

Сравнение эффективности различных критериев устойчивости пространственного распределения нейтронов

И. С. ПОСТНИКОВ, Е. Ф. САБАЕВ

УДК 621.039.51

Известны два основных подхода к решению задачи об устойчивости пространственного распределения нейтронов в энергетических реакторах большой мощности. Первый подход основан на использовании метода гармоник, который заключается в том, что решение отыскивается в виде разложения по пространственным гармоникам. С использованием этого подхода в работах [1—4] при некоторых предположениях получены достаточно простые инженерные критерии устойчивости. В основу другого подхода положен второй метод Ляпунова. Этот подход более обоснован, поскольку критерии устойчивости, получаемые при использовании второго метода Ляпунова, являются достаточными, т. е. в отличие от метода гармоник в данном случае известен знак погрешности. Из работ, выполненных в этом направлении, следует отметить [5—8]. Наиболее простые достаточные критерии устойчивости, приемлемые для инженерных расчетов, получены в работах [7, 8].

Поскольку критерии устойчивости, получаемые при помощи метода гармоник, являются приближенными, а критерии, получаемые при использовании второго метода Ляпунова, — лишь достаточными, возникает вопрос о конструктивности [9] указанных выше критериев устойчивости.

В настоящей работе на примере одномерной модели реактора показана возможность применения для расчетов устойчивости метода *D*-разбиения [10], с помощью которого для некоторых конкретных значений параметров получено точное решение задачи. На этой основе проведено сравнение различных приближенных критериев устойчивости.

Исследование устойчивости методом *D*-разбиения

Рассмотрим энергетический реактор на тепловых нейтронах без отражателя с пренебрежимо малым коэффициентом реактивности по теплоносителю. Примем, что распределение нейтронов по радиусу реактора при переходных процессах не отличается от стационарного. В предположении, что баланс нейтронов удовлетворяет уравнениям одногруппового диффузионного

приближения, задача об устойчивости «в малом» стационарного режима такого реактора с обратной связью по отравлению ксеноном сводится к исследованию устойчивости нулевого решения системы уравнений [1—3]:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\Phi^*} \cdot \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial \xi^2} \varphi + \\ + \frac{H^2}{M^2} [\alpha_\varphi \Phi^* \varphi + \alpha_x x] = 0, \quad \xi \in (0, 1); \\ \frac{\partial i}{\partial t} = \sigma_x \Phi^* \gamma_i \varphi - \lambda_i i; \\ \frac{\partial x}{\partial t} = \lambda_i i - (\lambda_x + \sigma_x \Phi^*) x - \\ - \sigma_x \Phi^* (X^* - \gamma_x) \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь

$$\varphi = \Phi - \Phi^*; \quad i = \Phi^* (I - I^*); \quad x = \Phi^* (X - X^*);$$

$$\alpha_x = -\left(\frac{\partial k_\infty}{\partial X}\right)^*; \quad \alpha_\varphi = -\left(\frac{\partial k_\infty}{\partial \Phi}\right)^*;$$

$$X^* = \frac{\sigma_x \Phi^*}{\lambda_x + \sigma_x \Phi^*};$$

Φ — поток нейтронов; X и I — соответственно концентрация Xe^{135} и I^{135} , отнесенная к равновесной концентрации Xe^{135} при бесконечно большом потоке нейтронов; k_∞ — коэффициент размножения нейтронов; ξ — пространственная координата; H — высота реактора; M^2 — квадрат длины миграции; σ_x — микроскопическое сечение поглощения тепловых нейтронов изотопом Xe^{135} ; γ_i и γ_x — соответственно выход Xe^{135} в результате распада I^{135} и непосредственно при делении; λ_i и λ_x — постоянные распада I^{135} и Xe^{135} (звездочкой отмечены значения зависимых переменных в стационарном режиме). Нетрудно видеть, что без нарушения общности можно считать, что M^2 не зависит ни от ξ , ни от состояния реактора.

Дополним систему уравнений (1) краевыми условиями вида

$$\varphi(0, t) = \varphi(1, t) = 0. \quad (2)$$

Примем $\Phi^* = \Phi_0 f(\xi)$ и дополнительно предположим, что функция $f(\xi)$ является симметричной относительно $\xi = 0,5$.

Рассмотрим задачу об устойчивости реактора по отношению к динамическим перекосам пото-

ка нейтронов по высоте *. При анализе динамических перекосов необходимо исключить из рассмотрения основное распределение нейтронов. Ввиду симметрии краевой задачи (1), (2) в данном случае достаточно ограничиться рассмотрением решений, обращающихся в нуль в точке $\xi = 0,5$. При этом задача сводится к исследованию устойчивости нулевого решения краевой задачи (1), (2) с дополнительным условием

$$\varphi(0,5, t) = 0. \quad (3)$$

Для решения этой задачи используем метод D -разбиения [10]**. В качестве параметров, по которым будем проводить D -разбиение, возьмем Φ_0 и H^2/M^2 . После преобразования по Лапласу при нулевых начальных условиях краевая задача (1) — (3) принимает вид

$$-\frac{d^2\bar{\varphi}}{d\xi^2} + F(p, \xi, \Phi_0, \frac{H^2}{M^2})\bar{\varphi} = 0; \quad (4)$$

$$\bar{\varphi}(0) = \bar{\varphi}(0,5) = 0, \quad (5)$$

где

$$\bar{F} = \frac{1}{f(\xi)} \cdot \frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} + \alpha_\varphi \Phi_0 f(\xi) \frac{H^2}{M^2} + \alpha_x \frac{H^2}{M^2} K(p, \xi);$$

$$K(p, \xi) = \frac{\sigma_x \Phi_0 f(\xi) [(1-X^*)\lambda_i - p(X^* - \gamma_x)]}{(p + \lambda_i)[p + \lambda_x + \sigma_x \Phi_0 f(\xi)]}, \quad (6)$$

p — параметр преобразования Лапласа; $\bar{\varphi}$ — изображение по Лапласу переменной φ .

В общем случае получить из уравнения (4) характеристическое уравнение в явном виде не представляется возможным, поскольку функция F сложным образом зависит от ξ . Поэтому поступим так. Предположим, что нам известны решения уравнения (4) при следующих начальных условиях (при $\xi = 0$):

$$\begin{aligned} 1) \quad \bar{\varphi} &= 0; \quad \bar{\varphi}' = 1; \\ 2) \quad \bar{\varphi} &= 1; \quad \bar{\varphi}' = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Обозначим эти решения соответственно $\bar{\varphi}_1$ и $\bar{\varphi}_2$. Нетрудно видеть, что $\bar{\varphi}_1$ и $\bar{\varphi}_2$ образуют фундаментальную систему решений для уравнения (4). Записав общее решение уравнения (4) в виде

$$\bar{\varphi} = c_1 \bar{\varphi}_1 + c_2 \bar{\varphi}_2$$

при краевых условиях (5), получим

$$c_1 \bar{\varphi}_1(0) + c_2 \bar{\varphi}_2(0) = 0;$$

$$c_1 \bar{\varphi}_1(0,5) + c_2 \bar{\varphi}_2(0,5) = 0.$$

Из условия, что краевая задача (4), (5) имеет нетривиальное решение, запишем характеристическое уравнение

$$\varphi_1(0) \bar{\varphi}_2(0,5) - \bar{\varphi}_1(0,5) \bar{\varphi}_2(0) = 0. \quad (8)$$

Принимая $p = j\omega$, выделяя в уравнении (4) действительную и мнимую части и учитывая (7), из выражения (8) получаем, что уравнения для определения кривой D -разбиения на плоскости параметров Φ_0 и H^2/M^2 имеют вид:

$$\begin{aligned} u(0,5, \omega, \Phi_0, \frac{H^2}{M^2}) &= 0; \\ v(0,5, \omega, \Phi_0, \frac{H^2}{M^2}) &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где $u(\xi, \omega, \Phi_0, \frac{H^2}{M^2})$ и $v(\xi, \omega, \Phi_0, \frac{H^2}{M^2})$ — решения системы уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 u}{d\xi^2} + F_1(\omega, \xi, \Phi_0, \frac{H^2}{M^2})u - \\ - F_2(\omega, \xi, \Phi_0, \frac{H^2}{M^2})v &= 0; \\ -\frac{d^2 v}{d\xi^2} + F_1(\omega, \xi, \Phi_0, \frac{H^2}{M^2})v + \\ + F_2(\omega, \xi, \Phi_0, \frac{H^2}{M^2})u &= 0 \end{aligned}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} u(0) &= 0; & v(0) &= 0; \\ u'(0) &= 1; & v'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_1 &= \operatorname{Re} F(j\omega, \xi, \Phi_0, \frac{H^2}{M^2}); \\ F_2 &= \operatorname{Im} F(j\omega, \xi, \Phi_0, \frac{H^2}{M^2}). \end{aligned}$$

Построение кривой D -разбиения по уравнениям (9) можно проводить путем дифференцирования уравнений (9) по параметру ω [11] или непосредственным нахождением параметров ω , Φ_0 и H^2/M^2 , при которых минимальное значение функции

$$V = u^2(0,5, \omega, \Phi_0, \frac{H^2}{M^2}) + v^2(0,5, \omega, \Phi_0, \frac{H^2}{M^2})$$

обращается в нуль.

Применение метода D -разбиения к расчету устойчивости позволяет получить точное решение задачи. Однако использование этого метода для расчета устойчивости реактора по распре-

* Под неустойчивостью реактора по отношению к динамическим перекосам потока нейтронов подразумевается неустойчивость стационарного режима, принципиально не устранимая при помощи регулятора средней мощности.

** Насколько известно авторам, указанный метод для расчетов устойчивости стационарного режима реактора с обратной связью по отравлению ксеноном ранее не применялся.

деленным математическим моделям даже при одномерной идеализации приводит к значительному объему вычислительных работ. Поэтому применение метода D -разбиения для расчета устойчивости стационарного режима реактора с обратной связью по отравлению ксеноном ограничивается, по-видимому, только случаем одномерных моделей реактора.

Сравнение различных приближенных критериев устойчивости

Таким образом, имеется возможность получить для конкретных значений параметров точное решение задачи об устойчивости реактора, провести сравнение приближенных критериев устойчивости и определить границы их эффективного применения. Работа [1] — одна из первых работ, посвященных анализу устойчивости пространственного распределения нейтронов. В этой работе анализ устойчивости проводился при помощи метода гармоник, причем в качестве базисной системы функций использовались собственные функции стационарной краевой задачи. При выводе приближенного критерия устойчивости дополнительно предполагалось, что перекрестные члены в системе уравнений для определения коэффициентов разложения несущественны. Применение критерия работы [1] к задаче об устойчивости реактора по отношению к динамическим перекосам потока нейтронов по высоте приводит к следующему приближенному условию устойчивости:

$$\lambda_2 \frac{M^2}{H^2} > \alpha_x \frac{\sigma_x \bar{\Phi}_2 (\bar{X}_2 - \gamma_x)}{\lambda_x + \lambda_i + \sigma_x \bar{\Phi}_2} - \alpha_\varphi \bar{\Phi}_2; \quad (10)$$

где

$$\bar{\Phi}_2 = \Phi_0 \frac{\int_0^1 f(\xi) \psi_2^2 d\xi}{\int_0^1 \psi_2^2 d\xi}; \quad \bar{X}_2 = \frac{\int_0^1 X^*(\xi) \psi_2^2 d\xi}{\int_0^1 \psi_2^2 d\xi};$$

λ_2 — второе собственное значение; ψ_2 — соответствующая ему собственная функция стационарной краевой задачи

$$-\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \frac{1}{f(\xi)} \cdot \frac{d^2f(\xi)}{d\xi^2} \psi = \lambda\psi; \\ \psi(0) = \psi(1) = 0.$$

В работе [4] задача решалась при тех же предположениях, что и в работе [1], однако базисная система функций выбиралась из условия, чтобы расчет устойчивости каждой гармоники сводился только к оценке знака соответствующего собственного значения некоторой вспомогатель-

ной самосопряженной краевой задачи. В рассматриваемом случае условие устойчивости, получаемое на основе критерия работы [4], имеет вид

$$\mu_2 > 0, \quad (11)$$

где μ_2 — второе собственное значение краевой задачи

$$\frac{M^2}{H^2} \left[-\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \frac{1}{f(\xi)} \cdot \frac{d^2f(\xi)}{d\xi^2} \psi \right] + \alpha_\varphi \Phi_0 f(\xi) \psi - \\ - \alpha_x \frac{\sigma_x \Phi_0 f(\xi) [X^* - \gamma_x]}{\lambda_x + \lambda_i + \sigma_x \Phi_0 f(\xi)} \psi = \mu\psi; \quad (12) \\ \psi(0) = \psi(1) = 0.$$

В работах [7, 8] при помощи второго метода Ляпунова получены достаточные критерии устойчивости, использование которых при анализе устойчивости не вызывает дополнительных трудностей вычисления. Из работы [7], например, следует, что для асимптотической устойчивости нулевого решения краевой задачи (1) — (3) достаточно, чтобы наименьшее собственное значение краевой задачи

$$\frac{M^2}{H^2} \left[-\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \frac{1}{f(\xi)} \cdot \frac{d^2f(\xi)}{d\xi^2} \psi \right] + \alpha_\varphi \Phi_0 f(\xi) \psi - \\ - \alpha_x \chi(\xi) \psi = \nu\psi; \quad (13) \\ \psi(0) = \psi(0,5) = 0$$

было положительным. Здесь

$$\chi(\xi) = -\inf \operatorname{Re} K(j\omega, \xi), \\ \omega \in [0, \infty),$$

где $K(p, \xi)$ определяется выражением (6).

Сравнение указанных выше приближенных критериев устойчивости проведем на примере реактора, в котором стационарное распределение нейтронов по высоте имеет вид

$$\Phi^*(\xi) = \Phi_0 \sin \pi \xi.$$

При использовании ЭВМ М-20 для различных значений мощностного коэффициента реактивности была построена кривая D -разбиения на плоскости параметров Φ_0 и H^2/M^2 (остальные параметры брались такими же, как в работе [1]). Вычисленные таким образом точные критические значения параметров Φ_0 и H^2/M^2 приведены в таблице, где указаны также приближенные критические значения параметров Φ_0 и H^2/M^2 , вычисленные при использовании критериев устойчивости (10), (11) и (13).

Из таблицы видно, что наиболее близкими к точным являются критические значения Φ_0 и H^2/M^2 , вычисленные при использовании условия устойчивости (11). Из результатов сравне-

Критические значения параметров

Φ_0 , нейтр/см ² ·сек	$\left(\frac{\partial k_{\infty}}{\partial \Phi}\right)^* = 0$				$\left(\frac{\partial k_{\infty}}{\partial \Phi}\right)^* = 10^{-16} \frac{\Delta k}{\text{нейтр/см}^2 \cdot \text{сек}}$				$\left(\frac{\partial k_{\infty}}{\partial \Phi}\right)^* = 2 \cdot 10^{-16} \frac{\Delta k}{\text{нейтр/см}^2 \cdot \text{сек}}$			
	$\left(\frac{H^2}{M^2}\right)_1 \times 10^{-3}$	$\left(\frac{H^2}{M^2}\right)_2 \times 10^{-3}$	$\left(\frac{H^2}{M^2}\right)_3 \times 10^{-3}$	$\left(\frac{H^2}{M^2}\right)_4 \times 10^{-3}$	$\left(\frac{H^2}{M^2}\right)_1 \times 10^{-3}$	$\left(\frac{H^2}{M^2}\right)_2 \times 10^{-3}$	$\left(\frac{H^2}{M^2}\right)_3 \times 10^{-3}$	$\left(\frac{H^2}{M^2}\right)_4 \times 10^{-3}$	$\left(\frac{H^2}{M^2}\right)_1 \times 10^{-3}$	$\left(\frac{H^2}{M^2}\right)_2 \times 10^{-3}$	$\left(\frac{H^2}{M^2}\right)_3 \times 10^{-3}$	$\left(\frac{H^2}{M^2}\right)_4 \times 10^{-3}$
6·10 ¹²	11,739	12,453	11,772	9,375	14,05	15,028	14,091	10,7954	8,209	8,4881	8,244	7,2197
10 ¹³	5,9313	6,1094	5,952	5,397	6,887	7,1049	6,913	6,1768	3,9764	3,9152	3,9741	3,8388
2·10 ¹³	2,8983	2,8806	2,897	2,8248	3,3528	3,319	3,3512	3,2546	2,6435	2,5139	2,6176	2,5959
4·10 ¹³	1,7697	1,7204	1,7588	1,7491	2,1202	2,0428	2,1041	2,0902	2,4239	2,2722	2,3854	2,3766
6·10 ¹³	1,4452	1,398	1,4328	1,4297	1,8113	1,731	1,791	1,7862	2,7008	2,491	2,6273	2,6233
10 ¹⁴	1,2014	1,1626	1,1894	1,1887	1,6661	1,5853	1,6415	1,6401	8,2232	11,987	7,3534	7,3442
2·10 ¹⁴	1,0252	0,9992	1,0159	1,0158	1,9381	1,8446	1,8979	1,8975	∞	∞	∞	∞
4·10 ¹⁴	0,93768	0,9217	0,9312	0,93117	4,935	5,9676	4,6489	4,6482	∞	∞	∞	∞
6·10 ¹⁴	0,90816	0,8965	0,90312	0,90311	14,376	∞	13,403	13,4016	∞	∞	∞	∞
10 ¹⁵	0,8842	0,8765	0,88070	0,88070	∞	∞	81,301	81,2812	∞	∞	∞	∞

Примечание. $\left(\frac{H^2}{M^2}\right)_1$ — точное значение $\frac{H^2}{M^2}$; $\left(\frac{H^2}{M^2}\right)_2$ — значение $\frac{H^2}{M^2}$, вычисленное при использовании условия устойчивости (10); $\left(\frac{H^2}{M^2}\right)_3$ — значение $\frac{H^2}{M^2}$, вычисленное при использовании условия устойчивости (11); $\left(\frac{H^2}{M^2}\right)_4$ — значение $\frac{H^2}{M^2}$, вычисленное при использовании достаточного условия устойчивости (13).

ния, а также из анализа краевых задач (12) и (13) можно сделать вывод, что при достаточно высоких уровнях стационарного потока нейтронов условие устойчивости (11) является близким к достаточному. Из таблицы также видно, что погрешность приближенного критерия (10) сильно увеличивается с размерами реактора, причем при больших H^2/M^2 критические значения параметров, вычисленные при использовании этого критерия, находятся в области неустойчивости. Таким образом, на основании проведенного сравнения можно сделать вывод, что указанное в работе [4] видоизменение метода гармоник дает более высокую точность по сравнению с обычным методом гармоник. Надежные результаты при использовании для расчетов устойчивости условия (10) можно получить только для реакторов относительно малых размеров ($\frac{H^2}{M^2} < 2 \cdot 10^3$).

Сравнение также показывает, что при использовании достаточного критерия работы [7] наибольший запас устойчивости получается при малых значениях стационарного потока нейтронов. Однако, как показано в работе [8], именно в случае малых значений стационарного потока нейтронов достаточное условие устойчивости (13) заметно ослабляется специальным выбором

функции $\Phi(\xi)$, которая входит в полученное в указанной работе условие устойчивости.

Авторы благодарят Н. А. Железцова за критические замечания и полезное обсуждение.

Поступила в Редакцию 11/III 1968 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. R a n d a l l, D. J o h n. Nucleonics, **16**, No. 3, 82 (1958).
2. А. Х и т ч к о к. Устойчивость ядерных реакторов. М., Госатомиздат, 1963.
3. И. С. Постников, Е. Ф. Сабаев. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-техн. наук», № 3, 46 (1967).
4. И. С. Постников, Е. Ф. Сабаев. «Атомная энергия», **24**, 263 (1968).
5. S. L u n d q u i s t, P. W e i s s g l a s. Nucl. Sci. and Engng, **15**, 474 (1963).
6. С. Н с u. «Теоретические основы инженерных расчетов», 89 (Сер. Д), № 2, 76 (1967).
7. И. С. Постников, Е. Ф. Сабаев. «Атомная энергия», **24**, 38 (1968).
8. И. С. Постников. «Атомная энергия», **24**, 397 (1968).
9. А. М. Л е т о в. Устойчивость нелинейных регулируемых систем. М., Физматгиз, 1962.
10. Ю. И. Неймарк. Устойчивость линеаризованных систем. Л., Изд. ЛКВВИА, 1949.
11. Д. Ф. Давиденко. «Докл. АН СССР», **88**, 601 (1953).