

3. А. Вейнберг, Е. Вигнер. Физическая теория ядерных реакторов. М., Изд-во иностр. лит., 1961, стр. 722.
4. M. O t s u k a. Nucl. Sci. and Engng, 18, 514 (1964).
5. M. S h a p i r o. Nucl. Sci. and Engng, 10, 159 (1961).
6. J. R a v e t s, J. L a m a r s h. Nucl. Sci. and Engng, 7, 496 (1960).
7. Б. П. Кочуров. «Атомная энергия», 20, 243 (1966).
8. А. А. Абагян и др. Доклад № 364, представленный СССР на Третью международную конференцию по мирному использованию атомной энергии (Женева, 1964).
9. Л. Н. Усачев. В кн. «Реакторостроение и теория реакторов». М., Изд-во АН СССР, 1955, стр. 251.
10. Л. Н. Усачев. «Атомная энергия», 15, 472 (1963).
11. М. А. Лаврентьев, Л. А. Люстерник. Курс вариационного исчисления. М., Гостехтеориздат, 1950.
12. В. Я. Пупко. Физика и теплотехника реакторов. Приложение № 1 к журналу «Атомная энергия». М., Атомиздат, 1958, стр. 44.
13. Г. И. Марчук и др. В сб. «Исследование критических параметров реакторных систем». М., Атомиздат, 1960, стр. 39.

Применение эффективного метода решения уравнения переноса для расчета шестиугольной и квадратной ячеек гетерогенного реактора

В. В. СМЕЛОВ. Г. А. ИЛЯСОВА

Для определения микроструктуры распределения нейтронов в ячейках реальной формы (квадратная, шестиугольная) Г. И. Марчуком и В. П. Кочергиным [1] был предложен эффективный метод в пределах диффузионной теории. Но в тесных решетках гетерогенного реактора уравнение переноса нейтронов необходимо решать в более высоких приближениях, чем хорошо известное диффузионное приближение. Однако использование, например, высоких P_n -приближений метода сферических гармоник в рамках модели эквивалентной ячейки Вигнера — Зейтца связано с проблемой постановки граничных условий*. Так, перенесение естественного для реальной ячейки условия «зеркального отражения» на круговую ячейку приводит, в частности, в P_3 -приближении к худшему результату, чем в P_1 -приближении [2, 3]. Применение других условий (условие изотропного отражения [3, 4]; условие «нулевого градиента» [5, 3]; введение дополнительного рассеивающего слоя [6] и пр.), хотя и приводит к удовлетворительному результату для не очень тесных решеток, полностью этой проблемы не решает [3]. Следовательно, только расчет ячейки реальной формы в сочетании с высокими P_n -приближениями дает возможность определить распределение нейтронов с достаточной точностью.

Постановка задачи

В односкоростном приближении поток нейтронов в бесконечной по высоте цилиндрической

* Эта проблема имеет место и для всех других методов, использующих модель Вигнера — Зейтца.

ячейке описывается уравнением

$$\sin \theta \left[\cos \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\sin \varphi}{r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \omega} - \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \right] + \sigma \Phi(\mathbf{r}, \Omega) - \int \sigma_s f(\mathbf{r}, \Omega' \rightarrow \Omega) \Phi(\mathbf{r}, \Omega') d\Omega' = \frac{1}{4\pi} Q(\mathbf{r}, \Omega), \quad (1)$$

где $\mathbf{r} = (r, \omega)$, $\Omega = (\theta, \varphi)$ (рис. 1).

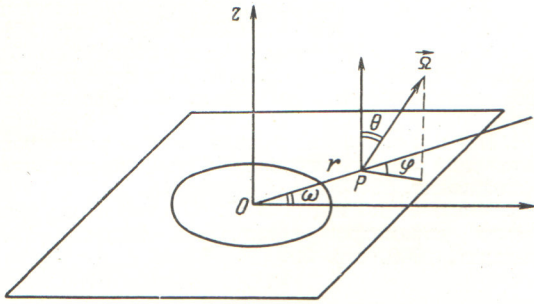
Решение уравнения (1) будем искать в виде ряда по сферическим функциям [7, 8]:

$$\Phi(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{2n+1}{1+\delta_{m0}} \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \times \\ \times [A_{nm}(r, \omega) \cos m\varphi + B_{nm}(r, \omega) \sin m\varphi] P_n^{(m)}(\mu), \quad (2)$$

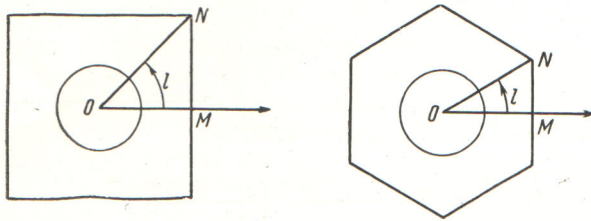
где $\mu = \cos \theta$. В разложении (2) $A_{nm} = B_{nm} = 0$ при нечетном $n+m$.

Благодаря симметрии ячеек относительно осей OM и ON (рис. 2) достаточно найти решение уравнения (1) в области OMN , при этом угол ω меняется в пределах $0 \leq \omega \leq l$, где $l = \pi/4$ для квадратной ячейки и $l = \pi/6$ для шестиугольной ячейки. Из симметрии ячейки следует, что

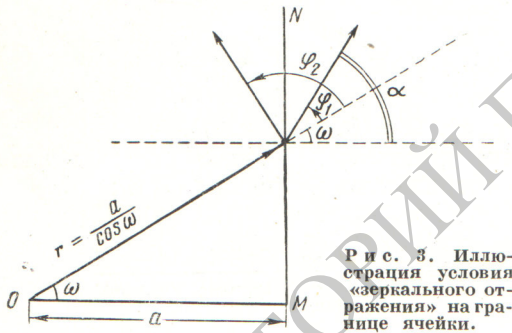
$$\left. \begin{aligned} \Phi(r, \omega, \theta, \varphi) &= \Phi(r, -\omega, \theta, -\varphi); \\ \Phi(r, \omega, \theta, \varphi) &= \Phi(r, 2l - \omega, \theta, -\varphi). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$



Р и с. 1. Система параметров, определяющих положение и направление движения нейтрона.



Р и с. 2. Модели двумерных ячеек.



Р и с. 3. Иллюстрация условия «зеркального отражения» на границе ячейки.

Отсюда функции $A_{nm}(r, \omega)$ и $B_{nm}(r, \omega)$ в области OMN можно представить в виде [1]

$$\left. \begin{aligned} A_{nm}(r, \omega) &= \sum_{v=0}^{\infty} A_{nm}^{(v)}(r) \cos \frac{\pi v}{l} \omega; \\ B_{nm}(r, \omega) &= \sum_{v=0}^{\infty} B_{nm}^{(v)}(r) \sin \frac{\pi v}{l} \omega. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Подставив разложения (2) и (4) в уравнение (1), после известных тождественных преобразований [7, 9] для каждого из значений $v = 0, 1, 2, \dots$ получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Приняв $A_{nm}^{(v)} = B_{nm}^{(v)} = 0$ при $n \geq 4$ (P_3 -приближе-

ние), запишем для каждого значения v конечную систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad & \frac{dA_{11}^{(v)}}{dr} + \frac{1}{r} (A_{11}^{(v)} + \lambda_v B_{11}^{(v)}) + \sigma_0 A_{00}^{(v)} = Q_0 \Lambda_0; \\ 2) \quad & \frac{dA_{00}^{(v)}}{dr} - \frac{dA_{20}^{(v)}}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dA_{22}^{(v)}}{dr} + \frac{2}{r} A_{22}^{(v)} + \lambda_v B_{22}^{(v)} \right) + 3\sigma_1 A_{11}^{(v)} = 0; \\ 3) \quad & \frac{\lambda_v}{r} (A_{20}^{(v)} - A_{00}^{(v)}) + \frac{1}{2} \left(\frac{dB_{22}^{(v)}}{dr} + \frac{2}{r} B_{22}^{(v)} + \frac{\lambda_v}{r} A_{22}^{(v)} \right) + 3\sigma_1 B_{11}^{(v)} = 0; \\ 4) \quad & \frac{dA_{31}^{(v)}}{dr} + \frac{A_{31}^{(v)}}{r} - \frac{dA_{11}^{(v)}}{dr} - \frac{A_{11}^{(v)}}{r} + \frac{\lambda_v}{r} (B_{31}^{(v)} - B_{11}^{(v)}) + 5\sigma_2 A_{20}^{(v)} = 0; \\ 5) \quad & \frac{dA_{11}^{(v)}}{dr} - \frac{A_{11}^{(v)}}{r} - \frac{\lambda_v}{r} B_{11}^{(v)} - \frac{1}{6} \left(\frac{dA_{31}^{(v)}}{dr} - \frac{1}{r} A_{31}^{(v)} - \frac{\lambda_v}{r} B_{31}^{(v)} \right) + \frac{1}{12} \left(\frac{dA_{33}^{(v)}}{dr} + \frac{3}{r} A_{33}^{(v)} + \frac{\lambda_v}{r} B_{33}^{(v)} \right) + \frac{5}{6} \sigma_2 A_{22}^{(v)} = 0; \\ 6) \quad & \frac{dB_{11}^{(v)}}{dr} - \frac{B_{11}^{(v)}}{r} - \frac{\lambda_v}{r} A_{11}^{(v)} - \frac{1}{6} \left(\frac{dB_{31}^{(v)}}{dr} - \frac{B_{31}^{(v)}}{r} - \frac{\lambda_v}{r} A_{31}^{(v)} \right) + \frac{1}{12} \left(\frac{dB_{33}^{(v)}}{dr} + \frac{3}{r} B_{33}^{(v)} + \frac{\lambda_v}{r} A_{33}^{(v)} \right) + \frac{5}{6} \sigma_2 B_{22}^{(v)} = 0; \\ 7) \quad & \frac{dA_{20}^{(v)}}{dr} - \frac{1}{12} \left(\frac{dA_{22}^{(v)}}{dr} + \frac{2}{r} A_{22}^{(v)} + \frac{\lambda_v}{r} B_{22}^{(v)} \right) + \frac{7}{6} \sigma_3 A_{31}^{(v)} = 0; \\ 8) \quad & -\frac{\lambda_v}{r} A_{20}^{(v)} - \frac{1}{12} \left(\frac{dB_{22}^{(v)}}{dr} + \frac{2}{r} B_{22}^{(v)} + \frac{\lambda_v}{r} A_{22}^{(v)} \right) + \frac{7}{6} \sigma_3 B_{31}^{(v)} = 0; \\ 9) \quad & \frac{dA_{22}^{(v)}}{dr} - \frac{2}{r} A_{22}^{(v)} - \frac{\lambda_v}{r} B_{22}^{(v)} + \frac{7}{15} \sigma_3 A_{33}^{(v)} = 0; \\ 10) \quad & \frac{dB_{22}^{(v)}}{dr} - \frac{2}{r} B_{22}^{(v)} - \frac{\lambda_v}{r} A_{22}^{(v)} + \frac{7}{15} \sigma_3 B_{33}^{(v)} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где $\lambda_v = \frac{\pi v}{l}$, $\sigma_n = \sigma - \sigma_s \int f(\mathbf{r}, \Omega' \rightarrow \Omega) \times \times P_n(\cos(\Omega, \Omega')) d\Omega^*$.

Относительно системы (5) необходимо отметить следующее. Во-первых, в этой системе только восемь уравнений являются дифференциальными. Действительно, определив из уравнения (10) $dB_{22}^{(v)}/dr$ и подставив в (3) и (8), получим два алгебраических уравнения. Вторых, при $v=0$, как это следует из разложений (4), имеют смысл только функции $A_{nm}^{(0)}$. Однако для единообразия можно ввести в общую схему решения задачи и функции $B_{nm}^{(0)}$, подчинив их произвольным граничным условиям.

Для решения системы (5) удобно перейти к уравнениям относительно векторных функций:

$$\Phi^{(v)} = \begin{pmatrix} A_{00}^{(v)} \\ A_{20}^{(v)} \\ A_{22}^{(v)} \\ B_{22}^{(v)} \end{pmatrix}; \quad J^{(v)} = \begin{pmatrix} A_{11}^{(v)} \\ A_{31}^{(v)} \\ A_{33}^{(v)} \\ B_{11}^{(v)} \\ B_{31}^{(v)} \\ B_{33}^{(v)} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Тогда систему (5) можно переписать в векторно-матричном виде:

$$\left. \begin{aligned} P_1 \frac{dJ^{(v)}}{dr} + \frac{1}{r} P_2^{(v)} J^{(v)} + P_3 \Phi^{(v)} &= S \delta_{v0}; \\ T_1 \frac{d\Phi^{(v)}}{dr} + \frac{1}{r} T_2^{(v)} \Phi^{(v)} + T_3 J^{(v)} &= 0, \end{aligned} \right\} (7)$$

где P и T — матрицы; S — вектор источников.

Исключая из системы (7) вектор $J^{(v)}$, получим векторно-матричное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$D \frac{d^2 \Phi^{(v)}}{dr^2} + \frac{1}{r} K^{(v)} \frac{d\Phi^{(v)}}{dr} - \left(\Sigma + \frac{1}{r^2} \Lambda^{(v)} \right) \Phi^{(v)} = -3\sigma_1 S \delta_{v0} \quad (v=0, 1, 2, \dots), \quad (8)$$

где

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & d & -g & 0 \\ 1 & -2g & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix};$$

$$K^{(v)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{3}{2} & \lambda_v \\ -1 & d & -3g & -2\lambda_v g \\ -1 & 2g & h & 0 \\ -2\lambda_v & 4\lambda_v g & 0 & h \end{pmatrix};$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3\sigma_1 \sigma_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15\sigma_1 \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \sigma_1 \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \sigma_1 \sigma_2 \end{pmatrix};$$

$$\Lambda^{(v)} = \begin{pmatrix} \lambda_v^2 & -\lambda_v^2 & -\frac{1}{2} \lambda_v^2 & -\lambda_v \\ -\lambda_v^2 & \lambda_v^2 d & \lambda_v^2 g & 2\lambda_v g \\ -\lambda_v^2 & 2\lambda_v^2 g & (4 + \lambda_v^2) h & 4\lambda_v h \\ -2\lambda_v & 4\lambda_v g & 4\lambda_v h & (4 + \lambda_v^2) h \end{pmatrix},$$

причем $d = 1 + \frac{18}{7} \frac{\sigma_1}{\sigma_3}$; $g = \frac{1}{2} + \frac{3}{14} \frac{\sigma_1}{\sigma_3}$; $h = \frac{1}{2} + \frac{4}{7} \frac{\sigma_1}{\sigma_3}$.

Уравнение (8) дополним условиями в центре и на границе ячейки, а также на границах зон.

Центр ячейки. При $r=0$ поток нейтронов не зависит от переменных ω и φ , следовательно,

$$\left. \begin{aligned} A_{nm}^{(v)}(0) = B_{nm}^{(v)}(0) &= 0 \quad (m \neq 0); \\ A_{n0}^{(v)}(0) &= 0 \quad (v \neq 0). \end{aligned} \right\} (9)$$

Используя предельный переход в системе (5) при $r \rightarrow 0$, можно показать, что условия (9) и P_3 -приближения эквивалентны векторному условию

$$\left. \frac{d\Phi^{(v)}}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (v=0, 1, 2, \dots). \quad (10)$$

Граница ячейки. Вследствие периодичности решетки в любой точке плоской границы ячейки выполняется условие «отражения»:

$$\Phi\left(\frac{a}{\cos \omega}, \omega, \theta, \varphi_1\right) = \Phi\left(\frac{a}{\cos \omega}, \omega, \theta, \varphi_2\right), \quad (11)$$

где $2a$ — шаг решетки, а углы φ_1 и φ_2 связаны равенством $\varphi_2 = \pi - (2\omega + \varphi_1)$ (рис. 3).

Условие (11) представляет собой равенство потоков нейтронов в направлении (θ, φ_1) через единичную площадку, перпендикулярную этому направлению, и в направлении (θ, φ_2) через единичную площадку, перпендикулярную направлению (θ, φ_2) . С физической точки зрения представляется более естественным приравнять потоки в направлениях (θ, φ_1) и (θ, φ_2) через

* Система (5) записана в предположении, что функция источников Q изотропна. Кроме того, предполагается, что Q , σ , σ_s и f в каждой из зон ячейки не зависят от пространственных координат.

единичную площадку границы ячейки [10]:

$$\Phi\left(\frac{a}{\cos\omega}, \omega, \theta, \varphi\right)(\Omega\mathbf{n}) = \Phi\left(\frac{a}{\cos\omega}, \omega, \theta, \pi - (2\omega + \varphi)\right)(\Omega\mathbf{n}), \quad (12)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к границе ячейки; $(\Omega\mathbf{n})$ — скалярное произведение векторов Ω и \mathbf{n} .

Из условия (12) и разложения (2) получим:

$$\left. \begin{aligned} A_{nm}\left(\frac{a}{\cos\omega}, \omega\right) \sin m\omega + \\ + B_{nm}\left(\frac{a}{\cos\omega}, \omega\right) \cos m\omega = 0 \\ (m - \text{четное}); \\ A_{nm}\left(\frac{a}{\cos\omega}, \omega\right) \cos m\omega - \\ - B_{nm}\left(\frac{a}{\cos\omega}, \omega\right) \sin m\omega = 0 \\ (m - \text{нечетное}). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Излагаемый метод не позволяет непосредственно использовать условия (13), которые должны тождественно выполняться для всех значений ω . Заменяем их эквивалентными условиями обращения в нуль коэффициентов Фурье от левых частей равенств (13) относительно ортогональной системы функций $\sin \lambda_\mu \omega$, $\cos \lambda_\mu \omega$ ($\mu = 0, 1, 2, \dots$). При таком переходе следует учитывать, что уравнения (13) представляют собой локальные условия на границе ячейки в точке $\left(\frac{a}{\cos\omega}, \omega\right)$,

отнесенные к единичной площадке (или к единице длины при $\Delta z = 1$), поэтому необходимо перейти к нормировке на единицу угла. Учитывая связь элемента длины с элементом угла

$$dx = \frac{a}{\cos^2\omega} d\omega, \text{ получим:}$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l \left[\frac{\sin m\omega}{\cos^2\omega} A_{nm}\left(\frac{a}{\cos\omega}, \omega\right) + \right. \\ \left. + \frac{\cos m\omega}{\cos^2\omega} B_{nm}\left(\frac{a}{\cos\omega}, \omega\right) \right] \sin \lambda_\mu \omega d\omega = 0 \\ (m - \text{четное}); \\ \int_0^l \left[\frac{\cos m\omega}{\cos^2\omega} A_{nm}\left(\frac{a}{\cos\omega}, \omega\right) - \right. \\ \left. - \frac{\sin m\omega}{\cos^2\omega} B_{nm}\left(\frac{a}{\cos\omega}, \omega\right) \right] \cos \lambda_\mu \omega d\omega = 0 \\ (m - \text{нечетное}). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Подставив вместо A_{nm} и B_{nm} их разложения (4) и записав условия (14) для P_3 -приближения в векторно-матричном виде, получим

$$\sum_{v=0}^{\infty} \int_0^l U^{(\mu)} \left[V^{(v)} \frac{d\Phi^{(v)}}{dr} + \frac{1}{a} W^{(v)} \Phi^{(v)} \right]_{r=\frac{a}{\cos\omega}} \times \times \frac{d\omega}{\cos\omega} = 0, \quad (15)$$

где $U^{(\mu)}$ — диагональная матрица с элементами

$$u_{11} = u_{22} = u_{33} = \cos \lambda_\mu \omega; \quad u_{44} = \sin \lambda_\mu \omega;$$

$V^{(v)}$, $W^{(v)}$ — матрицы четвертого порядка, элементы которых соответственно равны:

$$v_{11} = \cos \lambda_\nu \omega; \quad v_{12} = -v_{11}; \quad v_{13} = \frac{v_{11}}{2};$$

$$v_{14} = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \omega \sin \lambda_\nu \omega;$$

$$v_{22} = \frac{18}{7} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_3} v_{11}; \quad v_{23} = -\frac{3}{14} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_3} v_{11};$$

$$v_{24} = -\frac{3}{7} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_3} v_{14};$$

$$v_{33} = \frac{45}{7} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \cdot \frac{\cos 3\omega \cos \lambda_\nu \omega}{\cos \omega};$$

$$v_{34} = -\frac{45}{7} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \cdot \frac{\sin 3\omega \sin \lambda_\nu \omega}{\cos \omega};$$

$$v_{21} = v_{31} = v_{32} = v_{41} = v_{42} = v_{43} = v_{44} = 0;$$

$$w_{11} = \lambda_\nu \sin \omega \sin \lambda_\nu \omega; \quad w_{12} = -w_{11};$$

$$w_{13} = \cos \omega \cos \lambda_\nu \omega - \frac{1}{2} w_{11};$$

$$w_{14} = \frac{\lambda_\nu}{2} \cos \omega \cos \lambda_\nu \omega - \sin \omega \sin \lambda_\nu \omega;$$

$$w_{22} = \frac{18}{7} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_3} w_{11}; \quad w_{23} = -\frac{3}{7} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_3} w_{13};$$

$$w_{24} = -\frac{3}{7} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_3} w_{14};$$

$$w_{33} = -\frac{90}{7} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \left(\cos 3\omega \cos \lambda_\nu \omega - \frac{\lambda_\nu}{2} \sin 3\omega \sin \lambda_\nu \omega \right);$$

$$w_{34} = -\frac{90}{7} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \left(\frac{\lambda_\nu}{2} \cos 3\omega \cos \lambda_\nu \omega - \sin 3\omega \sin \lambda_\nu \omega \right);$$

$$w_{43} = -\frac{3\sigma_1 a}{\cos \omega} \sin 2\omega \cos \lambda_\nu \omega;$$

$$w_{44} = -\frac{3\sigma_1 a}{\cos \omega} \cos 2\omega \sin \lambda_\nu \omega;$$

$$w_{21} = w_{31} = w_{32} = w_{41} = w_{42} = 0.$$

Граница зон. В соответствии с работой [10] потребуем непрерывности векторного потока

нейтронов через единичную площадку границы

$$(\Omega n) \Phi(r, \omega, \theta, \varphi). \quad (16)$$

Из условия (16) и разложений (2) и (4) вытекает непрерывность следующих комбинаций:

$$\frac{(n-m)!}{(n+m-2)!} A_{n-1, m-1}^{(v)} - \frac{(n-m+2)!}{(n+m)!} A_{n+1, m-1}^{(v)} + \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (A_{n+1, m+1}^{(v)} - A_{n-1, m+1}^{(v)})$$

при $n \geq 0, m \geq 0$;

$$\frac{(n-m)!}{(n+m-2)!} B_{n-1, m-1}^{(v)} - \frac{(n-m+2)!}{(n+m)!} B_{n+1, m-1}^{(v)} + \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (B_{n+1, m+1}^{(v)} - B_{n-1, m+1}^{(v)})$$

при $n \geq 1, m \geq 1$.

Отсюда в P_3 -приближении получим непрерывность функций

$$A_{00}^{(v)}, A_{20}^{(v)}, A_{22}^{(v)}, B_{22}^{(v)}, A_{11}^{(v)}, A_{31}^{(v)}, A_{33}^{(v)}, B_{11}^{(v)} - \frac{1}{6} B_{31}^{(v)} + \frac{1}{12} B_{33}^{(v)}$$

или в векторно-матричном виде

$$\left. \begin{aligned} \Phi^{(v)}(R-0) &= \Phi^{(v)}(R+0); \\ \frac{1}{3\sigma_1} \left(M \frac{d\Phi^{(v)}}{dr} + \frac{1}{r} N^{(v)} \Phi^{(v)} \right) \Big|_{r=R-0} &= \\ = \frac{1}{3\sigma_1} \left(M \frac{d\Phi^{(v)}}{dr} + \frac{1}{r} N^{(v)} \Phi^{(v)} \right) \Big|_{r=R+0} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где R — координата раздела зон; M и $N^{(v)}$ — матрицы:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{18}{7} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_3} & \frac{3}{14} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{45}{7} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} + \frac{4}{7} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \end{pmatrix};$$

$$N^{(v)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{\lambda_v}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{7} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_3} & -\frac{3}{14} \lambda_v \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \\ 0 & 0 & -\frac{90}{7} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_3} & -\frac{45}{7} \lambda_v \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \\ -\lambda_v \lambda_v \left(1 + \frac{3}{7} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \right) & \frac{\lambda_v}{2} \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \right) & 1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_3} & \end{pmatrix}.$$

Метод решения векторно-матричного уравнения (8) с граничными условиями (10), (15), (17)

Для решения сформулированной выше задачи реальную ячейку удобно дополнить до круговой, внешняя граница которой представляет собой описанную около реальной ячейки окружность. Обозначим радиус этой окружности через $R_{эфф} = \frac{a}{\cos l}$.

Предлагаемый эффективный метод решения состоит из следующих трех этапов.

1. Определение частного решения $\Phi(r)$ неоднородного уравнения (8) при $\nu=0$, удовлетворяющего в центре ячейки и на границах зон условиям (10) и (17), а на эффективной границе $r=R_{эфф}$ — произвольному условию (например, любому из условий на границе ячейки Вигнера — Зейтца [4—6]). Численный метод решения такого рода задач хорошо известен [9].

2. Получение «фундаментальной» системы решений однородных уравнений*, соответствующих уравнению (8) при $\nu=0, 1, 2 \dots$

Из общей теории систем линейных дифференциальных уравнений следует, что фундаментальная система решений в нашем случае при $\nu \neq 0$ будет состоять из четырех векторных функций, а при $\nu=0$ — из трех. Эти функции могут быть получены численно известным методом [9] в результате решения однородного уравнения, соответствующего системе (8), с условиями (10), (17) и соответственно с четырьмя (тремя) условиями при $r=R_{эфф}$:

$$\Phi_1^{(v)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \Phi_2^{(v)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\Phi_3^{(v)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \Phi_4^{(v)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

* В настоящей работе под частным решением однородного векторно-матричного уравнения, соответствующего уравнению (8), будем понимать любое решение, удовлетворяющее условиям (10) и (17), а под «фундаментальной» системой — максимальное число линейно независимых решений такого вида.

Общее решение системы (8) запишем в виде:

$$\left. \begin{aligned} \Phi^{(0)} &= \tilde{\Phi} + C_1^{(0)}\Phi_1^{(0)} + C_2^{(0)}\Phi_2^{(0)} + C_3^{(0)}\Phi_3^{(0)}; \\ \Phi^{(v)} &= C_1^{(v)}\Phi_1^{(v)} + C_2^{(v)}\Phi_2^{(v)} + \\ &+ C_3^{(v)}\Phi_3^{(v)} + C_4^{(v)}\Phi_4^{(v)} \\ &(v=1, 2, 3 \dots). \end{aligned} \right\} (18)$$

3. Выделение из общего решения (18) частного решения, удовлетворяющего условиям (15) на реальной границе ячейки. Подставив (18) в условия (15), получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных величин $C_i^{(v)}$. При практической реализации метода приходится ограничиваться конечным числом слагаемых по v : $v=0, 1, 2, \dots, s$. В этом случае число неизвестных величин $C_i^{(v)}$, как следует из системы (18), равно $4s+3$. Соответственно полученная алгебраическая система дает не $4(s+1)$ уравнений для их определения, а именно $4s+3$, так как в матрице $U^{(\mu)} \sin \frac{\pi\mu\omega}{l} = 0$ при $\mu=0$.

Подстановкой найденных значений $C_i^{(v)}$ в формулы (18) фактически завершается решение задачи. Зная величины $\Phi^{(v)}(r)$ ($v=0, 1, 2 \dots$), из разложений (4) можно получить функции $A_{00}(r, \omega)$, $A_{20}(r, \omega)$, $A_{22}(r, \omega)$ и $B_{22}(r, \omega)$. Среди этих функций особую роль играет функция

$A_{00}(r, \omega)$. Действительно, в теории реакторов обычно интересуются не функцией $\Phi(r, \omega, \theta, \varphi)$, а глобальным потоком нейтронов

$$\Phi_0(r, \omega) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta \Phi(r, \omega, \theta, \varphi) d\theta,$$

который тождественно совпадает с функцией $A_{00}(r, \omega)$.

Поступила в Редакцию 15/V 1967 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Марчук, В. П. Кочергин. «Атомная энергия», 18, 638 (1965).
2. J. Thie. Nucl. Sci. and Engng, 9, 286 (1961).
3. T. Dudley, P. Daitch. Nucl. Sci. and Engng, 25, 75 (1966).
4. E. Pennington. Nucl. Sci. and Engng, 19, 215 (1964).
5. W. Cleendenin. Nucl. Sci. and Engng, 14, 103 (1962).
6. Н. Нонеск. Trans. Amer. Nucl. Soc., 5, 350 (1962).
7. А. Д. Галанин. Теория ядерных реакторов на тепловых нейтронах. М., Атомиздат, 1957.
8. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Уравнения математической физики. М., Гостехтеориздат, 1953.
9. Г. И. Марчук. Методы расчета ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1961.
10. Г. Я. Румянцев. «Атомная энергия», 10, 26 (1961).

Метод вычисления групповых констант в резонансной области

А. А. ЛУКЬЯНОВ, Л. Н. ШЕХАТА *

УДК 621.039.51.13

Многогрупповое рассмотрение пространственно-энергетического распределения нейтронов в средах связано с проблемой определения некоторых групповых характеристик $\langle F \rangle_i$, усредненных по потоку нейтронов $\Phi(r, u)$ в i -м энергетическом интервале (группе) $\Delta u_i = u_{i+1} - u_i$ ** [1]:

$$\langle F \rangle_i = (\Delta u_i)^{-1} \int F(u) \Phi(r, u) du. \quad (1)$$

Спецификой резонансной области является резкая энергетическая зависимость потока нейтронов вблизи резонансов, в связи с чем значения $\langle F \rangle_i$ могут заметно отличаться от соответствующих величин для невозмущенного резонансной структурой спектра нейтронов.

Проблему определения групповых констант в резонансной области можно разделить на две качественно различные части: 1) сведение пространственно-энергетического уравнения Больцмана для потока нейтронов к стандартной многогрупповой системе уравнений, в результате чего групповые константы определяются как некоторая комбинация групповых характеристик; 2) вычисление этих характеристик с учетом конкретной для данной группы энергетической зависимости сечений.

Общий подход к решению первой части проблемы связан с использованием последовательных приближений при расчете $\langle F \rangle_i$; полученные таким образом групповые константы будут зависеть от координат. Универсальный, не зависящий от координат и размера системы набор групповых констант может быть введен формально лишь в случае сравнительно больших сред, где для функции плотности столкно-

* Атомный центр ОАР, Каир.

** Здесь и далее под энергией подразумевается соответствующая летаргия.