2\geqslant 0$, где $\varkappa_j^2=\dfrac{\Sigma_j}{D_j}$; Σ_j — групповое сечение увода за счет замедления и поглощения нейтронов; D_j — групповой коэффициент диффузии.) Естественно обобщить решение на случай кратных корней. Пусть λ_e имеет кратность k_e+1, и каждому значению λ_e соответствует единственный собственный вектор ξ_{l0} [8]. В таком случае этому собственному значению соответствует k_l присоединенных векторов: $\xi_{li}(i=1,\ 2,\ \ldots,\ k_l)$.

Общее решение системы (2) для каждой пространственной зоны будем искать в виде

$$\mathbf{\Phi}(r)=\sum_l\sum_{i=0}^{k_l}\left[C_{li}^{(1)}\mathbf{Y}_{li}^{(1)}(r)+C_{li}^{(2)}\mathbf{Y}_{li}^{(2)}(r)\right], \tag{4}$$

где $\sum\limits_l(k_l+1)=m$ — ранг матрицы $\hat{M}$ (число энергетических групп); $C_{li}^{(1)}$ и $C_{li}^{(2)}$ — произвольные постоянные, определяемые из граничных условий; $\mathbf{Y}_{li}^{(1)}(r)$ и $\mathbf{Y}_{li}^{(2)}(r)$ — линейно независимые решения системы (2).

Для одномерной геометрии удалось найти достаточно простой вид $\mathbf{Y}_{li}(r)$:

$$\mathbf{Y}_{li}(r)=\sum_{n=0}^{i}\xi_{ln}\sum_{k=0}^{i-n}a_{li,\,i-n,\,k}\Theta_k(z_l), \tag{5}$$

где $z_l=\varkappa_l r$; $\Theta_k(z_l)$ — функции скалярного аргумента, определяемые следующим рекуррентным соотношением:

$$\frac{1}{z^2}\left[\Theta_{k+2}(z)+(2k+S)\,\Theta_{k+1}(z)+k(k+S-1)\,\Theta_k(z)\right]=$$
$$=\Theta_k(z)+2k\Theta_{k-1}(z)+k(k-1)\,\Theta_{k-2}(z) \tag{6}$$

$(k=2,3,4,\ldots)$; $\Theta_1(z)=z\dfrac{d\Theta_0(z)}{dz}$; $\Theta_0(z)$ является каким-либо решением уравнения $\dfrac{1}{z^S}\cdot\dfrac{d}{dz}z^S\dfrac{d}{dz}y(z)=y(z)$ (заметим, что при таком определении $\Theta_k(z)=z^k\dfrac{d^k\Theta_0(z)}{dz^k}$). Функции $\mathbf{Y}_{li}^{(1)}$ и $\mathbf{Y}_{li}^{(2)}$ соответствуют $\Theta_0^{(1)}(z_l)$ и $\Theta_0^{(2)}(z_l)$, причем $\Theta_0^{(2)}(z_l)$ является линейно независимым от $\Theta_0^{(1)}(z_l)$ решением последнего уравнения.

Коэффициенты $a_{li,\,i-n,\,k}$ в выражении (5) могут быть найдены при подстановке $\mathbf{\Phi}=\mathbf{Y}_{li}(r)$ в уравнение (2). Учитывая линейную независимость ξ_{li} и соотношения $(\hat{M}-\lambda_l\hat{E})\,\xi_{l0}=0$, $(\hat{M}-\lambda_l\hat{E})\,\xi_{ln}=\xi_{l(n-1)}$, а также замечая, что

$$\nabla^2\Theta_k(z_l)=\varkappa_l^2\left[\Theta_k(z_l)+2k\Theta_{k-1}(z_l)+k(k-1)\,\Theta_{k-2}(z_l)\right],$$

$$\text{где}\quad \nabla^2=\frac{1}{r^S}\cdot\frac{d}{dr}r^S\frac{d}{dr},$$

можно получить рекуррентные соотношения типа

$$\left.\begin{aligned}&a_{(i-n),\,(i-n)}=\frac{a_{(i-n-1),\,(i-n-1)}}{2(i-n)\,\varkappa_l^2};\\&a_{(i-n),\,(k+1)}=\\&=\frac{a_{(i-n-1),\,k}-\varkappa_l^2(k+1)(k+2)\,a_{(i-n),\,(k+2)}}{2(k+1)\,\varkappa_l^2}\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

(индексы l_i для простоты записи опущены.) Коэффициенты $a_{(i-n),\,0}$ могут быть выбраны произвольными $(a_{0,\,0}\neq 0)$.

При получении частного решения неоднородной системы (1) ограничимся рассмотрением двух специальных случаев распределения источников деления.

1. Пусть $Q(r)=\psi_m(r)$, где $\psi_m(r)$ таково, что $\nabla^2\psi_m(r)=-\omega_m^2\psi(r)$ $(\omega_m^2\geqslant 0)$. Тогда частное решение может быть получено в виде [3]: $\mathbf{\Phi}_0(r)=Q(r)\,\mathbf{L}$, где для нахождения вектора $\mathbf{L}$ необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений $\hat{M}_m\mathbf{L}=\mathbf{\Lambda}$, причем матрица $\hat{M}_m=\hat{M}+\omega_m^2\hat{E}$ является невырожденной.

2. Частное решение системы (1) с правой частью, равной $\xi\,E_{lk}\Theta_{\text{к}}(z_l)$, может быть получено в виде $\mathbf{\Phi}=$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорины

$= \sum_{n=0}^{i} \xi_{ln} \sum_{p=0}^{k+k_l+1} a_{i-n,\,p} \quad \Theta_p \quad (z_l)$. Для определения коэффициентов $a_{i-n,p}$ получается система рекуррентных соотношений, аналогичная (7).

Рассмотренные частные решения с учетом (4) дают возможность получить решение системы (1) с использованием функций $\Theta_k\ (z)$ для распределения источников нейтронов деления достаточно общего вида:

$$Q\,(r) = \Sigma a_m \psi_m\,(r) + \sum_{l=1}^{M} \sum_{k=0}^{n_l} [E_{lk}^{(1)} \Theta_k^{(1)}\,(z_l) + E_{lk}^{(2)} \Theta_k^{(2)}\,(z_l)].$$

Это позволяет применить разработанный метод к расчету реакторов в случае кратных корней характеристического уравнения и при осуществлении итераций источников.

При реализации данного метода оказалось удобным искать решение системы (1) последовательно для каждой энергетической группы. (При таком подходе не требуется явного нахождения собственных и присоединенных векторов матрицы $\hat{M}$.) В этом случае задача сводится к решению уравнения одного и того же типа:

$$-\nabla^2 \Phi_j\,(r) + \varkappa_j^2 \Phi_j\,(r) = f_j\,(r), \tag{8}$$

где $f_j\,(r)$ имеет вид

$$f_j\,(r) = \sum_m a_m \psi_m\,(r) + \sum_{l=1}^{M} \sum_{k=0}^{N_l} [E_{lk}^{(1)} \Theta_k^{(1)}\,(z_l) + E_{lk}^{(2)} \Theta_k^{(2)}\,(z_l)].$$

Общее решение уравнения (8) для каждой пространственной зоны запишется следующим образом:

$$\Phi_j\,(r) = B_j^{(1)} \Theta_0^{(1)}\,(z_j) + B_j^{(2)} \Theta_0^{(2)}\,(z_j) + \Phi_{j\,\text{частн}}\,(r),$$

где

$$\Phi_{j\,\text{частн}}\,(r) = \sum_m A_m \psi_m\,(r) + \sum_{l=1}^{M} \sum_{k=0}^{N_l+1} [b_{lk}^{(1)} \Theta_k^{(1)}\,(z_l) + b_{lk}^{(2)} \Theta_k^{(2)}\,(z_l)]$$

$\left(\text{коэффициенты} \quad A_m = \dfrac{a_m}{\omega_m^2 + \varkappa_j^2}\right)$; $B_j^{(1)}$ и $B_j^{(2)}$ — произвольные постоянные, определяемые из граничных условий, а b_{lk} находят по соотношениям типа

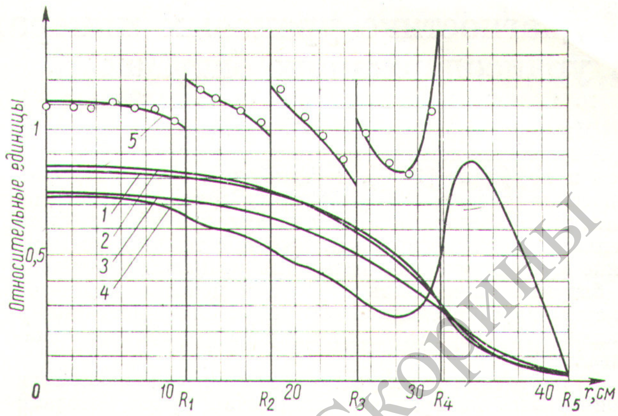
$$b_{lk} = -\frac{E_{lk} + 2\,(k+1)\,\varkappa_l^2 b_{l,\,k+1} + (k+1)\,(k+2)\,\varkappa_l^2 b_{l,\,k+2}}{\varkappa_l^2 - \varkappa_j^2}$$

при $\varkappa_l^2 \neq \varkappa_j^2$; $k = 0, 1, 2, \ldots, N_l$; $b_{l,\,N_l+1} = b_{l,\,N_l+2} = 0$

или

$$b_{lk} = -\frac{E_{l,\,k-1} + k\,(k+1)\,\varkappa_l^2 b_{l,\,k+1}}{2k\varkappa_l^2}$$

при $\varkappa_l^2 = \varkappa_j^2$; $k = 1, 2, 3, \ldots, N_l + 1$; $b_{l,\,N_l+2} = 0$.



Распределение плотности делений и потоков нейтронов по радиусу пятизонного цилиндрического реактора:

1, 2, 3, 4 — потоки нейтронов *1, 2, 3, 4* групп соответственно; *5* — распределение плотности делений; ○ — эксперимент [9].

Последние соотношения были использованы для составления программы расчета цилиндрических одномерных реакторов на ЭВМ. При этом предусмотрены граничные условия, учитывающие наличие на границах зон поглощающих оболочек, и альбедные условия на внешней границе последней зоны. На рисунке приведены результаты расчетов в сравнении с экспериментом (параметры реактора и экспериментальные данные взяты из работы [9]). Видно хорошее согласие расчетных и экспериментальных данных.

Программа оказалась приемлемой для расчетов реакторов с поглощающими оболочками и без них при использовании 5–9 итераций источников деления.

Авторы благодарят Я. В. Шевелева и Г. А. Бать за полезные обсуждения и рекомендации довести предлагаемый метод до конкретных результатов.

Поступило в Редакцию 16/VII 1968 г

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Марчук. Численные методы расчета ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1958.
2. Г. И. Марчук. Методы расчета ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1961.
3. Н. Н. Пономарев-Степной, Е. С. Глушков. «Атомная энергия», **11**, 19 (1961).
4. С. Б. Шихов, В. И. Давыдов, Л. К. Шишков. В сб. «Инженерно-физические вопросы ядерных реакторов». М., Атомиздат, 1966, стр. 67.
5. С. Б. Шихов, В. И. Давыдов, Л. К. Шишков. «Атомная энергия», **22**, 410 (1967).
6. В. И. Носов. Там же, **23**, 25 (1967).
7. С. Н. Бараков. Там же, **24**, 335 (1968).
8. И. М. Гельфанд. Лекции по линейной алгебре. М., «Наука», 1966.
9. Г. А. Бать, В. Н. Гулимов, В. К. Обухов. «Атомная энергия», **26**, 7 (1969).

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. СКОРИНЫ