

Теория критичности реактора при колебаниях плотности горючего

В. М. НОВИКОВ

УДК 621.039.51

Постановка задачи. Известно, что равномерное распределение горючего по активной зоне реактора не соответствует минимуму критической массы, который достигается тогда, когда горючее заметно сконцентрировано во внутренней части активной зоны [1]. Рассмотрим критический реактор с равномерно распределенным горючим. Если в таком реакторе произвести перемещение части горючего к центру активной зоны, то реактор станет надкритичным. Если горючее находится в газообразной фазе, то заметное перемещение горючего может быть достигнуто с помощью обычных акустических колебаний. При этом распределение плотности горючего не будет стационарным. Однако число рождающихся нейтронов пропорционально произведению плотности горючего ρ на поток нейтронов N . Поэтому если в первом приближении колебания плотности приведут к возмущению потока нейтронов, которое тоже будет носить колебательный характер, то в следующем приближении в величине ρN появится слагаемое, пропорциональное квадрату амплитуды колебаний, которое не будет зависеть от времени.

Другими словами, при наличии колебаний горючего усредненная по периоду колебаний величина ρN не будет равна величине $\rho_0 N_0$, где индекс 0 означает соответствующее значение при отсутствии колебаний. Таким образом, возникает принципиальная возможность регулирования реактора с помощью акустических колебаний в каналах с газообразным горючим. При этом колебания во всех каналах должны быть синфазны.

Следует сразу отметить, что понятие горючего в данной проблеме является несколько условным, так как роль горючего может выполнять любой газ, достаточно сильно поглощающий нейтроны, например He^3 .

Задача об акустических колебаниях в реакторе, вообще говоря, сводится к совместному решению уравнений гидродинамики газа и уравнений нейтронного баланса в реакторе. Это связано с тем, что поток нейтронов будет в свою очередь влиять на колебания газа, так как тепловыделение в горючем будет пропорционально плотности газа. В данной работе мы ограничимся рассмотрением случая, когда обратным влиянием потока нейтронов на гидродинамику горю-

чего можно пренебречь. Как будет показано в следующей работе, это условие выполняется для потоков $N \lesssim 10^{13} \div 10^{14}$.

Итак, рассмотрим реактор, во всех каналах которого возбуждены синфазные стоячие волны. При этом будем считать, что длина волны Λ много больше длины рассеяния нейтронов в замедлителе l_s . Для простоты будем учитывать нейтронный баланс в реакторе в одногрупповом приближении. Если каналы расположены достаточно близко друг к другу, так что можно пренебречь блок-эффектами и произвести гомогенизацию в плоскости, перпендикулярной оси канала, то уравнение нейтронного баланса будет иметь вид

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \nabla (D(\mathbf{r}) \nabla N) + \left[(k_\infty - 1) \mu_a + (v - 1) \mu_a \theta \left(\frac{\Delta \rho}{\rho_0} \right) \times \cos \frac{2\pi x}{\Lambda} \sin \omega t \right] N, \quad (1)$$

где $\Delta \rho$ — амплитуда колебаний плотности горючего; ω — частота акустических колебаний; v — число вторичных нейтронов на один акт деления в горючем (для чисто поглощающего газа, например He^3 , $v = 0$); θ — коэффициент использования тепловых нейтронов. Ось x направлена вдоль оси канала. Остальные обозначения стандартные (см., например, [2]).

Следует подчеркнуть, что поскольку поглощение нейтронов в горючем пропорционально его плотности, то при написании уравнения (1) не было проведено никакого разложения по параметру $(\Delta \rho / \rho_0) \ll 1$. В этом смысле уравнение (1) точно учитывает влияние колебаний плотности горючего на динамику реактора.

Хотя реально параметр $\Delta \rho / \rho_0$ всегда достаточно мал, соответствующее слагаемое в уравнении (1), вообще говоря, нельзя рассматривать как малое возмущение. Действительно, отношение второго и первого членов в квадратных скобках в уравнении (1) порядка $\frac{\Delta \rho / \rho_0}{k_\infty - 1}$. Для достаточно больших реакторов, когда $k_\infty - 1 \ll 1$, величина $(\Delta \rho / \rho_0) / (k_\infty - 1)$ может оказаться сравнимой с единицей. Это означает, что для достаточно больших реакторов малые акустические колебания могут играть заметную роль в их динамике.

Будем считать, что коэффициент диффузии D (r) определяется в основном параметрами замедлителя и геометрией системы. Тогда очевидно, что колебания плотности горючего не влияют на величину D . Кроме того, можно принять, что поток N зависит лишь от времени и одной пространственной переменной x .

Введем следующий безразмерный параметр:

$$q = -\frac{\nu-1}{2} \theta \left(\frac{\Lambda}{\pi L} \right)^2 \frac{\Delta \rho}{\rho_0}, \quad (2)$$

где $L = (D/\mu_a)^{1/2}$ — длина диффузии.

Тогда, сделав замену переменных $z = \frac{\pi x}{\Lambda}$, перепишем уравнение (1) в виде

$$\frac{1}{\mu_a} \left(\frac{\Lambda}{\pi L} \right)^2 \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} + \left[(k_\infty - 1) \left(\frac{\Lambda}{\pi L} \right)^2 - 2q \cos 2z \sin \omega t \right] N. \quad (3)$$

Поскольку переменные в уравнении (3) не разделяются, то его решение связано со значительными трудностями. Для выяснения общего характера зависимости потока нейтронов от времени можно предложить следующую процедуру. Заменяем в (3) $\sin \omega t$ ступенчатой функцией

$$f(t) = \begin{cases} +1 & \text{при } nT < t < (n + \frac{1}{2})T, \\ -1 & \text{при } (n + \frac{1}{2})T < t < (n+1)T, \end{cases} \quad (4)$$

где T — период колебаний; n — произвольное целое число. Тот факт, что при такой замене амплитуда ступенчатых колебаний будет меньше, чем амплитуда синусоидальных колебаний, легко учесть соответствующей перенормировкой величины q в выражении (2). Тогда внутри каждого интервала по t коэффициенты в уравнении (3) не зависят от времени и можно провести разделение переменных. Представив N в виде $N = e^{\lambda t} \Phi(z)$ и введя обозначение

$$a = \left[(k_\infty - 1) - \frac{\lambda}{\mu_a} \right] \left(\frac{\Lambda}{\pi L} \right)^2, \quad (5)$$

получим для функции $\Phi(z)$ уравнение Маттье в стандартной форме:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + [a - 2(\pm q) \cos 2z] \Phi = 0. \quad (6)$$

Знак «+» или «-» в (6) зависит от рассматриваемого интервала в (4). Полученные для каждого интервала времени решения должны быть «сшиты» в точках $t = \frac{2n+1}{2} T$.

Изменение реактивности в бесконечном реакторе. Поскольку начало координат находится в одной из точек, соответствующих пучности колебаний плотности горючего, и реактор бесконечен, то решение уравнения (6) должно быть четным. Кроме того, из физических соображений очевидно, что решение должно быть во всяком случае периодическим с периодом, равным периоду колебаний плотности, т. е. π .

Решение уравнения Маттье, удовлетворяющее этим условиям, $se_{2n}(z, q)$ — эллиптические косинусы образуют полную систему функций (для произвольной четной периодической функции с периодом π). При этом функция se_{2n} является решением уравнения (6), если коэффициент a равен соответствующему собственному значению $a_{2n}(q)$ (см., например, [3]). Среди собственных функций se_{2n} только одна — se_0 — является знакоопределенной. Следовательно, для $T \rightarrow \infty$ только она одна будет реализовывать физическое решение уравнения (6). Соответствующее собственное значение $a_0(q^2)$ отрицательно. Величина λ , характеризующая изменение потока нейтронов во времени, в этом случае равна

$$\lambda_0 = (k_\infty - 1)\mu_a - \mu_a \left(\frac{\pi L}{\Lambda} \right)^2 a_0(q^2).$$

Если при отсутствии возмущения плотности горючего реактор был критическим ($k_\infty = 1$ и $\lambda_0 = 0$), то при возмущении λ_0 становится положительной величиной, что соответствует надкритическому состоянию.

Покажем теперь, что при произвольной частоте колебаний плотности горючего реактивность реактора увеличивается. При колебаниях плотности горючего пространственное распределение потока нейтронов также меняется во времени. Однако в связи с периодичностью колебаний естественно поставить вопрос об отыскании такого пространственного распределения потока, форма которого будет восстанавливаться через интервалы времени $t = nT$. Будем называть такое решение $N_0(z, t)$ квазисобственным решением уравнения (3). Оно удовлетворяет условию

$$\xi N_0(z, 0) = N_0(z, T), \quad (7)$$

где величина ξ характеризует средний рост потока во времени. Получим уравнение, определяющее ξ и N_0 через решение уравнения (6). Пусть при $t = 0$ пространственное распределение нейтронов описывается некой четной периодической функцией $N_0(z) > 0$. Разложим эту функцию в ряд по $se_{2n}(z, q)$:

$$N_0(z) = \sum_n C_n se_{2n}(z, q),$$

где C_n — коэффициенты разложения. Тогда для момента $t = T/2$ решение будет иметь вид

$$N(z, T/2) = \sum_n C_n \operatorname{se}_{2n}(z, q) e^{\lambda_n(q) T/2}, \quad (8)$$

где

$$\lambda_n = -\mu_a \left(\frac{\pi L}{\Lambda}\right)^2 a_{2n}(q^2). \quad (9)$$

Для того чтобы получить временной ход решения при $\frac{T}{2} \leq t \leq T$, следует функцию (8) разложить в ряд по функциям $\operatorname{se}_{2n}(z, -q)$ — решениям уравнения (6) для отрицательных значений q , после чего каждый член этого разложения домножить на $\exp\left[\lambda_n(-q)\left(t - \frac{T}{2}\right)\right]$. В итоге по прошествии времени $t = T$ поток нейтронов будет описываться функцией

$$N(z, T) = \sum_{n, n'} C_n A_{nn'} \operatorname{se}_{2n'}(z, -q) e^{[\lambda_n(q) + \lambda_{n'}(-q)] \frac{T}{2}}, \quad (10)$$

где

$$A_{nn'} = \int_0^\pi dz \operatorname{se}_{2n}(z, q) \operatorname{se}_{2n'}(z, -q) \quad (11)$$

(предполагается, что функции se_{2n} нормированы на единицу на интервале $[0, \pi]$). Потребуем теперь, чтобы решение (10) было квазисобственным, т. е. отличалось от исходного выражения $N_0(z)$ лишь множителем. Подставив (10) и $N_0(z)$ в условие (7), получим после простых преобразований следующую систему алгебраических уравнений для C_n — исходных коэффициентов разложения $N_0(z)$ в ряд по $\operatorname{se}_{2n}(z, q)$:

$$\xi C_m = \sum_n C_n \left[\sum_{n'} A_{nn'} A_{mn'} \times \right. \\ \left. \times \exp\left\{[\lambda_n(q) + \lambda_{n'}(-q)] \frac{T}{2}\right\} \right]. \quad (12)$$

В работе [4] приведено решение уравнений (12) и вычислено собственное значение ξ , которое с точностью до членов $q^2 \ll 1$ имеет вид

$$\xi = 1 + \frac{\alpha q^2}{2} \left(1 - \frac{\operatorname{th} \alpha}{\alpha}\right) > 1, \quad \alpha = \left(\frac{\pi L}{\Lambda}\right)^2 \mu_a T. \quad (13)$$

Отдельные слагаемые в выражении (13) имеют следующий смысл. При $T \rightarrow \infty$ величина α растет и ξ стремится к величине $1 + \frac{\alpha q^2}{2} \approx e^{\lambda_0(q^2)T}$, характеризующей рост потока нейтронов за время T при фиксированном профиле плотности («замороженная» волна).

Слагаемое, пропорциональное $\operatorname{th} \alpha$, уменьшает величину ξ ; оно связано с пространствен-

ными колебаниями потока нейтронов, т. е. с тем, что относительный максимум N для двух последовательных полупериодов лежит в разных точках. Роль этого фактора увеличивается с ростом частоты колебаний. Однако всегда величина ξ больше единицы.

Записав ξ в виде $\xi = e^{\Delta k_{\text{эфф}} \mu_a T}$, найдем выражение для скачка эффективной реактивности при возникновении колебаний горючего:

$$\Delta k_{\text{эфф}} = \frac{(v-1)^2 \theta^2}{8\pi^2} \left(\frac{\Lambda}{L}\right)^2 \left(\frac{\Delta \rho}{\rho_0}\right)^2 \times \\ \times \left[1 - \frac{\operatorname{th} \pi^2 \sqrt{\frac{l_s}{3l_a}} \frac{v_T}{c} \cdot \frac{L}{\Lambda}}{\pi^2 \sqrt{\frac{l_s}{3l_a}} \frac{v_T}{c} \cdot \frac{L}{\Lambda}} \right], \quad (14)$$

где l_s, l_a — соответственно длина рассеяния и поглощения в реакторе при отсутствии колебаний; v_T — скорость тепловых нейтронов, c — скорость звука в горючем. Таким образом, как следует из выражения (14), эффективная реактивность, возникающая при колебаниях плотности горючего, зависит от квадрата амплитуды колебаний и двух параметров, характеризующих скорость колебаний v_T/c и длину волны Λ/L . Зависимость $\Delta k_{\text{эфф}}$ от Λ/L монотонная, и при $\pi^2 \sqrt{\frac{l_s}{3l_a}} \frac{v_T}{c} \cdot \frac{L}{\Lambda} \ll 1$ величина $\Delta k_{\text{эфф}}$ близка к асимптотическому значению

$$\operatorname{Max}(\Delta k_{\text{эфф}}) = \frac{\pi^2}{72} \left(\frac{v_T}{c}\right)^2 \left(\frac{l_s}{l_a}\right) (v-1)^2 \theta^2 \left(\frac{\Delta \rho}{\rho_0}\right)^2. \quad (15)$$

Для численной оценки $\operatorname{Max}(\Delta k_{\text{эфф}})$ примем следующие характеристики условного реактора: $v_T = 3000$ м/сек ($t_{\text{нейтр}} = 300^\circ \text{C}$); $c = 120$ м/сек (для UF_6); $v = 2$; $\theta = 1/2$; $l_a = 30 l_s$. Тогда получим следующую оценку: $\operatorname{Max}(\Delta k_{\text{эфф}}) \approx 2,2 (\Delta \rho/\rho_0)^2$.

Таким образом, в достаточно большом реакторе при амплитуде колебаний $(\Delta \rho/\rho_0) = 0,05$ дополнительная реактивность сравнивается с вкладом запаздывающих нейтронов.

Изменение реактивности в конечном реакторе.

Для расчета величины $\Delta k_{\text{эфф}}$ в конечном реакторе следует поставить граничные условия как для потока нейтронов, так и для колебаний плотности горючего на торцах реактора.

Рассмотрим реактор без отражателя в предположении, что его реальные и экстраполированные размеры совпадают. Тогда $N(0) = N(H) = 0$. Для выбора граничных условий колебаний плотности горючего ограничимся наиболее интересным случаем, когда полная масса горючего в активной зоне при колебаниях не меняется. В этом случае в процессе колеба-

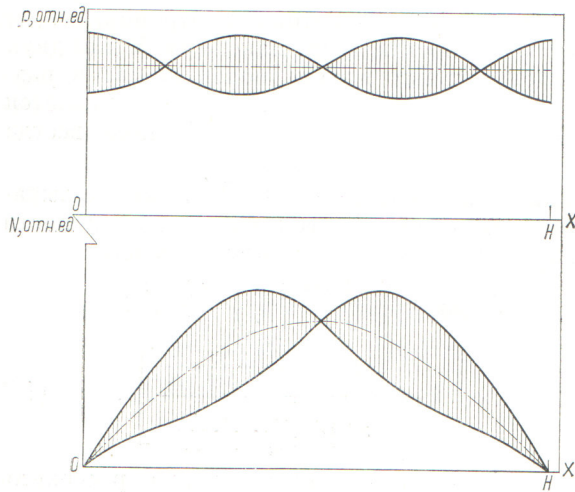


Рис. 1. Кривые пульсации плотности горячего ρ и потока нейтронов N по высоте реактора при $l = 3$. Заштрихованы области изменения этих величин в процессе колебаний. Пунктиром показаны значения ρ и N при отсутствии колебаний.

ния горячее не выходит из активной зоны и не входит в нее и соответствующее изменение реактивности связано только с пространственной неоднородностью. Поэтому примем, что скорость газа на торцах реактора обращается в нуль (закрытые с торцов каналы). Так как колебания плотности в стоячей волне сдвинуты относительно колебаний скорости на $\pi/2$, то условие постоянства полной массы горячего в активной зоне приводит к тому, что на торцах реактора расположены пучности колебаний плотности. Это означает, что на высоте реактора укладывается целое число полуволин, т. е. $H = \frac{\Lambda}{2} l$, где $l = 1, 2, 3, \dots$. Граничные условия для N в безразмерных переменных [см. уравнение (3)] будут иметь вид

$$\Phi(0) = \Phi\left(\frac{\pi l}{2}\right) = 0. \quad (16)$$

Решение уравнения (6) с граничными условиями (16) удобно рассматривать отдельно для $l \geq 3$ и $l = 1; 2$.

1. Случай $l \geq 3$. Решение уравнения (6) выражается через функции Матье $se_\nu(z, q)$ дробного порядка ν . Из граничных условий (16) находим наименьшее значение индекса $\nu = \frac{2}{l}$. Соответствующее решение знакоопределенно в интервале $0 < z < \frac{\pi l}{2}$ и при $q = 0$ переходит в обычное выражение $\sin \frac{2z}{l} = \sin \frac{\pi x}{H}$. Остальные решения уравнения (6), удовлетворяющие

граничным условиям (16), знакопеременны в интервале $[0, 2\pi l]$. Вместе с функцией $se_{2/l}$ они образуют полный набор в интервале $[0, 2\pi l]$ и соответствуют значениям индекса $\nu = \frac{2}{l} |nl \pm 1|$, где n — произвольное целое число. Для того чтобы вычислить величину $\Delta k_{эфф}$, следует решить уравнение (7) для введенного ранее квазисобственного распределения потока нейтронов и найти величину $\xi = e^{\Delta k_{эфф} \mu_a T}$, описывающую средний рост потока во времени. Эта процедура, аналогичная рассмотренной выше для случая бесконечного реактора, выполнена в работе [4]. Окончательное выражение имеет вид

$$\Delta k_{эфф} = \frac{(\nu - 1)^2 \theta^2}{2(l^2 - 4)} \cdot \frac{(\Delta \rho / \rho_0)^2}{k_\infty - 1} \times \left\{ \frac{l-2}{2l} \left[1 - \frac{\text{th} \frac{\pi}{2} (l+2) \sqrt{\frac{l_s}{3l_a} (k_\infty - 1) \frac{v_T}{c}}}{\frac{\pi}{2} (l+2) \sqrt{\frac{l_s}{3l_a} (k_\infty - 1) \frac{v_T}{c}}} \right] + \frac{l+2}{2l} \left[1 - \frac{\text{th} \frac{\pi}{2} (l-2) \sqrt{\frac{l_s}{3l_a} (k_\infty - 1) \frac{v_T}{c}}}{\frac{\pi}{2} (l-2) \sqrt{\frac{l_s}{3l_a} (k_\infty - 1) \frac{v_T}{c}}} \right] \right\}. \quad (17)$$

При переходе к бесконечному реактору ($k_\infty \rightarrow 1$) формула (17) переходит в выражение (15) для максимальной реактивности в бесконечном реакторе. Это связано с тем, что значение l фиксировано, и поэтому переход $k_\infty \rightarrow 1$ соответствует одновременному переходу по длине волны колебаний $\Lambda \rightarrow \infty$.

Как следовало ожидать, рост реактивности уменьшается с ростом числа полуволин, укладываемых в размерах реактора. Квазисобственное распределение потока нейтронов имеет вид (с точностью до членов $\sim q$)

$$N(x) = \sin \frac{\pi x}{H} \pm \frac{q}{4} \times \left\{ \frac{l}{l+2} \text{th} \left[\mu_a (k_\infty - 1) T \frac{l(l+2)}{4} \right] \sin \frac{(l+1)\pi x}{H} \mp \frac{q}{4} \cdot \frac{l}{l-2} \text{th} \left[\mu_a (k_\infty - 1) T \frac{l(l-2)}{4} \right] \sin \frac{(l-1)\pi x}{H} \right\}. \quad (18)$$

Верхний знак в уравнении (18) соответствует времени $t = nT$, нижний — времени $t = \frac{2n+1}{2} T$. На рис. 1 приведено распределение $N(x)$ и $\rho(x)$ по высоте реактора (для $\nu > 1$).

2. Случай $l = 1$ и $l = 2$. Этот случай также подробно рассмотрен в работе [4]. Полученные выражения для $\Delta k_{эфф}$ имеют вид

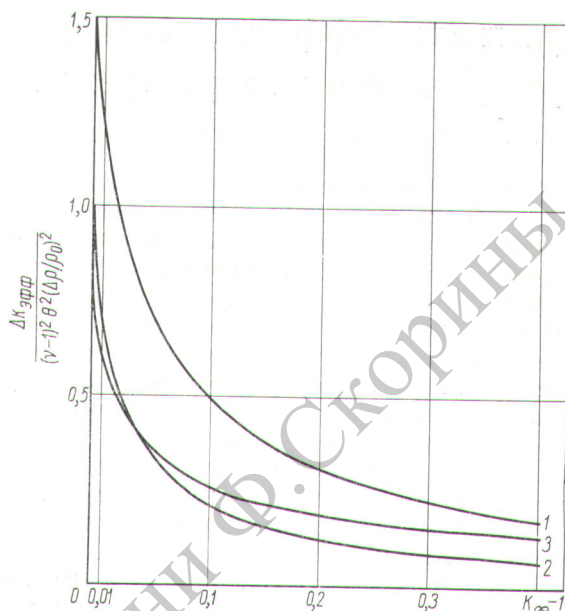
$$\left. \begin{aligned} \Delta k_{эфф} &= \frac{(\nu-1)^2 \theta^2}{12} \cdot \frac{(\Delta \rho / \rho_0)^2}{k_\infty - 1} \times \\ &\times \left\{ 1 - \left[\frac{3\pi}{2} \cdot \frac{v_T}{c} \sqrt{\frac{l_s}{3l_a} (k_\infty - 1)} \right]^{-1} \times \right. \\ &\times \left. \text{th} \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{v_T}{c} \sqrt{\frac{l_s}{3l_a} (k_\infty - 1)} \right\}, \quad l=1; \\ \Delta k_{эфф} &= \frac{(\nu-1)^2 \theta^2}{32} \cdot \frac{(\Delta \rho / \rho_0)^2}{k_\infty - 1} \times \\ &\times \left\{ 1 - \left[2\pi \frac{v_T}{c} \sqrt{\frac{l_s}{3l_a} (k_\infty - 1)} \right]^{-1} \times \right. \\ &\times \left. \text{th} 2\pi \frac{v_T}{c} \sqrt{\frac{l_s}{3l_a} (k_\infty - 1)} \right\}, \quad l=2. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Максимальное значение $\Delta k_{эфф}$ для $l = 1$ в 1,5 раза превышает соответствующее значение $\Delta k_{эфф}$ для $l \geq 2$. Следует также отметить, что случай $l = 2$ выделяется из всех прочих тем, что величина $\lambda(q)$, соответствующая знаменителю в интервале $0 \leq x \leq H$ решению уравнения (5), не является четной функцией q . Для всех других случаев $l \neq 2$ величина $\lambda(q)$ — четная функция. Это приводит к тому, что при $l = 2$ колебания квазисобственного распределения потока нейтронов возникают не только за счет более высоких гармоник, но и за счет основной гармоники. Амплитуда колебаний потока равна

$$\epsilon_{эфф} (k_\infty - 1)^{1/2} |q| T - 1 \approx \frac{\pi}{2} (\nu - 1) \theta \frac{v_T}{c} \sqrt{\frac{l_s}{3l_a}} \cdot \frac{\Delta \rho / \rho_0}{\sqrt{k_\infty - 1}}. \quad (20)$$

Отсюда следует, что амплитуда колебаний потока нейтронов может быть много больше амплитуды колебаний плотности горючего.

Закключение. На рис. 2 приведены графики зависимости дополнительной реактивности, возникающей при колебаниях плотности горючего. Как следует из рис. 2, скачок реактивности для достаточно больших реакторов и $(\Delta \rho / \rho_0) \approx 0.1 - 0.05$ сравним с вкладом запаздывающих нейтронов. Таким образом, существует принципиальная возможность регулирования критичности реактора с помощью возбуждения колебаний плотности газообразного горючего. Такое регулирование обладает определенными достоинствами. Так, время изменения реактивности, определяющее переходные процессы, мало — порядка одного периода колебаний.



Р и с. 2. Зависимость $\Delta k_{эфф}$ от $k_\infty - 1$:

1 — $l = 1$, 2 — $l = 2$; 3 — $l = 3$. Для других параметров реактора приняты значения: $v_T = 2200$ м/сек; $c = 120$ м/сек; $l_a = 50$ л_s.

Кроме того, практически не существует аварийной опасности, так как с прекращением колебаний реактивность падает. Амплитуда пульсации потока нейтронов [см., например, выражение (20)] во всяком случае в $(k_\infty - 1)^{-1/2}$ раз превышает амплитуду колебаний плотности горючего. Это обстоятельство можно использовать для получения потока нейтронов, пульсирующего с большой амплитудой.

Рассмотренный эффект роста реактивности при колебаниях плотности горючего может оказаться важным при изучении возможности возникновения автоколебательных режимов в реакторах с высоким потоком нейтронов.

Поступила в Редакцию 20/VI 1968 г.
В окончательной редакции 17/X 1968 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Goertzel. J. Nucl. Engng, 2, 193 (1956).
2. И. С. Григорьев, В. М. Новиков. Диффузия нейтронов в гетерогенных средах. М., Атомиздат, 1966.
3. Н. В. Мак-Лаклан. Теория и приложения функции Матье. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
4. В. М. Новиков. Препринт ИАЭ № 4641, 1968.