УДК 519.876.5:62-192

ПОДХОДЫ К СНИЖЕНИЮ РАЗМЕРНОСТИ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СТРУКТУРНО-СЛОЖНЫХ СИСТЕМ СО МНОГИМИ СОСТОЯНИЯМИ ПРИ ОЦЕНКЕ ИХ НАДЁЖНОСТИ

Е.И. Сукач

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

APPROACHES TO REDUCING THE DIMENSION OF MULTICOMPONENT OF STRUCTURALLY COMPLEX MULTI-STATE SYSTEMS IN THE ASSESSMENT OF RELIABILITY

E.I. Sukach

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Описываются подходы для снижения размерности структурно-сложных систем при оценке их показателей надежности. Для участков системы с параллельно-последовательным соединением компонентов предлагается применение вероятностно-алгебраического моделирования. Расчёт надёжности структурно-сложных систем со многими состояниями обеспечивается применением методики сведения моделей систем со многими состояниями к расчетным бинарным моделям.

Ключевые слова: *надёжность многокомпонентной системы, структурно-сложная система, системы со многими состояниями, вероятностно-алгебраическое моделирование, вероятностные показатели надёжности.*

In the paper the description of approaches to reduce the dimension of structurally complex systems on assessing their reliability is given. The use of probability-algebraic simulation for the parts of the system with a parallel-series connection of components is proposed. Calculation of reliability of structurally complex systems with many states is achieved by using methods of information system models with multi-state settlement to the binary model.

Keywords: *reliability of a multicomponent system, structurally complex system, multi-state system, the probability-algebraic simulation, probabilistic reliability.*

Введение

Оценка надёжности сложных систем, включающих множество компонентов с вероятностными параметрами функционирования, требует построения расчётных математических моделей, позволяющих описать структуру исследуемых систем в виде графа и наблюдать за изменением результирующих показателей системы в зависимости от изменения параметров компонентов. При этом сложность расчётов показателей надёжности определяется, во-первых, числом компонентов, выделенных в процессе декомпозиции исследуемой системы, а во-вторых, видом связей между этими компонентами. В том случае, если связи между компонентами представляются в виде параллельно-последовательных структур, то применение метода вероятностно-алгебраического моделирования обеспечивает точную оценку показателей надёжности системы при произвольном числе составляющих её компонентов [1].

Однако реальные объекты, как правило, довольно редко сводятся к представлению в виде параллельно-последовательных графовых структур. Часто они представляются структурами сетевого типа с циклами и неустранимой повторностью аргументов при их формализации. Кроме этого, структурная сложность систем может быть обусловлена наличием множества несовместных состояний, выделенных для систем, имеющих простую структуру [2].

Разработке методов расчета показателей надежности структурно-сложных систем (ССС) посвящено много работ, большинство которых ориентировано на рассмотрение двух состояний реальных объектов, а именно: состояние функционирования; состояние отказа. Например, для исследования мостиковой структуры применялись следующие подходы к расчету показателей надежности:

– пренебрежение влиянием перемычек как абсолютно надежных либо отсутствующих;

– использование способа преобразования «мостик» в последовательно-параллельную структуру с помощью эквивалентного преобразования соединения треугольником в соединение звездой;

– использование логико-вероятностных методов (ЛВМ), основанных на идее построения функций работоспособности систем с использованием законов логики и оценки их вероятности с использованием теории вероятностей [3], [4];

– обращение к полному перебору всех возможных состояний.

Два первых подхода не позволяют получить точные значения показателей надёжности, что в ряде случаев, например, при оценке безопасности и рисков реальных сложных объектов, недопустимо.

Существенным ограничением двух других подходов при исследовании структурно-сложных систем является размерность системы, которая определяется числом составляющих ее компонентов. Рост числа компонентов приводит к экспоненциальной сложности задачи и ограничивает применение указанных методов не только для исследования структурно-сложных систем, но и для исследования систем простой структуры.

Анализ различных методов расчёта показателей надёжности структурно-сложных систем с тремя несовместными состояниями приводится в [5]. Отмечается, что увеличение числа компонентов значительно усложняет способы расчёта, которые в основном ориентированы на исследование конкретных структур. Переход к рассмотрению структурно-сложных систем со множеством несовместных состояний ещё больше повышает сложность вычислений. Для оценки показателей надежности структурно-сложных систем в случае полного перебора требуется рассмотрение n^m вариантов, где n – число несовместных состояний, m – число компонентов системы.

По мнению И.А. Рябинина, высказанному в его монографии [3], отсутствие методов расчёта показателей надёжности систем с числом несовместных состояния более трёх объясняется отсутствием реальных объектов, которые могут находиться более чем в трёх состояниях. Несмотря на это, автор отмечает необходимость, актуальность и перспективность дальнейшего развития методов исследования надёжности систем с разным числом несовместных состояний у разных её компонентов. По существу, ограниченный характер исследований в этом направлении обусловлен несовершенством разработанных методов исследования и средств их автоматизации, поскольку увеличение числа несовместных состояний или изменение графовой структуры объекта приводит к усложнению расчётов или требует разработки новых методов.

Целью статьи является описание взаимнодополняющих подходов для понижения размерности структурно-сложных систем при оценке показателей их надёжности, которые реализуются поэтапным анализом структуры исследуемого объекта. На первом этапе сокращается число компонентов системы за счёт выделения множества полностью надёжных компонентов. На втором этапе выделяются участки исследуемой графовой структуры с параллельно-последовательными соединениями компонентов и реализуется вероятностно-алгебраическое моделирование с целью получения показателей надёжности выделенных участков. При этом исследуемая графовая структура модифицируется путём преобразования каждого из найденных участков в одно ребро графа. Наконец, на третьем этапе, реализуется методика сведения моделей ССС с произвольным числом несовместных состояний к расчетным бинарным моделям.

1 Постановка задачи

Будем полагать, что структура исследуемой системы задается графом $G(N, K)$, где N – конечное множество вершин, K – множество ребер, для которых указаны пары вершин, которые это ребро соединяют. Из множества вершин графа выделим две вершины, определяющие вход в систему $(n_1 \in N)$ и выход из нее $(n_2 \in N)$.

Компонентам $K = \{K_i\}, i = \overline{1, m},$ образующим в совокупности систему, поставим в соответствие ребра графа. Будем полагать, что компоненты системы характеризуются множеством несовместных состояний $S = \{S_j\}, j = \overline{0, n}.$ Число состояний может определяться по различным критериям. В общем случае, учитывая случайный характер происходящих с объектом изменений, число состояний может варьироваться в зависимости от выбранного числа значений исследуемого показателя надежности. В случае оценки времени безотказной работы компонентов число состояний может задаваться количеством различных значений такой величины, как наработка компонента на отказ, которая может быть как непрерывной величиной (продолжительностью работы в часах и т. п.), так и целочисленной величиной (числом рабочих циклов и т. п.). Предполагается, что вероятности состояний известны и задаются векторами

$$P^i = (p_0^i, p_2^i, ..., p_n^i), \sum_{j=0}^{n} p_j^i = 1, i = \overline{1, m}. \quad (1.1)$$

Ставится задача определения вектора вероятностей состояний показателя надежности системы по вероятностям значений показателя надежности ее компонентов:

$$P^s = (p_0^s, p_2^s, ..., p_n^s), \sum_{j=0}^{n} p_j^s = 1. \quad (1.2)$$

2 Оценка показателей надёжности для параллельно-последовательных участков сложных систем

Как правило, в графе, представляющем реальную сложную систему, встречаются участки, соответствующие параллельному или последовательному соединению компонентов исследуемой системы. С целью понижения размерности окончательной расчётной модели реализуется пошаговый анализ графовой структуры с применением на каждой итерации вероятностно-алгебраического моделирования [1] для найденного последовательно-параллельного участка.

При нахождении последовательно соединённых ребер графа они преобразуются в одно ребро, которое характеризуется результирующим вектором вероятностей, вычисляемым по формуле:

$$p_k^3 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^k p_i^1 p_j^2, \qquad (2.1)$$

где $i, j, k = \overline{1, n}$, а a_{ij}^k – коэффициенты вероятностно-алгебраического моделирования, которые определяются соотношениями:

$$\begin{cases} a_{ij}^k = 1, & если \quad k = \max(i, j); \\ a_{ij}^k = 0, & если \quad k \neq \max(i, j). \end{cases} \qquad (2.2)$$

При обнаружении параллельно соединённых ребер графа они сводятся в одно ребро, которое характеризуется результирующим вектором вероятностей исследуемого показателя надёжности, вычисляемого также по формуле (2.1), но с вероятностно-алгебраическими коэффициентами, определяемыми соотношениями вида:

$$\begin{cases} a_{ij}^k = 1, & если \quad k = \min(i, j); \\ a_{ij}^k = 0, & если \quad k \neq \min(i, j). \end{cases} \qquad (2.3)$$

Результатом данного этапа реализации взаимосвязанных подходов к снижению размерности ССС является эквивалентная графовая структура исследуемой системы $G_1(N_1,K_1)$, в которой полностью исключены параллельно-последовательные участки, а исходные вероятностные параметры компонентов пересчитаны с использованием вероятностно-алгебраических преобразований. При этом, очевидно, выполняются неравенства:

$$N_1 \le N, K_1 \le K. \qquad (2.4)$$

Таким образом, получаем ССС, как правило, меньшей размерности, для расчёта надёжности которой возможно применение метода полного перебора или одного из методов ЛВМ, оптимизирующего решение задачи.

3 Расчет показателей надежности структурно-сложной системы со многими состояниями

Объектом исследования является ССС со многими состояниями, образом которой является некоторая графовая структура, не содержащая параллельно-последовательных участков. Расчет будем производить с учетом показателей надежности компонентов и схемы их соединения. Обозначим x_i веса ребер графа. Их значения задаются номерами состояний компонентов, принимающих вероятностные значения. В результате граф $G(N, K)$ является взвешенным, поскольку ребра имеют веса x_i, и случайным, поскольку веса определяются вероятностной мерой (1.1). Таким образом, $G(N, K)$ можно рассматривать как случайную величину, значениями которой являются графы.

Для каждой реализации случайного графа определим свойство j-связности, которое означает наличие пути, соединяющего вершины $n_1, n_2 \in N$, в графе, в котором веса ребер удовлетворяют следующему условию:

$$\min_i(x_i) \ge j. \qquad (3.1)$$

Будем считать, что ССС находится в j-м состоянии надежности, если ее графическим образом является j-связный граф. Вероятностные значения показателя надежности ССС определяются связностью случайного графа $G(N, K)$, которая является случайной величиной. Вероятностные значения связности случайного графа $G(N, K)$ формируются путем расчета значений и вероятностей связности возможных реализаций графа.

Рассмотрим ССС с двумя состояниями надежности: S_0 (отказ) и S_1 (работа). При этом возможными значениями весов ребер графа $G(N, K)$ являются $x_i = 0 \vee 1$. Реализации случайного графа могут быть отнесены к одному из множеств: множеству графов $G_0 = \{G_0(N, K)\}$, которые являются 0-связными, и множеству графов $G_1 = \{G_1(N, K)\}$, которые являются 1-связными. Графы из множества G_0 описывают варианты реализации отказа ССС. Для графов из множества G_1 всегда существует путь, соединяющий начальную и конечную вершины, все ребра которого имеют веса $x_i = 1$ и отражают варианты реализации работы ССС.

Результирующее состояние ССС с двумя состояниями (работа, отказ), графическим образом которой является случайный граф, однозначно определяется логической функцией

$$y(x_1, ..., x_m) = \bigvee_{l=1}^{r}\left[\bigwedge_{i \in \Pi_l} x_i\right], \qquad (3.2)$$

где Π_l – множество номеров ребер, составляющих путь $l, l = \overline{1, r}$. При этом значения вектора вероятностей, характеризующего j-связность случайного графа $G(N, K)$ и, как следствие, описывающего показатель надежности ССС, вычисляются по формуле

$$p_j^s = \sum_{l=1}^{r}\prod_{i \in \Pi_l} p_j^i, \; j = \overline{0,1}, \qquad (3.3)$$

где p_j^i – вероятность j-го состояния i-го компонента; p_j^s – вероятность j-го состояния системы.

Число реализаций NS случайного графа $G(N, K)$ зависит от числа его ребер и числа возможных значений весов ребер. Для двух состояний показателя надежности ССС $NS = 2^m$, где m – число ребер.

Перейдем к рассмотрению общего случая – оценке надежности многокомпонентной ССС со многими состояниями $\{S_j\}, j = \overline{0, n}$. Будем полагать, что компоненты ССС характеризуются множеством изменяющихся состояний $\left\{S_j\right\}, j=\overline{0,n}.$ Первое состояние S_0 характеризует минимальное значение выбранного показателя надежности компонента, S_n определяет максимальное значение показателя надежности компонента, а остальные состояния $\left\{S_j\right\}, j=\overline{1,n-1}$ описывают некоторые промежуточные значения. Решить поставленную задачу можно двумя способами.

Первый способ. Как и в случае двух состояний ССС, вектор вероятностей состояний показателя надежности системы формируется на основе полного перебора всех реализаций описывающего систему случайного графа $G(N, K)$, которые образуются в результате рассмотрения комбинаций возможных детерминированных значений весов ребер. При этом для каждой q-й реализации $\left(q=\overline{1,NS}\right)$ случайного графа $G(N, K)$ определяется уровень связности, позволяющий отнести граф к одному из множеств: $G_0 = \{G_0(N, K)\}, \ldots, G_n = \{G_n(N, K)\}$.

Результирующее состояние ССС $S_k \in \{S_j\}$, $j=\overline{0,n}$, графическим образом которой является случайный граф, однозначно определяется функцией

$$y(x_1,...,x_m)=\max_{l=1}^{rj}\left[\min_{i\in \Pi_l} x_i\right], \tag{3.4}$$

где Π_l – множество номеров ребер, составляющих путь $l, l=\overline{1,rj}$, который определяет j-связность графа.

Вероятность j-связности случайного графа, описывающего j-е состояние показателя надежности ССС, определяется соотношением

$$p_j^s=\sum_{lj=1}^{rj}\prod_{i\in K_{lj}} p_j^i, j=\overline{0,n}, \tag{3.5}$$

где p_j^i – вероятность j-го состояния i-го компонента; p_j^s – вероятность j-го состояния системы.

Таким образом, все реализации случайного графа будут отнесены к некоторому множеству $G_z, z=\overline{0,n}$. Вероятность j-связности случайного графа $G(N, K)$, характеризующая j-е состояние показателя надежности исследуемой системы, будет определяться суммой вероятностей всех возможных реализаций случайного графа, имеющих свойство j-связности.

Отметим, что для получения вероятностной оценки надежности ССС в данном случае необходимо рассмотреть $NS = (n + 1)^m$ реализаций случайного графа $G(N, K)$, где $(n + 1)$ – число состояний; m – число ребер графа.

Второй способ. Пусть k – номер состояния $\left(k=\overline{0,n-1}\right)$, которому соответствует пороговое значение показателя надежности, разделяющее множество всех состояний надежности компонентов ССС на два множества:

$$S1=\left\{S_j\right\}, j=\overline{0,k};$$

$$S2=\left\{S_j\right\}, j=\overline{k+1,n}. \tag{3.6}$$

В этом случае выделенные состояния компонентов будут отнесены к одному из множеств, таким образом они отобразятся в одно из обобщенных состояний $S1$ или $S2$. Очевидно, что вероятности обобщенных состояний i-го компонента при таком разбиении формируются следующим образом:

$$P^{i,k}=\left(\sum_{j=0}^{k} p_j^i, \sum_{j=k+1}^{n} p_j^i\right), i=\overline{1,m}, k=\overline{0,n-1}. \tag{3.7}$$

Образом модифицированной ССС является случайный граф $G(N, K)$, веса ребер которого принимают два значения $\left(x_i=0\vee 1\right)$. Связность результирующего графа определяется логической функцией (3.2), а результирующие вероятностные значения связности вычисляются по формуле (3.3).

В силу того, что функции min и max являются естественным обобщением логических операций конъюнкции ($\wedge$) и дизъюнкции ($\vee$) при переходе от ССС с двумя состояниями к рассмотрению ССС со многими состояниями и сохраняют структуру введенных подмножеств $S1$ и $S2$, значения результирующего вектора вероятностей ССС будут удовлетворять соотношениям

$$P^{s,k}=(p_1^{s,k}, p_2^{s,k}),$$
$$p_1^{s,k}=\sum_{j=0}^{k} p_j^s,\ p_2^{s,k}=\sum_{j=k+1}^{n} p_j^s. \tag{3.8}$$

Если обозначить алгебру, порожденную функциями min и max, A(max, min, $n + 1$), а булеву алгебру $B(\wedge, \vee, 2)$, то очевиден переход от алгебры, определенной на множестве $(n + 1)$-мерных векторов, к булевой алгебре. Заметим, что изменение $k=\overline{0,n-1}$ позволит сформировать значения результирующего вектора вероятностей (1.2).

Теорема. *Пусть в ССС, графическим образом которой является случайный граф $G(N, K)$, где N – множество вершин, а K – множество ребер, которым соответствуют элементарные компоненты, составляющие систему, вероятности состояний i-го компонента при проведении k-го расчета задаются соотношениями* (3.7).

Тогда результирующий вектор вероятностей состояний показателя надежности системы $P^s=(p_0^s, p_2^s,..., p_n^s)$ принимает следующие значения:

$$p_0^s=p_0^{s,1}, p_k^s=p_0^{s,k}-p_0^{s,k-1}, k=\overline{1,n-1}, \tag{3.9}$$

где $p_0^{s,i}$ определяется путем проведения $n - 1$ расчета для системы этой же структуры, но с двумя обобщенными состояниями.

Очевидно, значения вектора вероятностей (1.2), полученные первым и вторым способом, будут совпадать. Однако второй способ позволит значительно уменьшить время расчета за счет сокращения числа вариантов перебора реализаций случайного графа, описывающего вероятностное изменение показателя надежности ССС со многими состояниями.

Согласно второму способу разработана и реализована методика сведения модели многокомпонентной ССС со многими состояниями к совокупности бинарных моделей, сущность которой кратко описывается следующей последовательностью шагов:

Шаг 1. Организуется k-й шаг расчетов $\left(k=\overline{1, n-1}\right)$ для заданной структуры системы, с двумя состояниями (бинарная модель). При этом вероятности состояний i-го компонента при проведении k-го расчета задаются соотношением (3.7).

Вычисления реализуются с использованием одного из методов ЛВМ (наращивания путей, рекуррентного алгоритма, алгоритма полного перебора) [4], позволяющих оценить надежность ССС по состояниям надежности компонентов с двумя состояниями компонентов (работа, отказ).

Шаг 2. Результаты расчетов, полученные с использованием совокупности бинарных моделей, автоматически обрабатываются программными средствами PALS [6]. При этом компоненты результирующего вектора вероятностей состояний системы (1.2) определяются соотношениями (3.9).

Заключение

Описанные и последовательно реализованные подходы позволяют получить точные оценки показателей надежности многокомпонентных ССС со многими состояниями. При этом, зачастую, существенное сокращение размерности решаемой задачи происходит на первом этапе, в результате оценки вероятностных показателей надёжности участков ССС с параллельно-последовательным соединением. Далее, значительное сокращение сложности расчетов надежности системы происходит в результате сведения модели ССС со многими состояниями к совокупности бинарных моделей. Предложенный в статье подход позволяет сократить число вариантов полного перебора до 2^m и далее, используя элементарные алгебраические преобразования, получить оценки показателей надёжности исследуемой ССС с n состояниями. Кроме этого, оценка надежности систем с использованием одного из ЛВМ на очередных итерациях расчета бинарных моделей значительно упрощает получение точного решения и в целом сокращает сложность расчетов ССС со многими состояниями.

Практическим результатом подходов является возможность расчёта надёжности более широкого круга сложных систем, для которых логично рассмотрение множества состояний (больше 2), характеризующих их уровни надёжности. При этом сложность расчётов не превышает сложности расчёта эквивалентных графовых структур, описывающих системы с двумя состояниями. Наличие средств автоматизации, реализующих подходы, позволяет провести сравнительный анализ надежности систем различной конфигурации, оценить влияние параметров надежности отдельных компонентов на надежность системы, обосновать проектные решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сукач, Е.И.* Метод вероятностно-алгебраического моделирования надежности функционально-сложных систем / Е.И. Сукач // Информатика. – 2010. – № 3. – С. 18–30.

2. *Можаев, А.С.* Универсальный графоаналитический метод, алгоритм и программный модуль построения монотонных и немонотонных логических функций работоспособности систем / А.С. Можаев // Труды третьей Международной научной школы «Моделирование и Анализ Безопасности и Риска (МА БР – 2003)», август 20–23, 2003. – СПб. – 517 с.

3. *Соложенцев, Е.Д.* Сценарное логико-вероятностное управление риском в бизнесе и экономике / Е.Д. Соложенцев. – СПб. : Изд. дом «Бизнес-пресса», 2006. – 530 с.

4. *Рябинин, И.А.* Надежность и безопасность структурно-сложных систем / И.А. Рябинин. – СПб. : Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 2007. – 276 с.

5. *Диллон, Б.* Инженерные методы обеспечения надежности систем / Б. Диллон, Ч. Сингх. – М. : Мир, 1984.

6. *Сукач, Е.И.* Компьютерная система вероятностно-алгебраического моделирования сложных систем со многими состояниями / Е.И. Сукач, Д.В. Ратобыльская, А.Б. Демуськов // Математические машины и системы – №3.– 2011.– С. 32–39.

Поступила в редакцию 02.09.11.