Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Т. П. ЖЕЛОНКИНА, С. А. ЛУКАШЕВИЧ, Е. А. ФЕДОСЕНКО

ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Практическое пособие

для студентов физических специальностей

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2020

УДК 537.3(076)
ББК 22.332я73
Ж518

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук В. Е. Гайшун,
кандидат технических наук Н. А. Ахраменко

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Желонкина, Т. П.

Ж518 Законы постоянного тока : практическое пособие / Т. П. Желонкина, С. А. Лукашевич, Е. А. Федосенко ; Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2020. – 47 с.

ISBN 978-985-577-647-6

Целью практического пособия является оказание помощи студентам при самостоятельном изучении законов постоянного тока, применении этих законов в практической деятельности.

Издание содержит краткие теоретические сведения, необходимые для решения задач с применением дифференциальных уравнений, дан алгоритм решения задач.

Практическое пособие адресовано студентам физических специальностей.

УДК 537.3(076)
ББК 22.332я73

ISBN 978-985-577-647-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее практическое пособие предназначено для самостоятельной работы студентов 2-го курса физических специальностей. Перед каждой задачей указаны, какие основные физические и математические уравнения должен знать студент при выполнении заданий, а также приведены вопросы для самоконтроля качества усвоения теоретического материала.

В издании содержатся типичные задачи и дается подробное их решение. Студенту рекомендуется прочитать условие и попытаться самостоятельно решить задачу, а если это не удалось, то проработать решение согласно данным авторами методическим указаниям.

Для успешного решения задачи необходимо хорошо изучить теоретический материал, проанализировать физическую сущность явлений, описанных в задаче. Затем нужно установить функциональную зависимость между величинами, данными в условии, и величиной, которую необходимо найти. Чтобы лучше понять условие, следует сделать вспомогательный рисунок или схему. Заключительным этапом анализа задачи является выбор метода ее решения и построение алгоритма.

В большинстве случаев задачу удобно решать в общем виде, выразив искомую величину через данные в задаче буквенные обозначения. Не следует бояться выкладок и преобразований. Умение свободно их производить есть один из элементов математической культуры, необходимой для изучения физики.

Получив решение в общем виде, нужно убедиться в его разумности. Здесь полезен анализ размерности, иногда – анализ частных или предельных случаев.

Если в задаче заданы числовые значения величин, то ответ должен быть доведен до числа. Все данные, включая табличные, надо выразить в единой системе единиц (как правило, в единицах СИ).

1 ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

1.1 Законы постоянного тока

Для расчета силы тока I, плотности тока $\vec{j}$ и сопротивления R в цепях с однородными проводниками следует использовать закон Ома в интегральной (1) и дифференциальной (2) формах:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon}{R}, \tag{1}$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \tag{2}$$

где σ – удельная электропроводность проводника,

U – падение напряжения,

φ_1, φ_2 – разность потенциалов на концах участка,

ε – алгебраическая сумма всех ЭДС, имеющихся на данном участке. Для замкнутой цепи $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, следовательно,

$$I = \frac{\varepsilon}{R}, \tag{3}$$

где R – полное сопротивление цепи.

Для однородного участка цепи $(\varepsilon = 0)$, значит

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}, \tag{4}$$

где R – сопротивление этого участка.

При решении задач, где имеются разветвленные цепи, необходимо использовать первое (5) и второе (6) правила Кирхгофа:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0 \tag{5}$$

– алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле, равна нулю;

$$\sum_{m=1}^{n} I_i R_i = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i . \tag{6}$$

– в любом замкнутом контуре алгебраическая сумма падений напряжений, т. е. произведений сил токов I_i на соответствующее сопротивление R_i, равна алгебраической сумме ЭДС, имеющихся в этом контуре.

Направление тока на каждом участке цепи между двумя узлами можно выбирать произвольно, сохраняя, однако, это направление на всех этапах решения задачи.

Обратите внимание, что при вычислении количества тепла Q, выделенного за время t при прохождении тока I, можно использовать закон Джоуля–Ленца:

$$Q = UIt = RI^2 t. \tag{7}$$

Если сила тока изменяется со временем (I = (I(t)), то

$$Q = \int_0^t RI^2(t)dt. \tag{8}$$

Следует самостоятельно получить дифференциальную форму закона Джоуля–Ленца:

$$Q_{уд} = \rho j^2, \tag{9}$$

где $Q_{уд}$ – количество тепла, выделяемого в единице объема в единицу времени.

В простейшем случае для однородного проводника постоянного поперечного сечения сопротивление

$$R = \rho \frac{dl}{S}, \tag{10}$$

где l – длина проводника,
S – площадь поперечного сечения,
ρ – удельное электрическое сопротивление.

Сопротивление проводника с переменным сечением необходимо вычислять путем интегрирования выражения

$$dR = \rho \frac{dl}{S}. \tag{11}$$

Общее сопротивление проводников, соединенных последовательно:

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i \, . \qquad (12)$$

Общее сопротивление проводников, соединенных параллельно:

$$\frac{1}{R_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} \, . \qquad (13)$$

Контрольные вопросы

1. Как определяется сопротивление линейных проводников?
2. Как записать закон Ома для участка цепи?
3. Запишите закон Ома в дифференциальной форме.
4. Что такое разность потенциалов, электродвижущая сила, падение напряжения?
5. Сформулируйте правила Кирхгофа.
6. Чему равна работа, производимая постоянным током?
7. Как подсчитать мощность постоянного тока?
8. Запишите закон Ома для постоянной цепи.
9. Запишите дифференциальную формулировку закона Джоуля–Ленца.

1.2. Основные типы задач и методы их решения

1. Определить заряд, прошедший по проводу с сопротивлением R при равномерном нарастании напряжения на концах провода от U_0 до U в течение времени t_1.

Решение. Так как сила тока в проводе изменяется, то возьмем дифференциал заряда $dq = I(t)dt$ и проинтегрируем $q = \int_0^{t_1} I(t)dt$.

Согласно условию задачи

$U = U_0 + Ct$ при $t = 0$, $U = U_0$ а при $t = t_1$, $U = U_1$, тогда $U_1 = U_0 + Ct$, откуда находим конечную точку C:

$$C = \frac{U_1 - U_0}{t_1}; \;\; U = U_0 + \frac{U_1 - U_0}{t_1} t;$$

$$I(t) = \frac{U}{R}, \; I(t) = \frac{1}{R}\left(U_0 + \frac{U_1 - U_0}{t_1} t \right).$$

Подставим это выражение под интеграл и найдём, что $q = \dfrac{t_1}{2R}(U_0 + U_1)$.

2. Металлический шар радиуса *a* (рисунок 1) окружён концентрической тонкой металлической оболочкой радиуса *b*. Пространство между этими электродами заполнено однородной слабо проводящей средой с удельным сопротивлением ρ. Найти сопротивление межэлектродного промежутка.

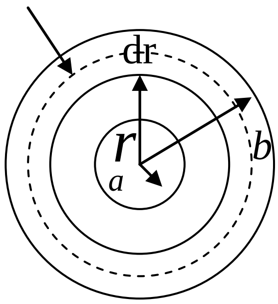

Рисунок 1

Решение. Выделим мысленно на рисунке 1 тонкий сферический слой между радиусами *r* и *r*+*dr*. Линии тока во всех точках этого слоя идут перпендикулярно ему, поэтому такой слой можно рассматривать как цилиндрический проводник длиной *dr* с площадью поперечного сечения $4\pi r^2$. Сопротивление этого слоя, согласно формуле (2), равно $dR = \rho \dfrac{dr}{4\pi r^2}$.

Проинтегрировав это выражение по *r* от *d* до *b*, получим: $R = \rho / 4\pi \left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} \right)$.

3. Два металлических шарика одинакового радиуса *d* находятся в однородной среде, слабо проводящей, с удельным сопротивлением ρ. Найти сопротивление среды между шариками при условии, что расстояние между шариками значительно больше их размеров.

Решение. Мысленно зарядим шарики зарядами +*q* и –*q*. Поскольку шарики находятся далеко друг от друга, электрическое поле вблизи поверхности каждого из них определяется практически только зарядом прилегающего шарика, причем его заряд можно считать распределенным равномерно по поверхности.

Окружив шарик с положительным зарядом концентрической сферой радиуса *d*, запишем выражение для тока, протекающего через эту сферу:

$$I = 4\pi d^2 j,$$

где j – плотность тока.

Согласно закону Ома $j = E / \rho$. Напряженность поля находим с помощью теоремы Гаусса:

$$\oint_s \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} q, \; E = q / 4\pi\varepsilon_0 d,$$

тогда $I^2 = q / \varepsilon_0 \rho$.

Разность потенциалов между шариками

$$U = \varphi_+ - \varphi_- = \frac{\rho_q}{4\pi\varepsilon_0 d}.$$

Искомое сопротивление

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\rho}{2\pi d}.$$

Этот результат справедлив независимо от значения диэлектрической проницаемости среды.

4. К большому металлическому листу толщины d приварены на расстоянии b друг от друга два цилиндрических проводника радиусом r_0 (рисунок 2). Оценить сопротивление между проводниками, если $d \ll r_0 \ll b$. Удельная электропроводимость проводников σ_1 значительно больше удельной электропроводимости материала листа σ.

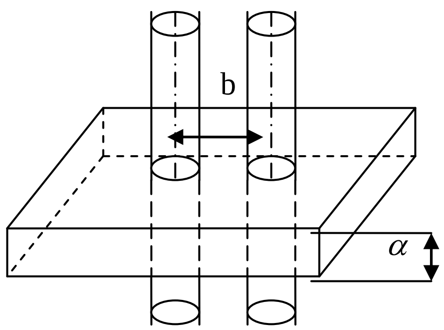

Рисунок 2

Решение. Поскольку $\sigma_1 << \sigma$, можно считать, что цилиндрические проводники по всей своей длине имеют постоянные потенциалы. Пусть линейная плотность зарядов на проводниках $+\tau$ и $-\tau$. Применяя теорему Гаусса к одному из стержней, найдем напряженность поля на расстоянии r от его оси: $E = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r} + \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 (b-r)}$.

Разность потенциалов между стержнями находим путем интегрирования напряженности поля:

$$U = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}\int_{r_0}^{b-r_0}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{br}\right)dr = \frac{\tau}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b-r_0}{r_0} \approx \ln\frac{l}{r_0}.$$

Полный ток I легко найти, если принять во внимание, что вблизи каждого из стержней поле практически не зависит от заряда другого стержня $(b >> r_0)$. Предполагая, что плотность тока постоянна по толщине листа, получим для полного тока, вытекающего из цилиндрического проводника:

$$I = 2\pi r_0 dj = 2\pi r_0 d\sigma E = \frac{d\sigma E}{\varepsilon_0}.$$

Следовательно, $R = \dfrac{U}{I} = \dfrac{1}{\pi\sigma d}\ln\dfrac{b}{r_0}$.

5. Тело из плохого проводника имеет форму цилиндрической трубки. Длина трубки l , внутренний и внешний радиусы поверхностей r_1 и r_2, удельное сопротивление вещества трубки ρ. Цилиндрические поверхности трубки покрыты обкладками из идеального проводника и между обкладками создана некоторая разность потенциалов, вследствие чего через стенку трубки идет ток. Найти сопротивление тела.

Решение. Согласно закону Ома

$$E = \rho j,$$

где j – плотность тока.

Если на единице длины цилиндра находится заряд τ, то напряженность поля около цилиндра находим по теореме Гаусса:

$$\oint_S \vec{E}dS = k\frac{4\pi}{\varepsilon}\sum q; \quad E2\pi rl = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{4\pi}{\varepsilon}q; \quad E = \frac{\tau}{2\pi r\varepsilon_0\varepsilon}.$$

Находим разность потенциалов между стенками цилиндра:

$$U = -\int_{r_2}^{r_1} E dr, \quad U = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{r_2}{r_1}.$$

По определению сопротивление

$$R = \frac{U}{I},$$

где I – сила тока, идущего от стенки к стенке цилиндра $I = 2\pi r_1 j_1 l$.

Подставим сюда $j_1 = \frac{\tau}{2\pi r_1 \varepsilon_0 \rho}$, находим, $I = \frac{\tau l}{\varepsilon_0 \rho}$. Вычисляя отношение $\frac{U}{I}$, получаем: $R = \frac{\rho}{2\pi l} \cdot \ln\frac{r_2}{r_1}$.

6. Два проводника произвольной формы находятся в безграничной однородной слабо проводящей среде с удельным сопротивлением ρ и диэлектрической проницаемостью ε. Найти значение произведения RC для данной системы, где R – сопротивление среды между проводниками, C – взаимная емкость проводников при наличии среды.

Решение. Зарядим мысленно проводники зарядами и $+q$ и $-q$. Так как среда между ними слабо проводящая, то поверхности проводников являются эквипотенциальными и конфигурация поля такая же, как и при отсутствии среды.

Окружим, например, положительно заряженный проводник замкнутой поверхностью S и вычислим отдельно R и C, используя закон Ома и теорему Гаусса соответственно:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U}{\oint_S j_n ds} = \frac{U}{\frac{1}{\rho}\oint_S E_n dS},$$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\oint_S D_n dS}{U} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 \oint_S E_n dS}{U},$$

$$RC = \varepsilon_0 \varepsilon \rho$$

7. Проводник с удельным сопротивлением ρ граничит с диэлектриком проницаемости ε. В некоторой точке A у поверхности проводника электрическая индукция равна $\vec{D}$, причем вектор $\vec{D}$ направлен от проводника и составляет угол α с нормалью к поверхности. Найти поверхностную плотность зарядов на проводнике вблизи точки A и плотность тока в проводнике вблизи этой же точки.

Решение. Поверхностная плотность зарядов на проводнике $\sigma = D_n = D \cdot \cos\alpha$. Плотность тока находим по закону Ома:

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho}\vec{E}.$$

Из уравнения непрерывности

$$\oint_S \vec{j}d\vec{S} = -\frac{dq}{dt},$$

а для постоянного тока

$$\oint_S \vec{j}d\vec{S} = 0$$

следует, что нормальные составляющие вектора $\vec{j}$ равны, и так как в диэлектрике $j_n = 0$, то и в проводнике $j_n = 0$. Следовательно, в проводнике вектор $\vec{j}$ касателен его поверхности. Это же относится и к вектору $\vec{E}$.

Из теоремы о циркуляции вектора $\vec{E}$ следует, что тангенциальные составляющие его по разные стороны границы раздела одинаковы:

$$E = E_\tau = D \cdot \sin\alpha / \varepsilon\varepsilon_0.$$

Учитывая все это, получим $j = \dfrac{E}{\rho} = \dfrac{D \cdot \sin\alpha}{\varepsilon_0 \varepsilon \rho}$.

8. Зазор между обкладками плоского конденсатора заполнен последовательно двумя диэлектрическими слоями 1 и 2 толщиной d_1 и d_2, с проницаемостями ε_1 и ε_2 и удельными сопротивлениями ρ_1 и ρ_2. Конденсатор находится под постоянным напряжением U, причем электрическое поле направлено от слоя 1 к слою 2.

Найти σ – поверхностную плотность сторонних зарядов на границе раздела диэлектрических слоев и условие, при котором $\sigma = 0$.

Решение. Искомая поверхностная плотность зарядов

$$\sigma = D_{2n} - D_{1n} = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_1 .$$

Для определения E_1 и E_2 воспользуемся двумя условиями:

$$j_1 = j_2, \ \ \frac{E_1}{\rho_1} = \frac{E_2}{\rho_2}; \ \ U = E_1 d_1 + E_2 d_2 .$$

Решив два последних уравнения, находим:

$$E_1 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot E_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{U - E_1 d_1}{d_2}, \quad E_1 = \frac{\rho_1 U}{\rho_2 d_2 + \rho_1 d_1},$$

$$E_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} E_1 = \frac{\rho_2 U}{\rho_2 d_2 + \rho_1 d_1}.$$

Найденные E_1 и E_2 подставим в первое уравнение:

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 U}{\rho_2 d_2 + \rho_1 d_1} \cdot (\rho_2 \varepsilon_2 - \rho_1 \varepsilon_1).$$

9. Движение ионов под действием электрического поля Земли, градиент которого равен 130 В/м, создает в атмосфере вертикальный ток. Если не учитывать противотоков в районах, охваченных грозой, то для всей земной поверхности получится сила тока, равная 1 500 А.

Определить: 1) среднюю удельную проводимость земной атмосферы у поверхности Земли; 2) время, в течение которого под действием этого тока и в отсутствие противотоков электрическое поле у поверхности Земли уменьшилось в 100 раз.

Решение. 1) Согласно закону Ома:

$$j = \gamma E,$$

где γ – средняя удельная проводимость атмосферы.
С другой стороны:

$$j = \frac{I}{S} = \frac{I}{4\pi R_З^2},$$

где $R_з$ – радиус Земли. Приравниваем первое и второе выражение и находим:

$$\gamma = \frac{I}{4\pi R_з^{\ 2} E}; \ \gamma = 2,26 \cdot 10^{-14} \frac{\text{А}}{\text{В} \cdot \text{м}}.$$

2) $j = \gamma E$. Умножим обе части на dt: $jdt = \gamma E dt$.

Согласно теореме Гаусса

$$\oint_S E_n dS = 4\pi q \frac{1}{\varepsilon_0}; \quad E = \frac{\sigma}{E_0},$$

где σ – поверхностная плотность заряда.

Согласно определению плотности тока $jdt = -d\sigma$,

следовательно, $-d\sigma = \gamma \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} dt$.

Решаем полученное уравнение:

$$dt = \frac{-\varepsilon_0}{\gamma} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma}; \ t = -\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{\varepsilon_0}{\gamma} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{\varepsilon_0}{\gamma} \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\varepsilon_0}{\gamma} \ln \frac{E_1}{E_2};$$

$$t = \frac{\varepsilon_0}{\gamma} \ln 100; \qquad t = 1\ 800.$$

10. Длинный проводник круглого сечения площади S сделан из материала, удельное сопротивление которого зависит только от расстояния r до оси проводника по закону $\rho = \dfrac{\alpha}{r^2}$, где α – постоянная. Найти: 1) напряженность электрического поля в проводнике, при которой по нему будет протекать ток I; 2) сопротивление единицы длины такого проводника.

Решение. 1) Согласно закону Ома

$$I = \int_0^r j 2\pi r dr = \int_0^r \frac{E}{\rho} 2\pi r dr = \int_0^r E \frac{2\pi r^3 dr}{\alpha} = \frac{E}{\alpha} \frac{2\pi r^4}{4}; \ E = \frac{2\pi\alpha I}{S^2}.$$

2) Сопротивление единицы проводника можно определить с помощью формулы $R = \dfrac{U}{I}$. Поделив обе части этого равенства на длину l, найдем

$$R_{ед} = \frac{U}{l \cdot I} = \frac{E}{I},$$

$$R_{ед} = \frac{2\pi\alpha}{S} = \frac{2\pi\alpha}{S}.$$

11. Конденсатор емкостью *C* подключен последовательно с резистором *R* к источнику с ЭДС ε. Найти закон изменения заряда со временем на обкладках конденсатора. Определить работу, совершаемую источником при зарядке конденсатора, и количество теплоты, выделяющейся при этом в цепи.

Решение. Уравнение энергетического баланса для произвольного промежутка времени:

$$dA_{ист} = dQ_{дж} + dW,$$

$$dA_{ист} = \varepsilon I dt; \;\; dQ = I^2 R dt, \;\; dW = d(q^2 / 2C) = \frac{qdq}{C},$$

$$\varepsilon I dt = I^2 R dt + \frac{qdq}{C}; \;\; \frac{dq}{dt} = I;$$

$$\varepsilon = IR + \frac{q}{C}; \;\; \varepsilon = \frac{dq}{dt} \cdot R + \frac{q}{C};$$

$$\int_0^t \frac{dt}{CR} = \int_0^Q \frac{dq}{\varepsilon C - q}; \quad \frac{t}{CR} = -\ln\frac{C\varepsilon - q}{C\varepsilon}.$$

После потенцирования

$$q = C\varepsilon\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{CR}\right)\right],$$

$$A_{ист} = \int_0^\infty \varepsilon I dt = \varepsilon \int_0^{q_k} dq = C\varepsilon^2,$$

$$Q_{дж} = A_{ист} - W = C\varepsilon^2 - \frac{q^2 k}{2C} = C\varepsilon^2 - \frac{C\varepsilon^2}{2} = \frac{C\varepsilon^2}{2},$$

$$Q_{дж} = \frac{C\varepsilon^2}{2}.$$

Это выражение может быть получено и независимым путем:

$$Q_{дж} = \int_0^{\infty} I^2 R dt, \quad I = \frac{\varepsilon}{R} \exp\left(\frac{t}{CR}\right),$$

$$Q_{дж} = \frac{\varepsilon^2}{R^2} R \int\limits_0^{\infty} \exp^{-\frac{2t}{CR}} \cdot dt \frac{C\varepsilon^2}{2}.$$

12. Определить закон изменения со временем напряжения на обкладках конденсатора при замыкании ключа *К* (рисунок 3). Через сколько времени, считая от момента замыкания ключа, напряжение достигнет 99 % от своего наибольшего значения, если R_1 = 30 кОм, R_2 = 15 кОм, C = 0,2 мкФ?

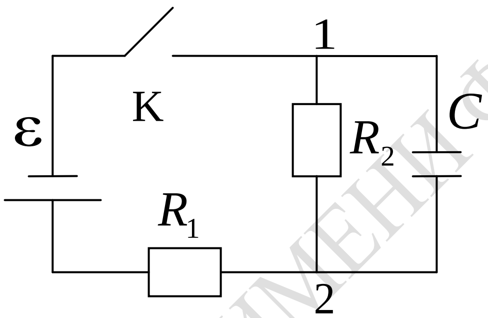

Рисунок 3

Решение. Рассмотрим участок цепи 1 ε 2 при неустановившихся значениях сил тока $I_2(t)R_1 = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon$.

Так как $I_1 = I_2 + I_c = \dfrac{U}{R_2} = \dfrac{dq}{dt}$,

то $\left(\dfrac{U}{R_2} + \dfrac{dq}{dt}\right) R_1 = -U + \varepsilon$, $q = C \cdot U$, $CR_1 \dfrac{dU}{dt} = \varepsilon - \dfrac{R_1 + R_2}{R_2} U$.

Разделим переменные $\displaystyle\int_0^U \frac{dU}{\varepsilon - (R_1 + R_2)\dfrac{U}{R_2}} = \int_0^t \frac{dt}{CR_1}$;

$$-\frac{R_2}{R + R_2} \ln \frac{\varepsilon - (R_1 + R_2)\dfrac{U}{R_2}}{\varepsilon} = \frac{t}{CR_1}.$$

После потенцирования

$$U=\frac{\varepsilon R_2}{R_1+R_2}\left[1-\exp\left(-\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}t\right)\right],$$

$$U_{\max}=\frac{\varepsilon R_2}{R_1+R_2};\ U_{\max}=U_{\max}\left[1-\exp\left(-\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}\tau\right)\right],$$

откуда $\exp\dfrac{-R_1+R_2}{CR_1R_2}\tau=0{,}01$,

или $\dfrac{(R_1+R_2)\tau}{CR_1R_2}=\ln 100$, $\tau=\dfrac{CR_1R_2\ln 100}{(R_1+R_2)}=9{,}2\cdot 10^{-3}$ с.

13. Конденсатору емкостью C сообщили заряд q_0 и затем в момент времени $t=0$ его замкнули на сопротивление R (рисунок 4). Найти зависимость от времени t количества теплоты, выделившейся на сопротивлении.

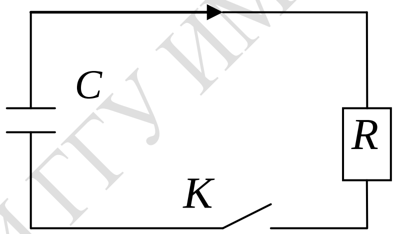

Рисунок 4

Решение. Искомое количество теплоты $Q=\int_0^t RI^2dt$, где $I=I(t)$.

Воспользуемся законом Ома $RI=\varphi_1-\varphi_2=U$, или $RI=\dfrac{q}{C}$; $R\dfrac{dI}{dt}=\dfrac{1}{C}\dfrac{dq}{dt}$;

$R\dfrac{dI}{dt}=\dfrac{1}{C}I$.

Проинтегрировав, получим:

$$\int_{I_0}^{I}\frac{dI}{I}=\int_0^t\frac{1}{RC}dt;\quad \ln\frac{I}{I_0}=\frac{t}{RC};\quad I=I_0\exp^{-\frac{t}{RC}}.$$

При $q = q_0, \quad RI_0 = \dfrac{q_0}{C}, \quad I_0 = q_0 \cdot \dfrac{1}{RC}; \quad I = \dfrac{q_0}{RC \exp^{-\frac{t}{RC}}};$

Окончательно $Q = \dfrac{q_0^{\ 2}}{2C \cdot \left(1 - \exp^{-\frac{t}{RC}}\right)}.$

14. Катушка диаметром D = 20 см с намотанным на нее медным проводом длиной l = 20 м и поперечным сечением 2 мм^2 приводится во вращение с угловой скоростью $\omega = 2\pi \cdot 10$ об/с.

С помощью скользящих контактов катушка замыкается на баллистический гальванометр. При резком ее торможении стрелка гальванометра склоняется на 2,4 деления. Какова цена деления гальванометра?

Решение. Обозначим через ν – скорость направленного движения электронов в проводе катушки, а через N – общее число электронов в нем. По закону Джоуля–Ленца $dA = I^2 Rdt$, с другой стороны, эту работу можно выразить как изменение кинетической энергии электронов:

$$dA = -Nd\left(\frac{\mathrm{m}\nu^2}{2}\right) = -Nm\nu d\nu,$$

где m – масса электрона.

Сила тока

$$I = jS; \; j = en_0\nu,$$

где n_0 – число свободных электронов в единице объема,

e – заряд электрона.

$$I = en_0\nu S, \quad dA = n_0 e\nu SRIdt = n_0 e\nu SRdq.$$

Приравниваем выражение работ $n_0 e\nu SRdq = -Nm\nu d\nu$, заменим $N = n_0 lS$.

$$\int_0^q eRdq = -\int_{\nu_0}^0 mld\nu; \quad q = \frac{m}{e} \cdot \frac{l}{R}\nu_0.$$

Обозначим цену деления через x. Тогда $nx = q$, и

$$x = \frac{q}{n} = \frac{ml}{eRn} \nu_0; \ \nu_0 = \varpi \cdot r,$$

где r – радиус катушки.

Окончательно $x = \dfrac{ml\varpi \cdot r}{eRn} = 10^{-9}$ Кл/дел.

15. Диск радиусом r_1 и толщиной h из материала с удельным сопротивлением ρ охвачен кольцом из материала с гораздо большей электропроводностью, так что сопротивлением кольца можно пренебречь. В центр диска введен цилиндрический электрод радиусом r_0 с пренебрежимо малым сопротивлением. Между кольцом и электродом приложена разность потенциалов U. Определить полную мощность, выделяемую в диске.

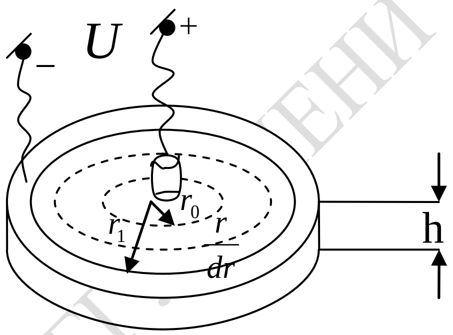

Рисунок 5

Решение. Определим сопротивление диска, для этого выделим в диске кольцо с произвольным радиусом r шириной d_r (рисунок 5), его сопротивление

$$dR = \rho \frac{dr}{2\pi r h}, \quad R = \int_{r_0}^{r} dR, \quad R = \frac{\rho}{2\pi h} \ln \frac{r_1}{r_0}.$$

Сила тока $I = \dfrac{U}{R} = \dfrac{2\pi h \cdot U}{\rho \ln \frac{r_1}{r_0}}$.

Полная мощность $P = IU = \dfrac{2\pi h U^2}{\rho \ln \frac{r_1}{r_0}}$.

16. Из нихромового провода длиной l нужно сделать n одинаковых нагревателей так, чтобы они имели общую максимальную мощность. Используется источник тока с ЭДС ε и внутренним сопротивлением r. Определить n.

Решение. $P = I^2 R$, где R – общее сопротивление нагревателей, подключенных параллельно:

$$R = \frac{l\rho}{n^2 S}; \quad I = \frac{\varepsilon}{R+r}; \quad P = \frac{\varepsilon^2}{\left(\frac{l\rho}{n^2 S} + r\right)^2} \cdot \frac{l\rho}{n^2 S}.$$

Обозначим $\frac{l\rho}{S} = R_0$, тогда $P = \frac{\varepsilon^2}{\left(\frac{R_0}{n^2} + r\right)^2} \cdot \frac{R_0}{n^2}$,

$$\frac{\partial\rho}{\partial n} = \frac{2\varepsilon^2 R_0 \left(\frac{R_0}{n^2} + r\right)}{\left[\left(\frac{R_0}{n^2} + r\right) n\right]^3},$$

откуда $n = \sqrt{\frac{R_0}{r}} = \sqrt{\frac{l\rho}{Sr}}$.

17. В плоский конденсатор заданных размеров вдвигается с постоянной скоростью v пластина диэлектрика (рисунок 6). Определить ток в цепи батареи, подключенной к конденсатору.

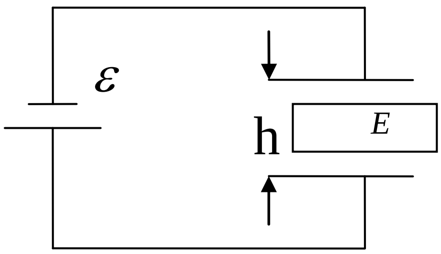

Рисунок 6

Решение. Заряд, приходящий на пластины за время dt, $dq = \sigma v b dt$, где ϖ – поверхностная плоскость поляризованных зарядов на диэлектрике и

$$\varpi = \rho(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 \frac{\varepsilon}{h}.$$

Сила тока

$$I = \frac{dq}{dt} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 \frac{\varepsilon}{h} \nu b,$$

где b – ширина пластины.

18. Стеклянная пластина целиком заполняет зазор между обкладками плоского конденсатора, емкость которого без пластины C_0. Конденсатор подключили к источнику постоянного напряжения U. Найти механическую работу, которую необходимо совершить против электрических сил, чтобы извлечь пластину из конденсатора.

Решение. Согласно закону сохранения энергии

$$A_{мех} + A_{ист} = \Delta W; \;\; \Delta W = \frac{\Delta C \cdot U^2}{2} = \Delta q \cdot \frac{U}{2};$$

$$A_{ист} = \Delta q \cdot U = 2\Delta W, \;\; A_{мех} = \Delta W - A_{ист} = -\Delta W = \frac{1}{2}(\varepsilon - 1) \cdot C_0 \cdot U^2;$$

$$A_{мех} > 0, \; A_{ист} < 0, \; \Delta W < 0.$$

19. В схеме (рисунок 7) ЭДС источников $\varepsilon_1 = 1{,}0$ В, $\varepsilon_2 = 2{,}5$ В и сопротивления $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом. Внутреннее сопротивление источников пренебрежимо мало. Найти разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ между обкладками A и B конденсатора C.

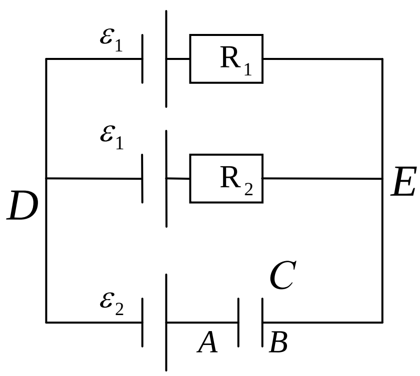

Рисунок 7

Решение. В соответствии с законом Ома для замкнутой цепи, содержащей сопротивление R_1 и R_2, запишем $(R_1 + R_2)\cdot I = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, где положительное направление выбрано по часовой стрелке. С другой стороны, для одностороннего участка DR_1E цепи

$$R_1 I = \varphi_D - \varphi_E + \varepsilon_1,$$

А для участка DCE:

$$\varepsilon_1 + \varphi_B - \varphi_A = \varphi_E - \varphi_D.$$

Решив совместно эти три уравнения, получаем

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\cdot(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = -0{,}5\,\text{В}.$$

20. В боковые стороны и диагонали схемы мостика Уитстона включены источники тока с произвольными ЭДС (рисунок 8). Сопротивления этих сторон и диагоналей, включая внутренние, сопротивления источников тока, равны соответственно $R_1, R_2,..., R_6$.

При каком условии замыкание и размыкание ключа в диагонали 6 не влияет на показание гальванометра, включенного в диагональ 5?

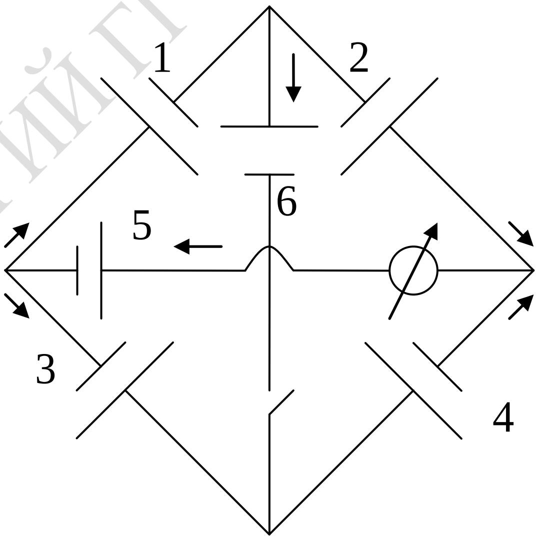

Рисунок 8

Решение. Допустим, что вначале ключ K был замкнут. Тогда на основании правил Кирхгофа

$$\begin{cases} I_1 + I_3 + I_5 = 0, \;\; I_2 + I_4 + I_5 = 0, \\ I_1 R_1 + I_2 R_2 - I_5 R_5 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_5, \\ I_3 R_3 + I_4 R_4 - I_5 R_5 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4 - \varepsilon_{5.} \end{cases}$$

Если разомкнуть ключ *K*, то I_6, что приведет к изменению остальных токов, кроме $I_5 = I_5^{'}$:

$$\begin{cases} I_1 + I_3 = I_1^{'} + I_3^{'}, \;\; I_2 + I_4 = I_2^{'} + I_4^{'}, \\ I_1 R_1 + I_2 R_2 = I_1^{'} R_1 + I_2^{'} R_2, \\ I_3 R_3 + I_4 R_4 = I_3^{'} R_3 + I_4^{'} R_4. \end{cases}$$

Переписав систему в виде

$$\begin{cases} R_1 (I_1 - I_1^{'}) = R_2 (I_2^{'} - I_2), \\ R_3 (I_3 - I_3^{'}) = R_4 (I_4^{'} - I_4), \\ I_1 - I_1^{'} = I_3 - I_3^{'}, \;\; I_2 - I_2^{'} = I_4 - I_4^{'} \Rightarrow, \end{cases}$$

почленным делением первых двух уравнений находим искомое условие:

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}.$$

21. В схеме, показанной на рисунке 9, $\varepsilon_1 = 20$ В; $\varepsilon_2 = 25$ В; $R_1 = 10$ Ом; $R_2 = 150$ Ом; внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы. Определить: 1) работу, совершаемую источниками, и полное количество выделившейся в цепи джоулевой теплоты за время $\Delta t = 0{,}5$с при $R_3 = 82$ Ом; 2) при каком сопротивлении R_3 выделяемая на этом резисторе тепловая мощность максимальная?

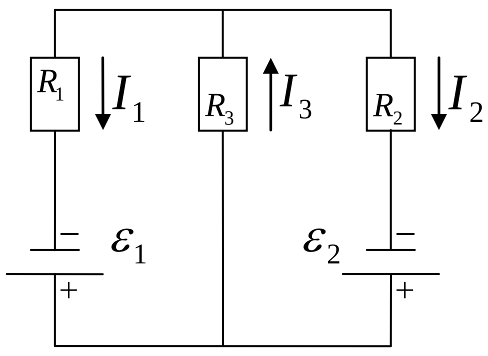

Рисунок 9

Решение. 1. Применим правила Кирхгофа к одному из узлов и замкнутым контурам $R_1\varepsilon_1R_3$ и $R_2\varepsilon_2R_3$:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3, \\ I_1R_1 + I_3R_3 = \varepsilon_1, \\ I_2R_2 + I_3R_3 = \varepsilon_2 \Rightarrow \end{cases}$$

$$I_3 = \frac{\varepsilon_1R_2 + \varepsilon_2R_1}{R_1R_2 + R_3(R_1 + R_2)} = 0,25\,\text{А};$$

Отрицательное значение тока I_1 указывает на то, что выбранное направление тока I_1 следует изменить на противоположное $I_1^{'} = 0,05\,\text{А}$.

$$A_1 = -\varepsilon_1 I_1^{'} \Delta t = 0,5\,\text{Дж}.$$

Работа второго источника положительна, так как ток I_2 направлен по его стороннему полю.

$$A_2 = \varepsilon_2 I_2^{'} \Delta t = 3,75\,\text{Дж}; \quad Q = A_1 + A_2 = 3,25\,\text{Дж}.$$

2. Выделяемая на резисторе R_3 тепловая мощность

$$N = I_3^{\,2} R_x,$$

где R_x – искомое сопротивление.

$$\frac{dN}{dR_x} = 0; \quad N = \frac{(\varepsilon_1R_2 + \varepsilon_2R_1)^2 \cdot R_x}{[R_1R_2 + R_x(R_1 + R_2)]^2};$$

$$\frac{dN}{dR_x} = \frac{(\varepsilon_1R_2 + \varepsilon_2R_1)^2 \cdot [R_1R_2 + R_x(R_1 + R_2)]^2 - 2R_x(R_1 + R_2)[R_1R_2 + R_x(R_1 + R_2)]}{[R_1R_2 + R_x(R_1 + R_2)]^4} = 0;$$

$$R_x = \frac{R_1R_2}{(R_1 + R_2)} = 6\ \text{Ом}.$$

22. Три источника с $\varepsilon_1 = 6\,B$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 4\,B$ и внутренними сопротивлениями $r = 0,5$ Ом каждый соединены, как показано на рисунке 10, и замкнуты на резистор с переменным сопротивлением. Определить разности потенциалов $\varphi_D - \varphi_C$ и $\varphi_K - \varphi_D$ при сопротивлении резистора $R = 4$ Ом. Построить графики зависимостей указанных разностей потенциалов от сопротивления резистора.

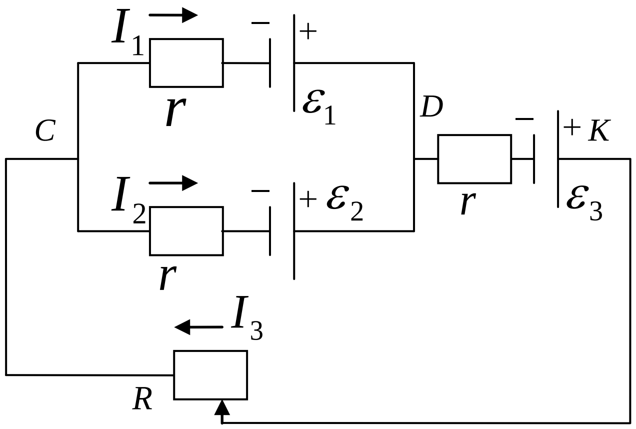

Рисунок 10

Решение. Применим первое правило Кирхгофа к узлу D и второе правило к контурам $C\varepsilon_1\varepsilon_3RC$ и $C\varepsilon_2\varepsilon_3RC$:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 \\ I_1 r + I_3 (r+R) = \varepsilon_1 + \varepsilon_3 \\ I_2 r + I_3 (r+R) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$I_3 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3}{3r + 2R}.$$

Подставив это выражение в третье уравнение, получим:

$$I_2 r = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - (r+R)\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3}{3r + 2R}.$$

Применяем обобщенный закон Ома к участкам $C\varepsilon_2D$ *и* $D\varepsilon_3K$:

$$I_2 r = \varphi_c - \varphi_D + \varepsilon_2; \quad I_3 r = \varphi_D - \varphi_K + \varepsilon_3.$$

Учитывая предыдущее выражение и выражения для тока I_3, находим:

$$\varphi_D - \varphi_C = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3)r + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)R}{3r + 2R} = 4{,}5\,\text{В},$$

$$\varphi_K - \varphi_D = \frac{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)r + 2\varepsilon_3 R}{3r + 2R} = 3{,}1\,\text{В}.$$

Как видно из решения, $\varphi_D - \varphi_C > \varepsilon_2$. Это значит, что второй источник подавлен и направление тока I_2 противоположно показанному на схеме.

Обозначим $\varphi_D - \varphi_C = \Delta\varphi_1$, находим $\dfrac{d(\Delta\varphi_1)}{dR} = \dfrac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3)r}{(3r + 2R)^2} > 0;$ следовательно, $\Delta\varphi_1$ является монотонно возрастающей функцией внешнего сопротивления, асимптотически стремящейся к значению:

$$\Delta\varphi_1 = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{2} = 5\,\text{В}, \ \ (R \to \infty).$$

Для построения графика (рисунок 11) находим точки:

$$\Delta\varphi_1 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)\frac{r}{3r} = 2\,\text{В} \quad \left(R = 0\right).$$

Допустим, $\Delta\varphi_1 = \varepsilon_2 = 4\,\text{В}$, при этом

$$R = R_1 = \frac{(2\varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_1)r}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = 1{,}5 \text{ Ом}.$$

Для построения графика зависимости $\varphi_K - \varphi_D = \Delta\varphi_2$ от сопротивления R (рисунок 12) проведем аналогичные расчеты:

$$\Delta\varphi_2 = \frac{r(\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{3r} = -2\,\text{В} \quad \left(R = 0\right),$$

$$\Delta\varphi_2 \to \varepsilon_3 = 4\,\text{В} \ \ (R \to \infty),$$

$$\frac{d(\Delta\varphi_2)}{dR} = \frac{2\varepsilon_3(3r + 2\text{r}) - (\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)2r - 4\varepsilon_3 R}{(3r + 2R)^2} = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3)2r}{(3r + 2R)^2} > 0\,.$$

$$\Delta\varphi_2 = 0 \text{ при } R = R_0 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3}{2\varepsilon_2} r = 0{,}38 \text{ Ом}.$$

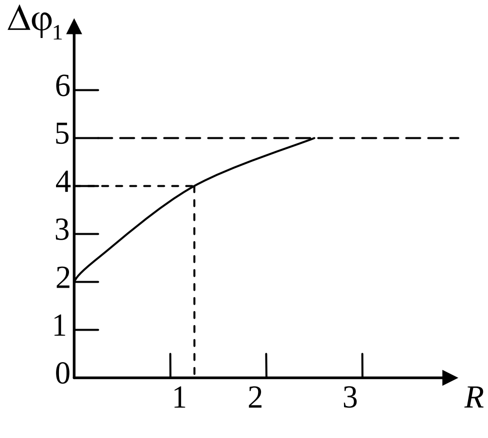

Рисунок 11

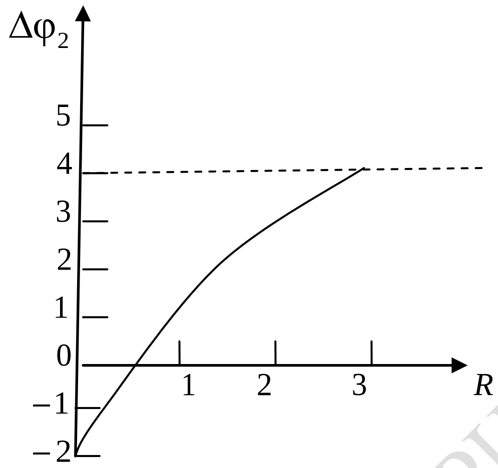

Рисунок 12

23. Отклонение стрелки приборов магнитоэлектрической системы прямо пропорционально проходящему току $I = K_i n$, где K_i – цена деления по току. Определить K_i, если при включенном сопротивлении R_1 стрелка гальванометра отклоняется на n_1 делений, а при включенном – на n_2 делений. Схема приведена на рисунке 13, величины r_g, R_1, R_2, R и ε батареи заданы.

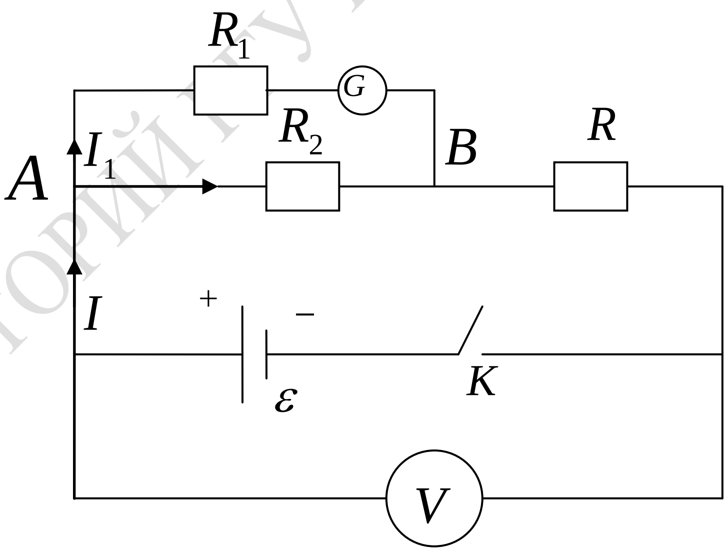

Рисунок 13

Решение. Согласно закону Ома $I = \dfrac{\varepsilon}{(R_{AB} + R)}$, $U_{AB} = (R_1 + r_g) = I_1^{'} \cdot R_2$.

По первому закону Кирхгофа $I = I_1 + I_1^{'}$,

$$I = I_1 + I_1^{'}\frac{R_1 + r_g}{R_2} = I_1\left(1 + \frac{R_1 + r_g}{R_2}\right) \Rightarrow I_1 = \frac{IR_2}{R_2 + R_1 + r_g}.$$

$$I_1 = \frac{\varepsilon \cdot R_2}{(R_{AB} + R)(R_2 + R_1 + r_g)}.$$

При $R_1 = 0,\quad I_2 = \dfrac{\varepsilon R_2}{(R_{AB}^{'} + R)(R_2 + r_g)};\quad R_{AB} = \dfrac{R_2(R_1 + r_g)}{R_1 + R_2 + r_g};\quad R_{AB} = \dfrac{R_2 r_g}{R_2 + r_g}.$

Заменим $I_1 = K_i n_1;\ r_2 = K_i n_2;$

$$\begin{cases} \varepsilon R_2 = K_i n_1 (R_{AB} + R)(R_2 + R_1 + r_g) \\ \varepsilon R_2 = K_i n_1 (R_{AB}^{'} + R)(R_2 + R_g) \end{cases} \Rightarrow\ K_i = \frac{\varepsilon R_2}{n_2[r_g(R + R_2 + R \cdot R_2)]},$$

откуда получаем $I_2 = \dfrac{0}{96} = 0,\ \ I_3 = \dfrac{-96}{96} = -1\text{А}.$

Знак «минус» у числового значения силы тока I_3 свидетельствует о том, что при произвольном выборе направлений токов, указанных на рисунке 13, направление тока I_3 было указано противоположно истинному. На самом деле I_3 течет от узла B к узлу A.

24. Для измерения малых сопротивлений применяют двойной мост Томпсона, приведенный на рисунке 14. Вывести условие равновесия моста, если сопротивления r_1, r_2, R_1 и R_2 подобраны так, что $r_1 R_2 = r_2 R_1$.

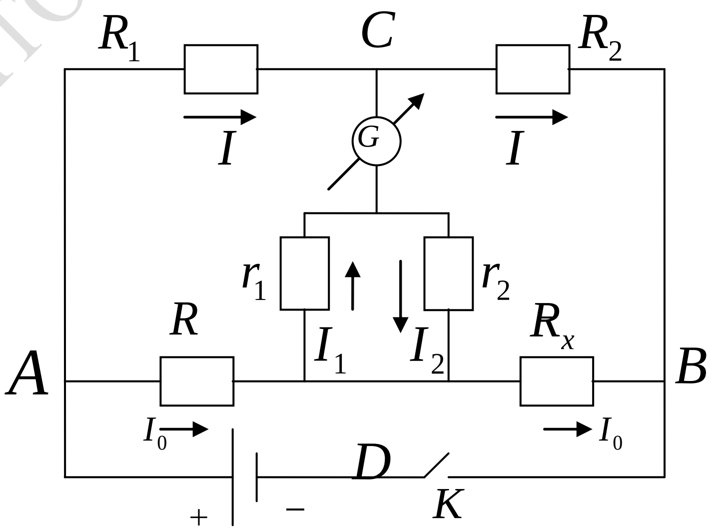

Рисунок 14

Решение. Согласно правилам Кирхгофа выбираем направления токов, учитывая, что при равновесии моста показание гальванометра равно нулю, т. е. ток между точками *C* и *D* равен нулю. Возьмем систему из двух уравнений, полученных при обходе контуров *ADCA* и *DBCD*:

$$\begin{cases} RI_0 + I_1 r_1 = R_1 I \\ R_x I_0 + I_1 r_1 = R_2 \end{cases} \Rightarrow \quad R_x = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{I - \dfrac{r_2}{R_2} \cdot I_1}{I - \dfrac{r_1}{R_1} \cdot I_1} \cdot R.$$

Так как $\dfrac{r_2}{R_2} = \dfrac{r_1}{R_1}$, то $R_x = \dfrac{R_2}{R_1} R$.

25. Элементы ε_1 и ε_2 включены в цепь, как показано на рисунке 15. Определить силы токов, текущих в сопротивлениях r_1 и r_2, если $\varepsilon_1 = 10\,\text{В}$ и $\varepsilon_2 = 4\,\text{В}$, а $r_1 = r_4 = 2\,\text{Ом}$ и $r_2 = r_3 = 4\,\text{Ом}$.

Сопротивлениями элементов пренебречь.

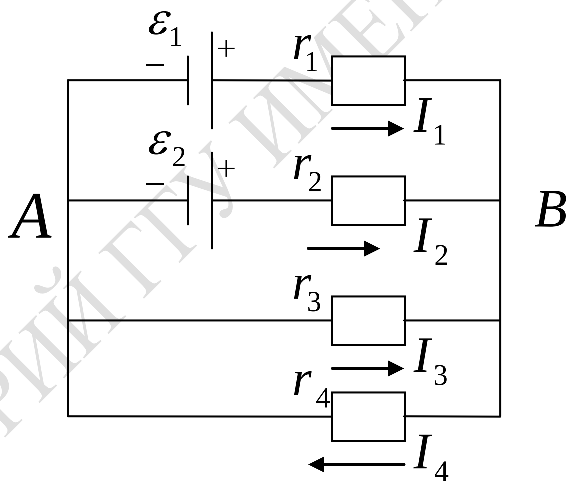

Рисунок 15

Решение. Перед составлением уравнений по правилу Кирхгофа выберем направления токов, как показано на рисунке 15, и условимся обходить контуры с током по часовой стрелке.

Рассматриваемая в задаче схема имеет два узла *A* и *B*. Но составить уравнения по первому правилу Кирхгофа следует только для одного узла, так как уравнение, составленное для второго узла, будет следствием первого уравнения.

По первому правилу Кирхгофа для узла *B* имеем:

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0.$$

Недостающие три уравнения составляем по второму правилу Кирхгофа. Контуры выбираем таким образом, чтобы в каждый новый контур входила хотя бы одна ветвь, не участвовавшая ни в одном из ранее использованных контуров:

– для контура $Ar_1 \quad Br_2 \quad A$ $\qquad I_1 r_1 - I_2 r_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$,

– для контура $Ar_1 \quad Br_2 \quad A$ $\qquad I_1 r_1 - I_3 r_3 = \varepsilon_1$,

– для контура $Ar_1 \quad Br_2 \quad A$ $\qquad I_3 r_3 - I_4 r_4 = 0.$

Подставив в эти уравнения числовые значения сопротивлений и ЭДС, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0, \\ 2I_1 - 4I_2 = 6 \\ 2I_1 - 4I_3 = 10; \qquad 4I_3 + 2I_4 = 0. \end{cases}$$

Поскольку нужно найти только два тока, то удобно воспользоваться методом определителей. С этой целью перепишем уравнения в следующем виде

$$\begin{cases} I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0 \\ 2I_1 - 4I_2 + 0 + 0 = 6 \\ 2I_1 + 0 - 4I_3 + 0 = 10 \\ 0 + 0 + 4I_3 + 2I_4 = 0. \end{cases}$$

Определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 96.$$

Искомые выражения токов находим по формуле

$$I_2 = \frac{\Delta I_2}{\Delta} \text{ и } \frac{\Delta I_3}{\Delta},$$

где Δ – определитель системы,

ΔI_2 и ΔI_3 – определители, полученные заменой соответствующих столбцов определителя Δ столбцами, составленными из свободных членов вышеприведенных уравнений:

$$\Delta I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 6 & 0 \\ 2 & 10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -96.$$

26. Какое количество электричества переносится за время $\tau = 10\,\text{с}$, если сила тока убывает от 18 А до нуля, причем за каждую $\tau_1 = 0{,}01\,\text{с}$ сила тока убывает вдвое.

Решение. Согласно условию задачи скорость изменения тока со временем пропорциональна току в момент его изменения: $\frac{dI}{dt} = -CI$, отсюда $\frac{dI}{I} = -Cdt;$ $\ln I = -ct + \ln\alpha$. Потенцируя, получим $I = d \cdot \exp^{-ct}$.

При $t = 0,$ $I = I_0 = \alpha.$ $I = I_0 \exp^{-ct}$.

При $t = \tau,$ $\frac{I}{I_0} = \frac{1}{2} = \exp^{-c\tau}$, откуда $c = \frac{\ln 2}{\tau}$ и окончательно $I = I_0 \exp^{\frac{-\ln 2}{\tau} \cdot t}$,

искомое количество электричества: $q = \int_0^\infty I_0 \exp^{\frac{-\ln 2}{\tau} \cdot t} dt = \frac{I_0 \tau}{\ln 2} = 0{,}26\,\text{Кл}.$

27. Две квадратные пластины со стороной *d* расположены на расстоянии *l* друг от друга, образуют плоский конденсатор, подключенный к источнику постоянного напряжения *U*. Расположенные вертикально пластины погружают в сосуд с керосином со скоростью ϑ. Найти силу тока, текущего при этом по подводящим проводам.

Решение. $i_{\text{пр}} = i_{\text{кер}} - i_{\text{вод}}$;

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_k a \vartheta dt}{l} \\ e &= \frac{q}{U} = \frac{i_{кер} dt}{U} \end{aligned}\right. \Rightarrow \quad i_{кер} = \frac{U \cdot a}{l} \varepsilon_0 \varepsilon_k \vartheta.$$

Аналогично находим силу тока в воздухе : $i_{вод} = \frac{U \cdot a}{l} \varepsilon_0 \vartheta$,

$$i_{пр} = \frac{U \cdot a}{l} \varepsilon_0 \vartheta(\varepsilon_к - 1).$$

28. Зазор между обкладками плоского конденсатора заполнен изотропным диэлектриком, удельная электропроводность которого изменяется в направлении, перпендикулярном к пластинам по линейному закону от τ_1 до τ_2. Найти ток утечки, если к конденсатору приложено напряжение *U*. Площадь обкладок *S* , расстояние между ними *l*.

Решение. $\sigma = K_x + b$, при $x = 0,\ \sigma_1 = b,$

при $x = l,\ \sigma_2 = Kl + \tau\sigma_1^x \Rightarrow K = \dfrac{\sigma_2 - \sigma_1}{l}$;

Согласно закону Ома $j = \sigma E = \sigma \dfrac{dU}{dx} = \left(\dfrac{\sigma_2 - \sigma_1}{l} x + \sigma_1 \right) \dfrac{dU}{dx}.$

Сила тока $i = jS$,

$$i = \frac{S(\sigma_2 - \sigma_1)X + lS\sigma_1}{l} \cdot \frac{dU}{dx};$$

$$\frac{li}{S} \int_0^l \frac{dx}{(\sigma_2 - \sigma_1)x + l\sigma_1} = \int_0^U dU; \quad i = \frac{US}{l} \cdot \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1}}.$$

29. Радиусы обкладок сферического конденсатора равны *a* и *b(a < b)*. Пространство между обкладками заполнено однородным изотропным веществом с диэлектрической проницаемостью ε и удельной электропроводностью σ. Первоначально конденсатор не заряжен. Затем внутренней обкладке сообщается заряд q_0. Найти: 1) закон изменения заряда *q* на внутренней обкладке; 2) количество тепла *Q*, выделившегося при протекании заряда. Сравнить *Q* с изменением электрической энергии конденсатора.

Решение. 1. Ток через поверхность радиуса $r\,(a \le r \le b)$

$$i(r) = 4\pi r^2 j(r) = 4\pi r^2 \sigma E(r),$$

где $E(r) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q(r)}{r^2}.$

С другой стороны, $i = \dfrac{-dq(r)}{dt}$, тогда

$$\frac{dq(r)}{dt} = -4\pi r^2 \sigma \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{q(r)}{r^2};$$

$$\int_{q_0}^{q} \frac{dq}{q} = -\int_0^t \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} dt; \quad q(r) = q_0 \exp\left(-\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} t\right).$$

2. Количество выделившегося тепла находим по закону Джоуля–Ленца $Q = \int_0^\infty l^2 R dt$, где R – сопротивление сферического конденсатора.

$$R = \frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right); \quad i = \frac{\sigma q_0}{\varepsilon\varepsilon_0} \exp\left(-\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} t\right).$$

Окончательно

$$Q = \frac{q_0^{\ 2}}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

30. Зазор между обкладками плоского конденсатора заполнен веществом с относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 7{,}00$ и удельным сопротивлением $\rho = 1 \cdot 100 \cdot 10^{11}$ Ом·м. Ёмкость конденсатора $C = 3\,000$ пФ. Найти ток утечки через конденсатор при подаче на него напряжения $U = 2\,000$ В.

Решение.

Ёмкость конденсатора $C = \varepsilon\varepsilon_0 \dfrac{S}{d}$, откуда $\dfrac{d}{S} = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0}{C}$.

Сопротивление конденсатора $R = \rho \dfrac{d}{S} = \rho \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0}{C}$.

Силу тока определяем по закону Ома $I = \dfrac{U}{R} = \dfrac{UC}{\rho\varepsilon\varepsilon_0} = 0{,}97$ мА.

Контрольные задания

1. Вольфрам имеет положительный температурный коэффициент сопротивления, а уголь – отрицательный. Сравните, как изменяется ток в лампах с вольфрамовым и с угольным волоском при их включении.

2. Покажите, что если на участке цепи с сопротивлением R, по которому идет ток I, возникают какие-то другие эффекты, кроме нагревания

проводников, то мощность, потребляемая от источника тока, не может быть рассчитана по формуле $P = UJ$, где U – разность потенциалов на рассматриваемом участке.

3. Почему сопротивление амперметра должно быть мало по сравнению с сопротивлением цепи, а сопротивление вольтметра велико по сравнению с сопротивлением участка, на котором измеряется напряжение?

4. Изобразите графически зависимости от внешнего сопротивления полезной мощности, полной мощности в цепи, мощности, рассеивающейся внутри источника, и КПД источника.

5. В каком случае источники выгодно включать в цепь последовательно и в каком параллельно?

6. Нужно измерить неизвестное сопротивление R_x. Как это сделать, если имеется источник ε, вольтметр и амперметр, но внутренние сопротивления источника и измерительных приборов неизвестны?

7. При возникновении электрического тока в какой-либо цепи суммарный механический импульс электронов отличен от нуля $\vec{p} = \sum \vec{p}_i > 0$. Сохраняется ли при этом закон сохранения импульса?

2 ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В МЕТАЛЛАХ, ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ

2.1 Применение основных законов для решения задач

Следует запомнить, что носителями электрического тока в рассматриваемых электропроводящих средах являются различные заряженные частицы. В металлах ими являются свободные электроны, в жидкостях – положительно и отрицательно заряженные ионы, в газах – электроны и ионы.

Плотность тока $\vec{j}$ определяется соотношением

$$\vec{j} = \vec{j}_+ + \vec{j}_- = q^+ n^+ \vec{U}^+ + q^- n^- \vec{U}^-, \tag{14}$$

где q^+ и q^- – величины зарядов носителей тока,

n^+ и n^- – их концентрации,

$\vec{U}^+$ и $\vec{U}^-$ – средние скорости направленного движения (дрейфа) носителей.

Необходимо помнить, что плотность электрического тока в рассматриваемой точке среды связана с напряженностью электрического поля $\vec{E}$ в этой же точке соотношением $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ (см. формулу(2)), где σ – удельная электропроводность среды. Для металлов

$$\sigma = \frac{ne^2}{2m}\tau = \frac{ne^2}{2m}\frac{\lambda}{\vartheta}, \tag{15}$$

где e и m – заряд и масса электрона,

n – концентрация свободных электронов в металле,

τ, λ – среднее время и средняя длина свободного пробега электрона,

ϑ – средняя арифметическая скорость теплового движения электронов.

Для жидкостей

$$\sigma = n^+ q^+ U_0{}^+ + n^- q^- U_0{}^-, \tag{16}$$

где q^+ и q^- – алгебраическая величина зарядов ионов,

n^+ и n^- – их концентрация,

$U_0{}^+$ и $U_0{}^-$ – подвижности ионов разных знаков.

У электролитов, растворы которых электронейтральны, $q^+ n^+ + q^- n^- = 0$ и

$$\sigma = \alpha \cdot n \cdot e \cdot z(\mathrm{U}_0{}^+ + \mathrm{U}_0{}^-), \tag{17}$$

где α – коэффициент диссоциации,

n – концентрация растворенного вещества,

z – валентность иона.

Обратите внимание, что при прохождении электрического тока через электролит имеет место выделение вещества на электродах, причем масса выделившегося вещества m оказывается пропорциональной величине электрического заряда Q, прошедшего через раствор:

$$m = KQ = KIt, \tag{18}$$

где I – сила тока,

t – длительность его прохождения,

K – электрохимический эквивалент вещества – масса, выделяемая на электроде при прохождении заряда, равного единице.

Заметьте, что электрохимический эквивалент вещества пропорционален его химическому эквиваленту-заряду, переносимому одним килограмм-эквивалентом вещества:

$$K = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{Z}, \tag{19}$$

где F – число Фарадея $\left(F = 9.648 \cdot 10^7 \frac{\text{Кл}}{\text{кг-экв}} \right)$,

A – атомная масса элемента.

Указанные выше законы электролиза (18) и (19) часто объединяют в один, который удобно применять при решении различных задач:

$$m = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{Z} It. \tag{20}$$

Следует запомнить, что для того чтобы в газе проходил электрический ток (происходил газовый разряд), необходимо газ ионизировать, т. е. оторвать электрон от молекулы газа. Работа ионизации

$$A_i = e\varphi_i,$$

где e – заряд электрона,

φ_i – потенциал ионизации.

Ионизировать газ можно, воздействуя на него электрическим полем, корпускулярным или электромагнитным излучением, путем повышения его температуры, с помощью ударной ионизации (бомбардировкой молекул газа быстрыми электронами или ионами).

Количество пар ионов в газе n_0 при непрерывно действующем ионизаторе в условиях полного равновесия определяется как $n = \sqrt{\frac{N}{\beta}}$, где N – число пар ионов, образующихся ежесекундно в единице объема (мощность ионизатора), β – коэффициент рекомбинации.

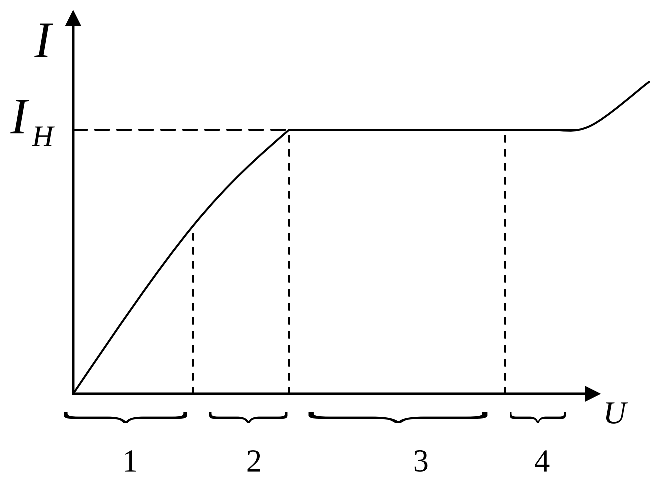

Рисунок 16

Обратите внимание на зависимость силы тока I от напряжения U между электродами при несамостоятельном (происходящем только при действии внешнего ионизатора) разряде (рисунок 16). В первой области кривой, т. е. при небольших напряжениях

$$\vec{j} = en_0 (U_0{}^{+} + U_0{}^{-}), \tag{21}$$

где n_0– число пар противоположно заряженных частиц в единице объема,

$U_0{}^{+}$ *и* $U_0{}^{-}$ подвижности положительно и отрицательно заряженных ионов.

Ток насыщения

$$I_{н} = eN_0 ,$$

где N_0 – максимальное число пар одновалентных ионов, образующихся в объеме газа в единицу времени при данной интенсивности ионизации.

Плотность тока насыщения

$$j = 2eNh \ ,$$

где N – мощность излучения,

h – расстояние между пластинами электродов.

При самостоятельном разряде, который продолжается после прекращения действия внешнего ионизатора, ионы образуются за счет процессов, происходящих в самом газе (ударная ионизация). Разновидностями газового разряда являются: тлеющий, дуговой, искровой, коронный.

Заметьте, для первых двух типов газового разряда характерно наличие в межэлектродном промежутке газоразрядной плазмы – состояния ионизированного газа, при котором объемные плотности положительных и отрицательных зарядов практически одинаковы. Для существования плазмы необходимо, чтобы линейные размеры L – системы заряженных частиц значительно превосходили дебаевскую длину D (дебаевский радиус), определяемую соотношением

$$D = \sqrt{\frac{KT\varepsilon_0}{ne^2}} ,$$

где K – постоянная Больцмана,

T – абсолютная температура,

e – заряд электрона,

n – концентрация заряженных частиц.

Обратите внимание на следующие основные свойства плазмы:

а) высокая электропроводность, обусловливающая сильное взаимодействие плазмы с внешними магнитными и электрическими полями;

б) специфическое коллективное взаимодействие частиц плазмы, приводящее к достаточно легкому возбуждению и распространению в ней различного рода колебаний и волн;

в) частота плазменных колебаний ω_p определяется соотношением

$$\omega_p = \sqrt{\frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m}}, \tag{22}$$

где e и m – заряд и масса электрона,

n_e – их концентрация.

Контрольные вопросы

1. Как плотность тока в среде связана со средней скоростью упорядоченного движения носителей заряда и их концентрацией?
2. Запишите выражение для удельной электропроводности для металлов и жидкостей.
3. Как зависит удельная электропроводность металлов и электролитов от температуры?
4. Что такое подвижность ионов?
5. Сформулируйте и запишите законы электролиза Фарадея. Каков физический смысл величин, входящих в эти законы?
6. Что такое работа ионизации? Чему она равна?
7. Как зависит сила тока от напряжения в области несамостоятельного газового разряда?
8. Чему равняется плотность тока насыщения?
9. Чему равно число пар ионов, рекомбинирующих за 1 с в 1 см^3 газа:

а) свободного от пылинок;

б) содержащего частицы пыли?

2.2 Примеры задач и методы их решения

31. Определить коэффициент диссоциации водного раствора хлористого калия (KCl) с концентрацией $C = 0{,}10\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$. Удельное сопротивле-

ние такого раствора $\rho = 7{,}4 \cdot 10^{-2}$ Ом·м при 18^{o}C, а подвижность ионов K^{+}и CL^{-} при этой температуре соответственно равна: $U_{+} = 6{,}7 \cdot 10^{-8}\,\dfrac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$, $U_{-} = 6{,}8 \cdot 10^{-8}\,\dfrac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$.

Решение. Для определения коэффициента диссоциации электролита воспользуемся выражением

$$\rho = \frac{1}{q \cdot \alpha \cdot n_0 (U_{+} + U_{-})},$$

где q – абсолютное значение заряда каждого иона.

Для K^{+}и CL^{-}, $q = e$, $n_0 = \dfrac{N}{\upsilon}$. Концентрация раствора $C = \dfrac{m}{\upsilon}$, тогда $n_0 = \dfrac{CN}{m}$, $N = N_A \upsilon = N_A \dfrac{m}{\mu}$, $n_0 = \dfrac{CN_A}{\mu}$, $\rho = \dfrac{\mu}{e \cdot \alpha \cdot C \cdot N_A (U_{+} + U_{-})}$,

откуда $\alpha = \dfrac{\mu}{e \cdot \rho \cdot C \cdot N_A (U_{+} + U_{-})}$; $\mu = 0{,}074\,\dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$; $\alpha = 0{,}8$.

32. Термопара железо–константан и гальванометр соединены последовательно и включены между точкой A и движком C потенциометра (рисунок 17). На потенциометр подано напряжение от аккумулятора с ЭДС, $\varepsilon = 2$ В. Полное сопротивление потенциометра $R = 10^4$ Ом. Холодный спай термопары помещен в сосуд Дьюара с тающим льдом. Какова температура горячего спая термопары, если ток в цепи гальванометра равен нулю при таком положении движка, когда сопротивление части потенциометра AC равно $R_1 = 132{,}5$ Ом? Сопротивление аккумулятора и подводящих проводов пренебрежимо мало.

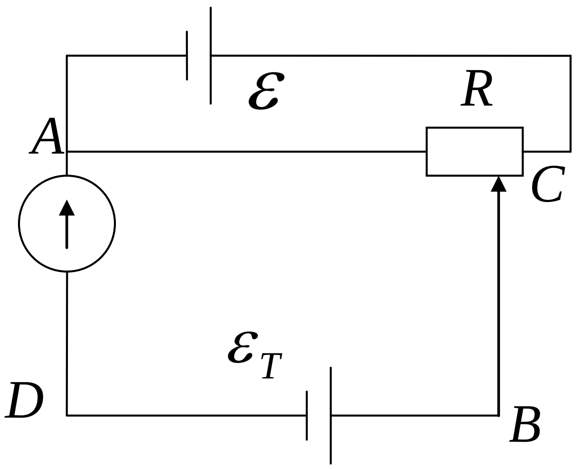

Рисунок 17

Решение. $\varepsilon_T = \beta(T_1 - T_2)$,

где β – постоянная термоЭДС.

Рассмотрим контур *ACDB*. Если ток в гальванометре равен нулю, то это значит, что разность потенциалов на участке *AC* компенсируется термоЭДС термопары.

Из таблиц $\beta = 50{,}4 \cdot 10^{-6}\ \dfrac{B}{K}$, $\quad T_1 = T_2 + \dfrac{\varepsilon R_1}{\beta R_1} = 349{,}4\,K.$

33. Катушка, содержащая $n =$ 590 витков медного провода диаметром $d_1 =$ 0,3 мм, вращается вокруг своей оси ($\nu = 33$ оборота в секунду). Диаметр витков катушки $d_1 =$ 14 см. Концы катушки соединены с баллистическим гальванометром, сопротивление которого $R_0 = 130$ Ом. При резком торможении катушки гальванометр дает отброс. Какое количество электричества пройдет по цепи при торможении катушки?

Решение. Пока катушка вращается, электроны в проволоке имеют скорость упорядоченного движения, равную линейной скорости проволоки катушки, удаленной от оси вращения на радиус витков катушки:

$$V_0 = 2\pi\nu \frac{d^2}{2}.$$

При торможении катушки электроны некоторое время продолжают двигаться по инерции, в результате чего в проводнике возникает импульс тока и переносится некоторый заряд $q = \int_0^t i dt$. При торможении электроны относительно проводника приобретают ускорение $\dfrac{dv}{dt}$. Такое же ускорение можно сообщить электронам в неподвижном проводнике, если создать в нем электрическое поле, т. е. приложить к концам проводника длиной *l* разность потенциалов $U = lE = -l\dfrac{m}{e}\cdot\dfrac{dV}{dt}$. В этом случае по проводнику течет ток $i = \dfrac{U}{R}$, тогда $q = -\int_0^t \dfrac{lmdV}{\mathrm{Re}\,dt}dt = -\int_{\vartheta_0}^0 \dfrac{lm}{\mathrm{Re}}dV = \dfrac{m}{e}\cdot\dfrac{lV_0}{R}$.

Длину проводника *l*, его сопротивление *R* определим из условия задачи:

$$l = \pi n d_2,\ R = R_0 + \rho\frac{\pi n d_2 4}{\pi d_1^{\ 2}}.$$

Окончательно $q=\frac{m}{e}\cdot\frac{nd_2{}^2\pi^2 f}{R_0+4\rho\frac{nd_2}{d_1{}^2}}=1{,}1\cdot10^{-10}$ Кл.

34. К электродам электролитической ванны приложена разность потенциалов *U*, которая поддерживается постоянной, сопротивление электролита меняется с температурой по закону $R(T)=\frac{R_0}{1+\alpha T}$. Количество теплоты, отдаваемое единицей поверхности электролита за единицу времени, $q=K(T-T_0)$, где K-const, *T* – температура окружающей среды. Поверхность электролита *S*, массу электролита *m* и его удельную теплоемкость *C* считать неизменными. Найти закон изменения температуры со временем, если в начальный момент температура электролита равна T_0 .

Решение. Допустим, что в произвольный момент времени *t* температура *T*. За время *dt* в электролите выделится количеству теплоты

$$dQ=\frac{U^2}{R(T)}dt.$$

Это количество теплоты расходуется на теплоотдачу через поверхность и на нагревание электролита.

$$\frac{U^2}{R(T)}dt=q\cdot S\cdot dt+C\cdot m\cdot dT,$$

или

$$\frac{U^2(1+\alpha T)}{R_0}dt=K(T-T_0)S\cdot dt+C\cdot m\cdot dt.$$

$$\frac{dT}{\left(\frac{U^2}{R_0}+KST_0\right)+\left(\alpha\frac{U^2}{R_0}-KS\right)T}=\frac{dt}{Cm}.$$

Проинтегрировав его, получим

$$\frac{1}{\alpha\frac{\mathrm{U}^2}{R_0}-KS}\ln\left[\frac{\mathrm{U}^2}{R_0}+KST_0+\left(\alpha\frac{\mathrm{U}^2}{R_0}-KS\right)T\right]=\frac{t}{Cm}+\mathrm{const}.$$

Постоянную интегрирования найдем из начального условия: $t=0,\ T=T_0$.

После нахождения постоянной и потенцирования

$$\frac{\left(\frac{U^2}{R_0}+KST_0\right)+\left(\frac{\alpha U^2}{R_0}-KS\right)}{\frac{U^2}{R_0}\cdot(1+\alpha T_0)}=e^{-\frac{KS-\frac{\alpha U^2}{R_0}}{Cm}t},$$

откуда

$$T=\frac{1}{KS-\frac{\alpha U^2}{R_0}}\left\{\frac{U^2}{R_0}+KST_0-\frac{U^2}{R_0}(1+\alpha T_0)e^{-\frac{KS-\frac{\alpha U^2}{R_0}}{Cm}t}\right\}.$$

Из полученного результата видно:

1) $U=0,\ T=T_0$;

2) $KS>\frac{\alpha U^2}{R_0}$ – температура электролита увеличивается, приближаясь асимптотически к установившемуся значению;

3) $KS=\frac{\alpha U^2}{R_0},\ T=T_0$;

4) $KS<\frac{\alpha U^2}{R_0}$, температура электролита неограниченно растет со временем.

35. Реакция образования воды из водорода и кислорода происходит с выделением тепла: $2H_2+O_2=2H_2O+5,75\cdot10^5$ Дж. Найти наименьшую разность потенциалов U, при которой будет происходить разложение воды электролизом.

Решение. Энергия, необходимая для выделения массы вещества при электролизе,

$$W=IUt=\frac{mUZF}{A},$$

где F – постоянная Фарадея,

A – молярная масса,

Z – валентность,

U – приложенная разность потенциалов.

Чтобы разложить υ = 2 моль воды, т. е. чтобы выделить $m =$ 4 г водорода, требуется $5{,}75 \cdot 10^5$ Дж энергии. Таким образом, у нас $m =$ 4 г, W = $5{,}75 \cdot 10^5$ Дж. Подставим эти данные: $U = \dfrac{WA}{mZF} = 1{,}5$ В.

36. Найти эквивалентную проводимость σ для очень слабого раствора азотной кислоты.

Решение. Можно считать, что в слабых растворах все молекулы диссоциированы. Следовательно, эквивалентная проводимость $\sigma = F(U_+ + U_-)$.

Подставляя числовые данные: $F = 9{,}65 \cdot 10^4 \dfrac{\text{Кл}}{\text{моль}}$, $U_+ = 3{,}26 \cdot 10^{-7} \dfrac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$ и $U_- = 0{,}64 \cdot 10^{-7} \dfrac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$, получим $\sigma = 37{,}6 \cdot 10^{-3} \dfrac{\text{м}^2}{\text{Ом} \cdot \text{моль}}$.

37. Через водный раствор соляной кислоты пропускают электрический ток 0,5А в течение 2 мин. Найдите массу образующегося при этом гремучего газа.

Решение. Масса гремучего газа равна сумме масс водорода $H_2(m_2)$ и кислорода $O_2(m_2)$, $m = m_1 + m_2$.

По закону Фарадея:

$$m_1 = \frac{1}{F} \cdot \frac{A_1}{Z_1} It,\ m_2 = \frac{1}{F} \cdot \frac{A_2}{Z_2} It,\ m = \frac{It}{F}\left(\frac{A_1}{Z_1} + \frac{A_2}{Z_2}\right);\ F = 9{,}65 \cdot 10^7 \ \frac{\text{Кл}}{\text{кг} \cdot \text{экв}};$$

$$A_1 = 1 \frac{\text{кг}}{\text{кмоль}};\ A_2 = 16 \frac{\text{кг}}{\text{кмоль}};\ n_1 = 1;\ n_2 = 2;\ m = 5{,}8 \cdot 10^{-6} \text{ кг}.$$

38. Атом кислорода однократно ионизируется ударом положительных ионов, имеющих заряд электрона. Какова наименьшая разность потенциалов, которую прошел ион, вызвавший ионизацию, если его масса вместе с «прилипшими» молекулами в четыре раза больше массы атомов кислорода?

Решение. Скорость теплового движения во много раз меньше скорости ионизирующей частицы, поэтому можно считать, что до удара атом неподвижен.

Ион массой m в электрическом поле приобретает энергию

$$e \cdot \Delta\varphi = \frac{m\vartheta^2}{2}.$$

После неупругого соударения иона с атомом кислорода оба иона движутся с одинаковой скоростью. Применим закон сохранения импульса $m\vartheta = (m+M)\vartheta_1$, откуда $\vartheta_1 = \frac{m\vartheta}{m+M}$.

По закону сохранения и превращения энергии $\frac{m\vartheta^2}{2} = A_u + \frac{(m+M)\vartheta_1^2}{2}$,

$$\frac{m\vartheta^2}{2} = A_u + \frac{(m+M)m^2\vartheta^2}{2(m+M)^2}; \quad \frac{m\vartheta^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{m}{m+M}\right) = A_u;$$

или

$$\frac{m\vartheta^2}{2} = A_u\left(1 + \frac{m}{M}\right); \quad \frac{m}{M} = 4; \; e \cdot \Delta\varphi = A_u(1+4);$$

$A_u = 13{,}56$ эВ; $\Delta\varphi = 67{,}8$ В.

39. Между пластинами конденсатора площадью $250\ \text{см}^2$ каждая находится $375\ \text{см}^3$ водорода. Концентрация ионов в газе $5{,}3 \cdot 10^7\ \text{см}^3$. Какое напряжение нужно приложить к пластинам, чтобы получить ток силой 2 мА? Подвижнось ионов: положительных $U_+ = 5{,}4\ \frac{\text{см}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$, отрицательных $U_- = 7{,}4\ \frac{\text{см}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$.

Решение. Напряжение U на пластинах конденсатора $U = E \cdot d$.
Плотность тока $j = en_0(U_+ + U_-)E$,

откуда $E = \frac{j}{en_0(U_+ + U_-)} = \frac{I}{\ln_0(U_+ + U_-)S}$, $\quad d = \frac{V}{S}$,

где V – объем пространства.

Окончательное напряжение: $U = \frac{JV}{en_0(U_+ + U_-)S^2}$.

Производим вычисления:

$$U = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 3{,}75 \cdot 10^{-4}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 5{,}3 \cdot 10^{13}(5{,}4 + 7{,}4) \cdot 10^4 \cdot 6{,}25 \cdot 10^{-4}} = 110\ \text{В}.$$

40. Найти закон убывания ионов в газе после прекращения действия ионизатора, если скорость убывания их пропорциональна как числу отрицательных n_-, так и числу положительных n_+ ионов в единице объема, причем $n_- = n_+ = n$. В начальный момент после прекращения действия ионизатора $n = n_0$.

Решение. Число ионов, пропадающих в единицу времени,

$$-\frac{dn}{dt} = \beta n^2,$$

где β – коэффициент рекомбинации.

$$-\frac{dn}{n^2} = \beta dt; \quad -\int_{n_0}^{n} \frac{dn}{n^2} = \beta \int_0^t dt,$$

Откуда $n = \dfrac{n_0}{1 + \beta n_0 t}$.

41. Площадь электродов ионизационной камеры $S = 100$ см^2, расстояние между ними d = 6,5 см. Ионизатор образует в 1 см^3 ежесекундно $N = 10^9$ одновалентных ионов каждого знака. Коэффициент рекомбинации $\beta = 10^{-6}$ см^3 $\cdot$ с$^{-1}$. Подвижность ионов $U_+ = U_- = 1 \dfrac{\text{см}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$.

Какое наибольшее возможное число пар ионов в 1 см^3 камеры? Какой ток пойдет между электродами ионизационной камеры, если приложена разность потенциалов 20 В? Какую долю тока насыщения составляет найденный ток? Через сколько времени после прекращения действия ионизатора число ионов вследствие рекомбинации уменьшится вдвое?

Решение. Наибольшее возможное число пар ионов в 1 см^3 камеры получится при условии, что убывание ионов происходит только за счет их рекомбинации. При наличии равновесия

$$N = \beta n_0^{\,2} \Rightarrow n_0 = \sqrt{\frac{N}{\beta}}.$$

Сила тока в отсутствие насыщения равна:

$$J = n_0 e(U_+ + U_-)ES = \sqrt{\frac{N}{\beta}} e(U_+ + U_-) \frac{\Delta\varphi}{d} S.$$

При наличии насыщения $J_H = eNdS$ $J_H = eNdS$.

Обозначим через dn число ионов, нейтрализующихся вследствие рекомбинации за малый промежуток времени dt, тогда число ионов, пропадающих в единицу времени,

$$\frac{dn}{dt} = -\beta n^2,$$

или $\beta dt = -\frac{dn}{n}$; $\beta\int_0^t dt = -\int_{n_0}^{n} \frac{dn}{n^2}$; $t = \frac{n_0 - n}{n_0 n' \beta}$;

$n_0 = 3{,}2 \cdot 10^7$ см$^{-3}$;

$J = 3{,}3 \cdot 10^{-9}$ А; $\frac{J}{J_H} = 34 \cdot 10^{-3}$; $t = 0{,}03$с.

Контрольные задания

1. Если приближать отрицательно заряженную палочку к накаленной нити электрической лампочки, то нить притягивается к палочке. Когда же приближается положительно заряженная палочка, то нить остается без движения и притягивается лишь в момент удаления положительного заряда. Однако, если накал нити очень слабый, то она притягивается и к положительному, и к отрицательному зарядам. В случае же сильного накала нить остается в покое при приближении любого заряда.

Объясните эти явления, принимая во внимание явление термоэлектронной эмиссии, а также то обстоятельство, что внутри лампы имеется некоторое количество газа.

2. Почему необходимо сообщать дополнительную энергию электронам для их выхода из металла?

3. В каком направлении пойдет ток в горячем спае в термопаре железо-константан?

4. Плотность тока насыщения двухэлектродной электронной лампы при температуре катода T_1 равна j_1, а при $T_2 = j_2$. Можно ли по этим данным определить, из какого металла сделан катод?

5. При электролизе положительные и отрицательные ионы непрерывно нейтрализуются на соответствующих электродах. Почему же концентрация ионов в электролите остается постоянной?

6. Предполагая, что подвижность ионов в электролитах одинакова, можно считать, что положительные ионы переносят в одну сторону ежесекундно заряд $+q$, а отрицательные – в противоположную сторону заряд $-q$. Какому количеству электричества соответствует масса отложившегося на электродах вещества?

7. Какие важнейшие свойства плазмы?

ЛИТЕРАТУРА

1. Матвеев, А. Н. Электричество / А. Н. Матвеев. – М. : Высшая школа, 1987. – 360 с.
2. Сивухин, Д. В. Общий курс физики : в 3 т. Т. 3. Электричество / Д. В. Сивухин. – М. : Высшая школа, 1989. – 520 с.
3. Савельев, И. В. Курс общей физики : учеб. пособие : в 3 т. Т. 2. Электричество / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1973. – 528 с.
4. Калашников, С. Г. Электричество / С. Г. Калашников. – М. : Наука, 1985. – 530 с.
5. Иродов, И. Е. Основные законы электромагнетизма : учеб. пособие для вузов / И. Е. Иродов. – М. : Высшая школа, 1983. – 279 с.

Производственно-практическое издание

Желонкина Тамара Петровна,
Лукашевич Светлана Анатольевна,
Федосенко Елена Аркадьевна

ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Практическое пособие

Редактор *В. И. Шкредова*
Корректор *В. В. Калугина*

Подписано в печать 15.06.2020. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 2,8.
Уч.-изд. л. 3,1. Тираж 25 экз. Заказ 269.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013.
Ул. Советская, 104, 246019, Гомель.