Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (120), 2020

УДК 519.872

Нахождение ожидаемого дохода открытой сети с ограниченным числом заявок и обходами ими систем обслуживания

Д.Я. Копать, М.А. Маталыцкий

Объектом исследования в статье является открытая марковская сеть массового обслуживания (СеМО) с ограниченным числом заявок, обходами ими систем обслуживания и доходами. Параметры обслуживания сети постоянны, маршрут заявок определяется в соответствии с матрицей вероятностей переходов. Дисциплина обслуживания заявок – FIFO. Состояние сети описывается цепью Маркова с непрерывным временем и конечным числом состояний. С помощью асимптотического анализа при большом числе заявок найден полный ожидаемый доход в такой сети. Для этого выведено и решено дифференциальное уравнение в частных производных для плотности распределения ожидаемого дохода исследуемой сети. Получено и решено обыкновенное дифференциальное уравнение для ожидаемого дохода сети, рассчитан модельный пример.
Ключевые слова: ожидаемый доход, асимптотический анализ, обход систем обслуживания, плотность распределения.

The object of research in this article is an open Markov queueing network (QN) with a limited number of customers, bypassing service systems and revenue. The network service parameters are constant, the route of customers is determined in accordance with the matrix of transition probabilities. The discipline of service customers – FIFO. The network state is described by a Markov chain with continuous time and a finite number of states. Using an asymptotic analysis with a large number of customers, the full expected income in such a network was found. For this, a partial differential equation for the distribution density of the expected income of the network under study is derived. An ordinary differential equation for the expected network income is obtained and solved, a model example is calculated.
Keywords: expected revenue, asymptotic analysis, bypass service systems, density distribution.

1. Введение. Описание сети. СеМО с обходами узлов заявками введена в работе [1]. В ней показано, что такая модель включает возможность обхода систем за счет ограничений на количество заявок или на предполагаемое время ожидания. Найдены стационарные вероятности состояний сети в форме произведения. В переходном режиме сеть с обходами была исследована методом многомерных производящих функций в работе [2]. Выражения для ожидаемых доходов такой сети, когда доходы от переходов являются случайными величинами (СВ), были получены в статье [3]. Средние характеристики для сети с обходами с помощью асимптотического анализа были найдены в статье [4]. Применение сети с обходами связано с возможностью клиента, прибывшего в сервисный центр информационной сети, не присоединяться к очереди по тем или иным причинам, а перейти в другой сервисный центр. В данной статье с помощью асимптотического анализа найден ожидаемый доход сети с обходами систем обслуживания (СМО) и доходами.

Рассмотрим открытую экспоненциальную СеМО с однотипными заявками, состоящую из *n* однолинейных СМО. Состояние сети в момент времени *t* описывается вектором размерности *n* + 1: $\vec{k}(t)=\left(\vec{k},t\right)=\left(k_1,k_2,...,k_n,t\right)$, который образует цепь Маркова с непрерывным временем и счетным числом состояний, где состояние $\left(k_i,t\right)$ означает, что в момент времени *t* в *i*-й СМО находятся k_i заявок, $i=\overline{1,\ n}$.

В *i*-ю систему из внешней среды поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ_{0i}, $i=\overline{1,\ n}$. Все потоки заявок, которые поступают в сеть, независимы. Длительности обслуживания заявок в *i*-ой СМО распределены по показательному закону с параметром μ_i, $i=\overline{1,\ n}$.

Заявка, направленная в *i*-ю СМО извне или из другой системы, когда сеть находится в состоянии *k*, с вероятностью $f^{(i)}(k_i)$, где k_i – число заявок в *i*-й СМО, присоединяется к очереди, а с дополнительной вероятностью $1-f^{(i)}(k_i)$ не присоединяется к очереди, считаясь мгновенно обслуженной (т. е. обходит СМО).

Заявка, обслуженная в СМО S_i, с вероятностью p_{ij} направляется в СМО S_j и с вероятностью $\sum_{j=0}^{n} p_{ij}=1$ уходит из сети (в СМО S_0), $i,\ j=\overline{1,\ n}$. Введём следующие условные вероятности.

Пусть $\phi_i\left(\vec{k}\right)$ – условная вероятность того, что заявка, поступающая в *i*-ю СМО, когда сеть находится в состоянии $\vec{k}$, не будет обслужена ни одной из СМО и не изменит состояние сети; $\psi_{ij}\left(\vec{k}\right)$ – условная вероятность того, что заявка, поступающая в *i*-ю СМО, когда сеть находится в состоянии $\vec{k}$, впервые получит обслуживание в *j*-ой СМО, $j=\overline{1,n}$; $\alpha_i\left(\vec{k}\right)$ – условная вероятность того, что заявка, обслуженная в *i*-й СМО завершено, когда сеть находится в состоянии $\vec{k}$ не будет больше обслужена ни в одной из СМО и уйдёт из сети; $\beta_{ij}\left(\vec{k}\right)$ – условная вероятность того, что заявка, обслуживание которой в *i*-й СМО завершено, когда сеть находится в состоянии $\vec{k}$, впервые после этого получит обслуживание в *j*-й СМО, $i,\ j=\overline{1,n}$.

На основании формулы полной вероятности получаем [1], что:

$$\phi_i\left(\vec{k}\right)=\left(1-f^{(i)}(\vec{k})\right)\left(p_{i0}+\sum_{j=1}^{n}p_{ij}\phi_j\left(\vec{k}\right)\right),\ i=\overline{1,n}, \tag{1}$$

$$\psi_{ij}\left(\vec{k}\right)=f^{(i)}(\vec{k})\delta_{ij}+(1-f^{(i)}(\vec{k}))\sum_{l=1}^{n}p_{il}\psi_{lj}\left(\vec{k}\right),\ i,j=\overline{1,n}, \tag{2}$$

$$\alpha_i\left(\vec{k}\right)=p_{i0}+\sum_{j=1}^{n}\left[p_{ij}\phi_j\left(\vec{k}-I_i\right)\right],\ \beta_{ij}\left(\vec{k}\right)=\sum_{l=1}^{n}p_{il}\psi_{lj}\left(\vec{k}-I_i\right),\ i,j=\overline{1,n}, \tag{3}$$

где I_i – нулевой вектор размерности n, за исключением компоненты с номером *i*, которая равна 1, $u(x)$ – единичная функция Хевисайда, $u(x)=\begin{cases}1, x>0,\\ 0, x\le 0,\end{cases}$. В результате перехода заявок из одной системы в другую доход первой системы убывает, а второй возрастает на эту величину.

Обозначим через $V(\vec{k},t)$ – полный ожидаемый доход, который получит сеть за время t, если в начальный момент времени она находится в состоянии $\vec{k}$. Очевидно, что $V(\vec{k},t)=\sum_{i=0}^{n}V_i(\vec{k},t)$, где $V_i(\vec{k},t)$ – ожидаемый доход, который получает система S_i за время t, если в начальный момент времени сеть находится в состоянии $\vec{k}$.

2. Уравнение в частных производных для плотности распределения ожидаемого дохода сети. Возможные следующие переходы СеМО из состояния $(\vec{k},t)$ за короткий промежуток времени Δt:

1) в состояние $\left(\vec{k}+I_i,t\right)$ с вероятностью $\lambda_{0j}\psi_{ji}\left(\vec{k}+I_i\right)u(k_i)\Delta t+o(\Delta t)$, $i,j=\overline{1,n}$; в этом случае доход сети составит $r_{0i}+V(\vec{k}+I_i,t)$;

2) в состояние $\left(\vec{k}-I_i,t\right)$ с вероятностью $\mu_i\alpha_i\left(\vec{k}-I_i\right)u\left(k_i\right)\Delta t+o(\Delta t)$, $i,\ j=\overline{1,n}$; в таком случае доход сети составит $-R_{i0}+V(\vec{k}-I_i,t)$;

3) в состояние $\left(\vec{k}-I_i+I_j,t\right)$ с вероятностью $\mu_j\beta_{ji}\left(\vec{k}-I_j+I_i\right)u\left(k_j\right)\Delta t+o(\Delta t)$, $i,j=\overline{1,n}$; в этом случае доход сети составит $R_{ij}+V(\vec{k}-I_i+I_j,t)$;

4) в состояние $\left(\vec{k},t\right)$ с вероятностью $1-\Big[\lambda_{0i}\left(1-\phi_i\left(\vec{k}\right)u\left(k_i\right)\right)+\mu_iu\left(k_i\right)\left(1-\beta_{ii}\left(\vec{k}\right)\right)+$ $+\lambda_{0i}^{-}u\left(k_i\right)\Big]\Delta t+o(\Delta t)$; в таком случае доход сети составит $R\Delta t+V(\vec{k},t)$, где R – доход сети в единицу времени, что соответствует сохранению размещения заявок по системам сети;

5) из остальных состояний с вероятностью $o(\Delta t)$.

Используя формулу полной вероятности, получим следующую систему разностных уравнений для ожидаемого дохода сети:

$$V\left(\vec{k},t+\Delta t\right)=\left(1-\left[\lambda_{0i}\left(1-\phi_i\left(\vec{k}\right)u\left(k_i\right)\right)+\mu_i u\left(k_i\right)\left(1-\beta_{ii}\left(\vec{k}\right)\right)+\lambda_{0i}^{-}u\left(k_i\right)\right]\Delta t+o(\Delta t)\right)\left(R\Delta t+V(\vec{k},t)\right)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\mu_i\alpha_i\left(\vec{k}-I_i\right)u\left(k_i\right)\Delta t+o(\Delta t)\right)\left(-R_{i0}+V(\vec{k}-I_i,t)\right)+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}\left[\left(\lambda_{0j}\psi_{ji}\left(\vec{k}+I_i\right)u(k_i)\Delta t+o(\Delta t)\right)\left(r_{0i}+V(\vec{k}+I_i,t)\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\mu_j\beta_{ji}\left(\vec{k}-I_j+I_i\right)u\left(k_j\right)\Delta t+o(\Delta t)\right)\left(R_{ij}+V(\vec{k}-I_i+I_j,t)\right)\right].$$

Перенеся $V(\vec{k},t)$ в левую часть уравнения, поделив обе части полученного равенства на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем следующее утверждение:

Лемма 1. *Ожидаемый доход сети удовлетворяет следующему разностно-дифференциальных уравнений (РДУ):*

$$\frac{dV\left(\vec{k},t\right)}{dt}=R-\left[\lambda_{0i}\left(1-\phi_i\left(\vec{k}\right)u\left(k_i\right)\right)+\mu_i u\left(k_i\right)\left(1-\beta_{ii}\left(\vec{k}\right)\right)+\lambda_{0i}^{-}u\left(k_i\right)\right]V(\vec{k},t)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\mu_i\alpha_i\left(\vec{k}-I_i\right)u\left(k_i\right)\left(-R_{i0}+V(\vec{k}-I_i,t)\right)+\sum_{i,j=1}^{n}\left[\lambda_{0j}\psi_{ji}\left(\vec{k}+I_i\right)u(k_i)\left(r_{0i}+V(\vec{k}+I_i,t)\right)+\right.$$
$$\left.+\mu_j\beta_{ji}\left(\vec{k}-I_j+I_i\right)u\left(k_j\right)\left(R_{ij}+V(\vec{k}-I_i+I_j,t)\right)\right]. \qquad (4)$$

Решить систему РДУ (4) аналитически при большом числе n не представляется возможным. Исследование этой системы будем проводить, используя методику, описанную в [5]. Перейдем к относительным переменным и будем исследовать вектор $\vec{\xi}(t)=\left(\frac{k_1(t)}{K},\frac{k_2(t)}{K},...,\frac{k_n(t)}{K}\right)$, где K – величина, ограничивающая общее число заявок в сети. Возможные значения вектора $\vec{\xi}(t)$ принадлежат ограниченному замкнутому множеству $G=\left\{\vec{x}=(x_1,x_2,...,x_n):\ x_i\geq 0,\ \sum_{i=1}^{n}x_i\leq 1\right\}$, в котором они располагаются в узлах n-мерной решетки на расстоянии $\varepsilon=\frac{1}{K}$ друг от друга. При увеличении значений K «плотность заполнения» множества G возможными значениями рассматриваемого вектора $\vec{\xi}(t)$ увеличивается, и становится возможным считать, что он имеет непрерывное распределение в области G. При этих предположениях можно считать, что полный ожидаемый доход сети непрерывно изменяется в зависимости от начального состояния $(\vec{x},t)$. Поэтому можем ввести в рассмотрение функцию плотности распределения (концентрации) ожидаемого дохода $\rho(\vec{x},t)$ в области G. По аналогии, например, с плотностью распределения массы

$$\rho=\frac{m}{V}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{m(x_1\leq\xi_1\leq x_1+\varepsilon,,...,x_n\leq\xi_n\leq x_n+\varepsilon)}{\varepsilon^n},$$

плотность распределения дохода определяется как следующий предел

$$\rho(\vec{x},t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{V(x_1\leq\xi_1\leq x_1+\varepsilon,,...,x_n\leq\xi_n\leq x_n+\varepsilon)}{\varepsilon^n}. \qquad (5)$$

Очевидно, что плотность распределения дохода $\rho\left(\vec{x},t\right)$ по аналогии с плотностью распределения вероятности будет обладать следующими свойствами:

1) $\iint\limits_G...\int\rho(\vec{x},t)dx=V_{sum}$;

2) доход сети при условии изменения вектора состояния сети по области D: $V(\xi \in D,t) = \iint\limits_D \ldots \int \rho(\vec{x},t)d\vec{x}$.

Кроме того, доход сети в определенном состоянии $\vec{\xi}(t) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$: $V(\xi,t)\big|_{\xi(t)=(x_1,x_2,\ldots,x_n)} = 0$. Из (6) следует, что для $V(\vec{k},t)$ справедлива следующая аппроксимация при $K \to \infty$:

$$V(\vec{k},t) = V(\vec{x}K,t) = \varepsilon^n \rho(\vec{x},t) \text{ или } \rho(\vec{x},t) = K^n V(\vec{x}K,t). \qquad (6)$$

Тогда $\dfrac{\partial V\left(\vec{k},t\right)}{\partial t} = \dfrac{\partial\left(\varepsilon^n \rho\left(\vec{x},t\right)\right)}{\partial t} = \varepsilon^n \dfrac{\partial\left(\rho\left(\vec{x},t\right)\right)}{\partial t}$. Введём следующие обозначения:

$$K^n R = r,\ K^n r_{0i} = r_{0i}^{(1)},\ K^n R_{i0} = R_{i0}^{(1)},\ K^n R_{ij} = R_{ij}^{(1)}. \qquad (7)$$

Из уравнения (4) с учетом (5)–(7) следует, что для плотности распределения дохода $\rho\left(\vec{x},t\right)$ уравнение может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho\left(\vec{x},t\right)}{dt} &= r + K\sum_{i=1}^{n}\mu_i\alpha_i\left(\vec{x}-I_i\right)u\left(x_i\right)\left[\rho\left(\vec{x}-e_i,t\right)-\rho\left(\vec{x},t\right)\right]+\\
&+K\sum_{i,j=1}^{n}\Big[\lambda_{0j}\psi_{ji}\left(\vec{x}+e_i\right)u(x_i)\left[\rho\left(\vec{x}+e_i,t\right)-\rho\left(\vec{x},t\right)\right]+\\
&+\mu_j\beta_{ji}\left(\vec{x}-e_j+e_i\right)u\left(x_j\right)\left[\rho(\vec{x}-e_i+e_j,t)-\rho\left(\vec{x},t\right)\right]\Big]-\\
&-\sum_{i=1}^{n}\mu_i\alpha_i\left(\vec{x}-e_i\right)u\left(x_i\right)R_{i0}^{(1)}+\sum_{i,j=1}^{n}\left[\lambda_{0j}\psi_{ji}\left(\vec{x}+e_i\right)u(x_i)r_{0i}^{(1)}+\mu_j\beta_{ji}\left(\vec{x}-e_j+e_i\right)u\left(x_j\right)R_{ij}^{(1)}\right].
\end{aligned}$$

Если $\rho\left(\vec{x},t\right)$ дважды непрерывно дифференцируема по $\vec{x}$, то справедливы следующие разложения:

$$\rho\left(\vec{x}\pm e_i,t\right) = \rho\left(\vec{x},t\right) \pm \varepsilon\frac{\partial\rho\left(\vec{x},t\right)}{\partial x_i} + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2\rho\left(\vec{x},t\right)}{\partial x_i^2} + o\left(\varepsilon^2\right),$$

$$\begin{aligned}
\rho\left(\vec{x}+e_i-e_j,t\right) &= \rho\left(\vec{x},t\right)+\varepsilon\left(\frac{\partial\rho\left(\vec{x},t\right)}{\partial x_i}-\frac{\partial\rho\left(\vec{x},t\right)}{\partial x_j}\right)+\\
&+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2\rho\left(\vec{x},t\right)}{\partial x_i^2}-2\frac{\partial^2\rho\left(\vec{x},t\right)}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{\partial^2\rho\left(\vec{x},t\right)}{\partial x_j^2}\right)+o\left(\varepsilon^2\right),\ i,j=\overline{1,n}.
\end{aligned}$$

Используя их и то, что $\varepsilon K\left(t\right)=1$, с точностью до членов порядка малости ε^2 получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho\left(\vec{x},t\right)}{dt} &= r-\sum_{i=1}^{n}\mu_i\alpha_i\left(\vec{x}-e_i\right)u\left(x_i\right)\left[\frac{\partial\rho\left(\vec{x},t\right)}{\partial x_i}-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial^2\rho\left(\vec{x},t\right)}{\partial x_i^2}\right]+\\
&+\sum_{i,j=1}^{n}\Bigg[\lambda_{0j}\psi_{ji}\left(\vec{x}+e_i\right)u(x_i)\left[\frac{\partial\rho\left(\vec{x},t\right)}{\partial x_i}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial^2\rho\left(\vec{x},t\right)}{\partial x_i^2}\right]+\\
&+\mu_j\beta_{ji}\left(\vec{x}-e_j+e_i\right)u\left(x_j\right)\left[\frac{\partial\rho\left(\vec{x},t\right)}{\partial x_i}-\frac{\partial\rho\left(\vec{x},t\right)}{\partial x_j}+\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial^2\rho\left(\vec{x},t\right)}{\partial x_i^2}-2\frac{\partial^2\rho\left(\vec{x},t\right)}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{\partial^2\rho\left(\vec{x},t\right)}{\partial x_j^2}\right)\right]\Bigg]-\\
&-\sum_{i=1}^{n}\mu_i\alpha_i\left(\vec{x}-e_i\right)u\left(x_i\right)R_{i0}^{(1)}+\sum_{i,j=1}^{n}\left[\lambda_{0j}\psi_{ji}\left(\vec{x}+e_i\right)u(x_i)r_{0i}^{(1)}+\mu_j\beta_{ji}\left(\vec{x}-e_j+e_i\right)u\left(x_j\right)R_{ij}^{(1)}\right]. \qquad (8)
\end{aligned}$$

Таким образом, получили следующее утверждение.

Теорема. *Плотность распределения дохода сети с точностью до* $O\left(\varepsilon^2\right)$ *удовлетворяет следующему уравнению в частных производных*

$$\frac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} A_i(\vec{x},t)\frac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial x_i} + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}(\vec{x},t)\frac{\partial^2\rho(\vec{x},t)}{\partial x_i\partial x_j} -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\mu_i\alpha_i\left(\vec{x}-e_i\right)u(x_i)R_{i0}^{(1)} + \sum_{i,j=1}^{n}\left[\lambda_{0j}\psi_{ji}\left(\vec{x}+e_i\right)u(x_i)r_{0i}^{(1)} + \mu_j\beta_{ji}\left(\vec{x}-e_j+e_i\right)u(x_j)R_{ij}^{(1)}\right], \quad (9)$$

где

$$A_i(\vec{x},t) = \mu_i\alpha_i\left(\vec{x}-e_i\right)u(x_i) - \lambda_{0j}\psi_{ji}\left(\vec{x}+e_i\right)u(x_i) + \mu_j\beta_{ji}^{*}\left(\vec{x}-e_j+e_i\right)u(x_j),$$

$$B_{ij}(\vec{x},t) = -\mu_i\alpha_i\left(\vec{x}-e_i\right)u(x_i) + \lambda_{0j}\psi_{ji}\left(\vec{x}+e_i\right)u(x_i) + \mu_j\beta_{ji}^{*}\left(\vec{x}-e_j+e_i\right)u(x_j).$$

Учитывая, что $B_{ij}(\vec{x},t)$, представляют собой функции порядка $O(\varepsilon)$, выражение $\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}(x_i,t)\frac{\partial^2\rho(\vec{x},t)}{\partial x_i\partial x_j}$, можно отнести к $O(\varepsilon^2)$. Поэтому уравнение (9) с точностью до $O(\varepsilon^2)$ запишется в виде:

$$\frac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} A_i(\vec{x},t)\frac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial x_i} -$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\mu_i\alpha_i\left(\vec{x}-e_i\right)u(x_i)R_{i0}^{(1)} + \sum_{i,j=1}^{n}\left[\lambda_{0j}\psi_{ji}\left(\vec{x}+e_i\right)u(x_i)r_{0i}^{(1)} + \mu_j\beta_{ji}\left(\vec{x}-e_j+e_i\right)u(x_j)R_{ij}^{(1)}\right].$$

3. Нахождение ожидаемого дохода сети. Проинтегрировав обе части этого уравнения по $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в области G и разделив обе части уравнения на объем области G, равный $m(G)$, получим:

$$\frac{1}{m(G)}\iint\limits_{G}\ldots\int\frac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial t}d\vec{x} = -\frac{1}{m(G)}\iint\limits_{G}\ldots\int\sum_{i=1}^{n}A_i(\vec{x},t)\frac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial x_i}d\vec{x} +$$

$$+\frac{1}{m(G)}\iint\limits_{G}\ldots\int\sum_{i=1}^{n}\mu_i\alpha_i\left(\vec{x}-e_i\right)u(x_i)R_{i0}^{(1)}d\vec{x} +$$

$$+\frac{1}{m(G)}\iint\limits_{G}\ldots\int\sum_{i,j=1}^{n}\left[\lambda_{0j}\psi_{ji}\left(\vec{x}+e_i\right)u(x_i)r_{0i}^{(1)} + \mu_j\beta_{ji}\left(\vec{x}-e_j+e_i\right)u(x_j)R_{ij}^{(1)}\right]d\vec{x}, \quad (10.$$

Будем считать, что в левой части этого равенства допустима перемена порядка интегрирования и дифференцирования (мы предполагаем, что в замкнутой области G функция $\rho(\vec{x},t)$ является непрерывной):

$$\frac{1}{m(G)}\iint\limits_{G}\ldots\int\frac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial t}d\vec{x} = \frac{1}{m(G)}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{G}\ldots\int\rho(\vec{x},t)d\vec{x} = \frac{d}{dt}\overline{v_G}(t),$$

где $\overline{v_G}(t)$ – среднее по $\vec{x}$ значение дохода при условии изменения начального состояния $(\vec{x},t)$ в области G.

Рассмотрим интегралы в правой части (10). При расчете этих интегралов используем интегрирование по частям, а также предположим, что выполняются граничные условия:

$$A_i(\vec{x},t)\,\rho(\vec{x},t)\Big|_{\vec{x}\in\Gamma(G)} = 0,\ i = \overline{1,n},$$

где $\Gamma(G)$ – граница области G, т. е. $A_i(\vec{x},t)\,\rho(\vec{x},t)\Big|_{x_i=0}^{x_i=1-x_1-x_2-\ldots-x_{i-1}-x_{i+1}\ldots-x_{n-1}} = 0$, которые означают, что не допускается поток дохода через границу области G или, что в граничных точках области G поставлены отражающие экраны. Тогда, учитывая, что $\frac{\partial A_i(x,t)}{\partial x_i}$ не зависят от x_j, $j = \overline{1,n}$, получаем $\frac{1}{m(G)}\iint\limits_{G}\ldots\int A_i(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i}dx = -\frac{\partial A_i(x,t)}{\partial x_i}\overline{v_G}(t)$, $i = \overline{1,n}$.Таким образом приходим к следующему дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}\overline{v_G}(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_i(x,t)}{\partial x_i}\overline{v_G}(t)+\frac{1}{m(G)}\iint\limits_G\ldots\int\sum_{i=1}^{n}\mu_i\alpha_i\left(\vec{x}-e_i\right)u\left(x_i\right)R_{i0}^{(1)}d\vec{x}+$$

$$+\frac{1}{m(G)}\iint\limits_G\ldots\int\sum_{i,j=1}^{n}\left[\lambda_{0j}\psi_{ji}\left(\vec{x}+e_i\right)u(x_i)r_{0i}^{(1)}+\mu_j\beta_{ji}\left(\vec{x}-e_j+e_i\right)u\left(x_j\right)R_{ij}^{(1)}\right]d\vec{x}.$$

Его решение имеет вид:

$$\overline{v_G}(t)=e^{\int_0^t\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_i(\vec{x},z)}{\partial x_i}dz}\left(\overline{v_G}(0)-\frac{1}{m(G)}\int_0^t\iint\limits_G\ldots\int\sum_{i=1}^{n}\mu_i\alpha_i\left(\vec{x}-e_i\right)u\left(x_i\right)R_{i0}^{(1)}d\vec{x}d\tau+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{m(G)}\int_0^t\iint\limits_G\ldots\int\sum_{i,j=1}^{n}\left[\lambda_{0j}\psi_{ji}\left(\vec{x}+e_i\right)u(x_i)r_{0i}^{(1)}+\mu_j\beta_{ji}\left(\vec{x}-e_j+e_i\right)u\left(x_j\right)R_{ij}^{(1)}\right]d\vec{x}d\tau.\right) \quad (11)$$

Аналогично как в [6] можно показать, что $m(G)=(n!)^{-1}$.

Пример. Рассмотрим открытую СеМО, состоящую из $n = 7$ СМО. Интенсивности поступления заявок в СМО равны $\lambda_{01}=30,\lambda_{02}=40,\lambda_{03}=60,\lambda_{04}=20,\lambda_{05}=80,\lambda_{06}=90,\lambda_{07}==100,$ а интенсивность обслуживания заявок равна $\mu_i=0{,}5\lambda_{0i}, i=\overline{1,7}$. Вероятности присоединения заявок к очередям равна $f^{(1)}(k_1)=0{,}2; f^{(2)}(k_2)=0{,}3; f^{(3)}(k_3)=0{,}4; f^{(4)}(k_4)=0{,}1; f^{(5)}(k_5)=0{,}5; f^{(6)}(k_6)=0{,}7; f^{(7)}(k_7)=0{,}9.$ Вероятности переходов заявок в другую СМО после завершения обслуживания равна $p_{i1}=0{,}125; p_{i2}=0{,}12; p_{i3}=0{,}125;$ $p_{i4}=0{,}12; p_{i5}=0{,}125; p_{i6}=0{,}14; p_{i7}=0{,}125, i=\overline{1,7}.$ Тогда условные вероятности, определяемые отношениями (1)–(4) равны соответственно $\phi_1(\vec{k})=0{,}186; \phi_2(\vec{k})=0{,}163;$ $\phi_3(\vec{k})=0{,}14; \phi_4(\vec{k})=0{,}209; \phi_5(\vec{k})=0{,}116; \phi_6(\vec{k})=0{,}07; \phi_7(\vec{k})=0{,}233;$ $\alpha_i(\vec{k})=0{,}233; i=\overline{1,7}$. В таблице 1 представлены значения вероятности $\psi_{ij}(\vec{k})$.

Таблица 1 – Значения $\psi_{ij}(\vec{k})$

i\j	1	2	3	4	5	6	7
1	0,239	0,056	0,078	0,019	0,097	0,152	0,174
2	0,034	0,349	0,068	0,016	0,085	0,133	0,153
3	0,029	0,042	0,458	0,014	0,073	0,114	0,131
4	0,044	0,063	0,087	0,121	0,109	0,171	0,196
5	0,024	0,035	0,048	0,012	0,561	0,095	0,109
6	0,015	0,021	0,029	0,007	0,036	0,757	0,065
7	0,005	0,007	0,01	0,002	0,012	0,019	0,922

$\beta_{i1}=0{,}054; \beta_{i2}=0{,}077; \beta_{i3}=0{,}097;$ $\beta_{i4}=0{,}032; \beta_{i5}=0{,}121; \beta_{i6}=0{,}19; \beta_{i7}=0{,}218, i=\overline{1,7}$. Доходы от вышеуказанных переходов равны соответственно $r_{0i}^{(1)}=20, R_{i0}^{(1)}=10, i=\overline{1,7},$ $R_{ij}^{(1)}=-ij, i, j=\overline{1,7}$. Выражение (12) в нашем примере является линейной функцией времени: $\overline{v_G}(t)=5983t.$

Литература

1. Малинковский, Ю.В. Сети массового обслуживания с обходами узлов заявками / Ю.В. Малинковский // Автоматика и телемеханика. – 1991. – № 2. – С. 102–110.

2. Маталыцкий, М.А. Анализ сети с обходами систем обслуживания разнотипными заявками / М.А. Маталыцкий, В.В. Науменко // Вестник ГрГУ. Сер. 2. Математика, физика, информатика, вычислительная техника и управление. – 2013. – № 1. – С. 152–159.

3. Matalytski, M. Finding incomes of HM-network with one-type messages bypass of systems / M. Matalytski, V. Naumenko // Scientific Research of the Institute of Mathematics and Computer Science Czestochowa University of Technology. – 2012. – Vol. 11, № 3. – P. 111–123.

4. Галицкая-Петровская, А.О. Асимптотический анализ открытой сети обслуживания с ограниченным числом разнотипных заявок и обходами/ А.О. Галицкая-Петровская, М.А. Маталыцкий // Вестник ГрГУ. Сер. 2. – 2019. – Т. 9, № 1. – С. 128–139.

5. Медведев, Г.А. Замкнутые системы массового обслуживания и их оптимизация / Г.А. Медведев // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1978. – № 6. – С. 199–203.

6. Копать, Д.Я. Анализ ожидаемого дохода в открытой марковской сети обслуживания с ограниченным числом заявок и случайным временем их ожидания в очередях / Д.Я. Копать, М.А. Маталыцкий // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2019. – № 6. – С. 137–143

Гродненский государственный
университет им. Я. Купалы

Поступила в редакцию 05.05.2020