

Комбинированный диффузионно-кинетический метод решения кинетического уравнения

А. В. ВОРОНКОВ, В. А. ЧУЯНОВ

УДК 539.125.523.33

При расчете ядерного реактора или его ячейки при наличии областей с сильным поглощением, пустот и т. п. используются трудоемкие приближения высокой точности для решения кинетического уравнения. Как правило, такие области локализованы в относительно небольших объемах. В большей же части реактора обычно можно использовать более грубые, а следовательно, и менее трудоемкие методы решения кинетического уравнения. Поэтому оптимальным является метод, в котором используются разные по точности приближения кинетического уравнения в различных областях реактора. Основная трудность подобного подхода заключается в сопряжении решений и в выборе границы раздела.

В настоящей работе предлагается способ, позволяющий использовать точное решение кинетического уравнения в сочетании с P_N -приближением метода сферических гармоник. Для простоты изложения и наглядности рассмотрим одномерную геометрию. Индексом I обозначим область $0 \leq r < r_0$, в которой кинетическое уравнение решается точно, индексом II — область $r_0 \leq r \leq R$, в которой применяется P_N -приближение (r_0 — граница раздела областей I и II; R — граница реактора или ячейки).

Кинетическое уравнение для потока нейтронов $N_g(r, \Omega)$ в многогрупповом приближении сводится к следующей системе уравнений [1]:

$$\Omega \nabla N_g(r, \Omega) + \alpha_g(r) N_g(r, \Omega) = \sum_{g'=1}^G \int \beta_{g'g}(r, \Omega' \rightarrow \Omega) N_{g'}(r, \Omega') d\Omega' + f_g(r). \quad (1)$$

Здесь g — номер энергетической группы; G — число групп; $\alpha_g(r)$ — полное макроскопическое сечение взаимодействия; $\beta_{g'g}(r, \Omega' \rightarrow \Omega)$ — макроскопическое сечение перехода из группы g' в g и из направления Ω' в Ω ; Ω — единичный вектор направления: $\Omega = \{\sin \vartheta \cos \psi, \sin \vartheta \sin \psi, \cos \vartheta\}$, где ψ и ϑ — азимутальный и полярный угол в сферической системе координат; $f_g(r)$ — объемные источники.

Решение уравнения (1) в области II в P_N -приближении имеет вид (обозначения общепринятые [1])

$$N_g^{\text{II}}(r, \Omega) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^N (2n+1) \sum_{m=0}^n [N_{g,n}^{(m)}(r) \sin m\psi + N_{g,n}^{(-m)}(r) \cos m\psi] P_n^m(\cos \vartheta). \quad (2)$$

Выражение (2) при $r=r_0$ задает краевое условие для системы уравнений (1) в области I. Так как система (1) линейна, ее решение в области I может быть представлено в виде линейной комбинации частных решений:

$$N_g^{\text{I}}(r, \Omega) = N_{1,g}(r, \Omega) + \frac{1}{4\pi} \sum_{g'=1}^G \sum_{n=0}^N (2n+1) \sum_{m=0}^n [N_{g',n}^{(m)}(r_0) N_{n,m}^{g',g}(r, \Omega) +$$

$$+ N_{g',n}^{(-m)}(r_0) N_{n,-m}^{g',g}(r, \Omega)], \quad (3)$$

где $N_{1,g}(r, \Omega)$ — решение системы (1) с краевыми условиями

$$N_{1,g}(r_0, \Omega) = 0; \quad (\Omega, \mathbf{n}) \leq 0; \quad (4)$$

\mathbf{n} — внешняя для области I нормаль к поверхности раздела $r=r_0$; $N_{n,m}^{g',g}(r, \Omega)$ и $N_{n,-m}^{g',g}(r, \Omega)$ — решения N_g системы (1) с $f_g(r) \equiv 0$ для всех g с краевыми условиями

$$N_{n,m}^{g',g}(r_0, \Omega) = \delta_{g',g} \sin m\psi P_n^m(\cos \vartheta), \quad (\Omega, \mathbf{n}) \leq 0; \quad (5)$$

$$N_{n,-m}^{g',g}(r_0, \Omega) = \delta_{g',g} \cos m\psi P_n^m(\cos \vartheta), \quad (\Omega, \mathbf{n}) \leq 0;$$

$$1 \leq g \leq G, \quad 1 \leq g' \leq G, \quad \delta_{g',g} = \begin{cases} 0 & g' \neq g; \\ 1 & g' = g. \end{cases}$$

Решение $N_g^{\text{I}}(r, \Omega)$, представленное выражением (3) с учетом (4) и (5), удовлетворяет уравнению (1) и краевому условию при $r=r_0$. Если уравнение (3) для $r=r_0$ умножить почленно на $(\Omega, \mathbf{n}) P_{2n}^m(\cos \vartheta) \sin m\psi$ и $(\Omega, \mathbf{n}) P_{2n}^m(\cos \vartheta) \cos m\psi$ и результат проинтегрировать по Ω , то получим соответствующие краевые условия при $r=r_0$ для уравнения (1) в области II в P_N -приближении*. Решив уравнение (1) в области II и определив $N_{g,n}^{(\pm m)}(r_0)$, получим с помощью формулы (3) распределение потока в области I.

Проиллюстрируем данный метод на примере, когда в области II справедливо диффузионное приближение, что соответствует $N=1$ в разложении (2). Перепишем (2) в следующем виде:

$$N_g^{\text{II}}(r, \Omega) = \frac{1}{4\pi} [n_g(r) + 3(\Omega, \mathbf{n}) F_g(r)], \quad (2')$$

где $n_g(r) = \int N_g(r, \Omega) d\Omega$ — глобальный поток нейтронов в группе g ; $F_g(r) = \int N_g(r, \Omega) (\Omega, \mathbf{n}) d\Omega$ — полный ток нейтронов в группе g . Решение в области I можно записать в виде

$$N_g^{\text{I}}(r, \Omega) = N_{1,g}(r, \Omega) + \frac{1}{4\pi} \sum_{g'=1}^G [n_{g'}(r_0) N_{g',g}^{g',g}(r, \Omega) + 3F_{g'}(r_0) N_{g',g}^{g',g}(r, \Omega)], \quad (3')$$

где $N_{1,g}(r, \Omega)$ имеет прежний смысл, а $N_{g',g}^{g',g}(r, \Omega)$ и $N_{g',g}^{g',g}(r, \Omega)$ — решения системы (1) с $f_g(r) \equiv 0$ для всех g с краевыми условиями при $r=r_0$:

$$N_{g',g}^{g',g}(r_0, \Omega) = \delta_{g',g} (\Omega, \mathbf{n}) \leq 0; \quad (5')$$

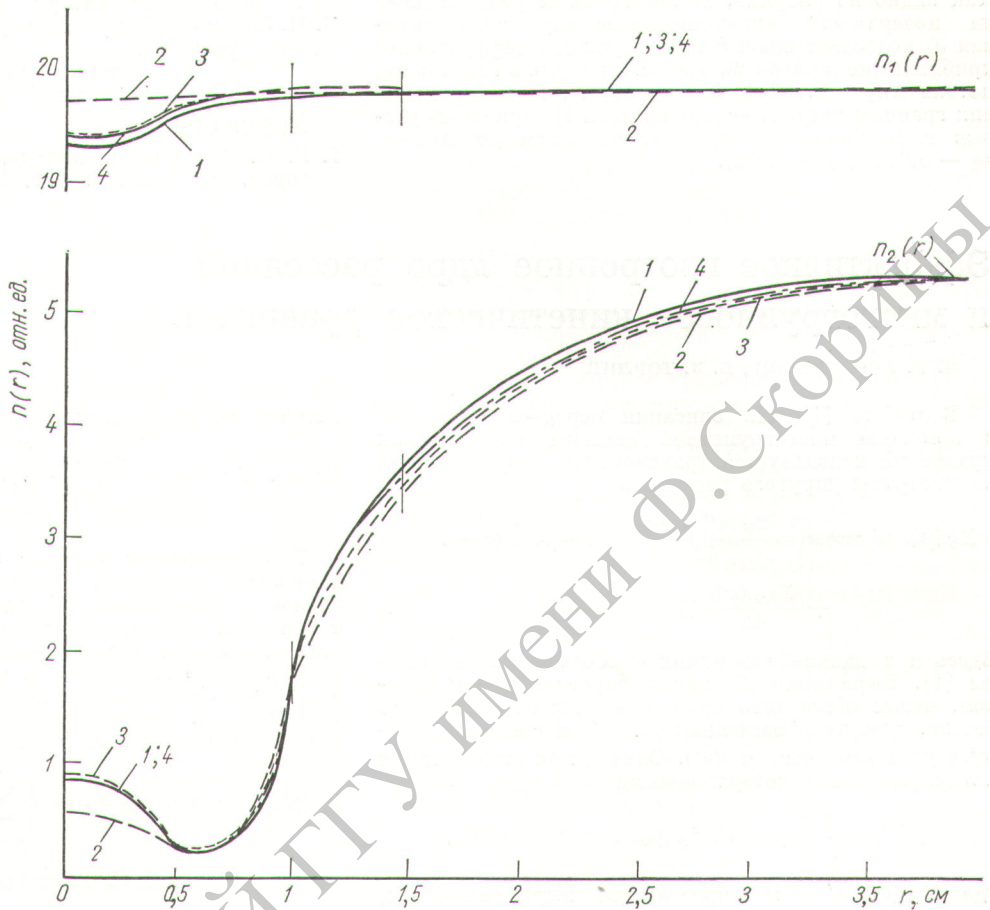
$$N_{g',g}^{g',g}(r_0, \Omega) = \delta_{g',g} (\Omega, \mathbf{n}), \quad (\Omega, \mathbf{n}) \leq 0;$$

$$1 \leq g \leq G, \quad 1 \leq g' \leq G.$$

* Здесь, как и всегда при использовании сферических гармоник, встает вопрос о наилучшем выборе граничных условий.

Поток нейтронов в первой и второй группах в зависимости от радиуса в трехзонной цилиндрической ячейке, рассчитанный в различных приближениях:

1 (—) — S_8 -приближение по всему объему ячейки, рассматриваемое как точное решение кинетического уравнения; 2 (---) — P_1 -приближение по всему объему ячейки; 3 (-----) — комбинированный метод ($S_8 + P_1$), S_8 для $0 \leq r \leq 1,000$, P_1 для $1,000 \leq r \leq 3,950$; 4 (— · — · —) — комбинированный метод ($S_8 + P_1$), S_8 для $0 \leq r \leq 1,492$, P_1 для $1,492 \leq r \leq 3,950$.



Проинтегрировав по Ω уравнение (3') при $r=r_0$, предварительно умноженное на (Ωn) , получим систему алгебраических линейных уравнений, связывающих между собой значения потока $n_g(r_0)$ и тока $F_g(r_0)$. Система представляет наиболее общее краевое условие на границе $r=r_0$ для решения системы (1) в области II в P_1 -приближении:

$$F_g(r_0) = F_{1g}(r_0) + \frac{1}{4\pi} \sum_{g'=1}^G [n_{g'}(r_0) F_{2g'}^{g',g}(r_0) + 3F_{2g'}^{g',g}(r_0) F_{2g'}^{g',g}(r_0)], \quad (6)$$

где

$$F_{1g}(r_0) = \int N_{1,g}(r_0, \Omega) (\Omega n) d\Omega;$$

$$F_{2g'}^{g',g}(r_0) = \int N_{2g'}^{g',g}(r_0, \Omega) (\Omega n) d\Omega, \quad j=2, 3.$$

В результате такого подхода на границе $r = r_0$ выполняется непрерывность тока нейтронов и допускается разрыв в глобальной плотности потока нейтронов. Чем точнее проведено диффузионное приближение на границе $r = r_0$, тем меньше разрыв в $n_g(r_0)$, и поэтому по величине разрыва $\Delta n_g(r_0) = n_g(r_0 + 0) -$

$n_g(r_0 - 0)$ можно судить о корректности выбора границы раздела.

Изложенный метод несложно обобщается на случай произвольного расположения области I и на многомерные геометрии. На рисунке представлены результаты двухгруппового расчета трехзонной цилиндрической ячейки с параметрами, приведенными в таблице.

Параметры трехзонной ячейки

Параметры	Зона 1	Зона 2	Зона 3
$r, \text{ см}$	0,420	1,000	3,950
$\beta_{11}, \text{ см}^{-1}$	0,234	0,100	0,162
$\beta_{12}, \text{ см}^{-1}$	0,039	0,000	0,030
$\beta_{21}, \text{ см}^{-1}$	0,000	0,000	0,000
$\beta_{22}, \text{ см}^{-1}$	2,120	0,100	1,500
$\alpha_1, \text{ см}^{-1}$	0,273	0,100	0,212
$\alpha_2, \text{ см}^{-1}$	2,142	4,000	1,600
$f_1, \text{ см}^{-3} \cdot \text{сек}^{-1}$	0,000	0,000	1,000
$f_2, \text{ см}^{-3} \cdot \text{сек}^{-1}$	0,000	0,000	0,000

Как видно из рисунка, выбор границы раздела даже на поверхности сильнопоглощающего тела (кривая 3) позволяет значительно улучшить диффузионное приближение (кривая 2), при этом разрыв в глобальном потоке $\Delta n_2 = 0,232$ (при $r_0 = 1,000$). При перемещении границы раздела внутрь области II (кривая 4) разрыв в глобальном потоке уменьшается до $\Delta n_2 = -0,016$ ($r_0 = 1,492$).

В заключение авторы приносят благодарность В. И. Зябликовой за реализацию метода на ЭВМ и проведение расчетов.

Поступило в редакцию 31/VII 1967 г.
В окончательной редакции 20/VI 1969 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Марчук. Методы расчета ядерных реакторов. М., Госатомиздат, 1961.

Эффективное изотропное ядро рассеяния и многогрупповое кинетическое уравнение

Б. Р. БЕРГЕЛЬСОН, Б. З. ТОРЛИН

УДК 621.039.51.12

В работе [1] для описания переноса нейтронов с помощью многогрупповой системы кинетических уравнений используется транспортная аппроксимация индикатрисы упругого рассеяния

$$\Sigma_S(\mu_0, u' \rightarrow u) = \frac{\Sigma_S(u') \bar{\mu}_0(u')}{4\pi} \delta(1-\mu_0) \delta(u-u') + \frac{\Sigma_{trs}(u')}{4\pi} f_S(u', u-u'). \quad (1)$$

Здесь и в дальнейшем приняты обозначения из работы [1]. Выражение (1) сконструировано таким образом, чтобы обеспечить правильные значения полного сечения упругого рассеяния $\Sigma_S(u')$ и среднего косинуса угла рассеяния $\bar{\mu}_0(u')$. Однако при этом средняя логарифмическая потеря энергии

$$\xi(u') = \int \int (u-u') \Sigma_S(\mu_0, u' \rightarrow u) du d\Omega_0,$$

где $\Sigma_S(\mu_0, u' \rightarrow u)$ определяется выражением (1), отличается от истинного значения и, как следствие, нарушается среднестатистическая корреляция между углом рассеяния и потерей энергии. Для того чтобы исключить эту некорректность, нужно ввести в выражение (1) дополнительный член, вид которого определяется из условия

$$\int \int (u-u') \Sigma_S(\mu_0, u' \rightarrow u) du d\Omega_0 = \Sigma_S(u') \int (u-u') f_S(u', u-u') du.$$

Индикатриса упругого рассеяния, обеспечивающая правильные значения $\Sigma_S(u')$; $\bar{\mu}_0(u')$; $\xi(u')$, записывается в виде

$$\Sigma_S(\mu_0, u' \rightarrow u) = \frac{\Sigma_S(u') \bar{\mu}_0(u')}{4\pi} \delta(1-\mu_0) \delta(u-u') + \frac{\Sigma_S(u')}{4\pi} f_S(u', u-u') - \frac{\Sigma_S(u') \bar{\mu}_0(u')}{4\pi} \delta(u-u'). \quad (2)$$

Представление $\Sigma_S(\mu_0, u' \rightarrow u)$ в виде (2) соответствует той форме индикатрисы, которая используется в так называемом методе синтетических ядер [2].

Интересно отметить, что выражение (2) может быть получено и из иных, более формальных соображений. Рассмотрим разложение угловой зависимости инди-

катрисы по полиномам Лежандра $P_l(\mu_0)$:

$$\Sigma_S(\mu_0, u' \rightarrow u) = \frac{\Sigma_S(u')}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \chi_l(u' \rightarrow u) P_l(\mu_0). \quad (3)$$

В практических расчетах приходится всегда ограничиваться конечным и обычно небольшим числом членов в разложении (3), что приводит к ошибкам в описании анизотропии рассеяния. Иная процедура, отличающаяся от общепринятой, предлагается в работе [3]. Она заключается в том, что все $\chi_l(u' \rightarrow u)$ при $l \geq L+1$ считаются одинаковыми и равными $\chi_{L+1}(u' \rightarrow u)$. Тогда разложение (3) может быть записано в виде конечного ряда по $P_l(\mu_0)$:

$$\Sigma_S(\mu_0, u' \rightarrow u) = \frac{\Sigma_S(u')}{4\pi} \left\{ \sum_{l=0}^L (2l+1) [\chi_l(u' \rightarrow u) - \chi_{L+1}(u' \rightarrow u)] P_l(\mu_0) + \chi_{L+1}(u' \rightarrow u) \delta(1-\mu_0) \right\}. \quad (4)$$

Переход от разложения (3) к выражению (4) означает частичное нарушение истинной корреляции между углом рассеяния и потерей энергии, а также завышенные анизотропии рассеяния тем меньше, чем больше L . В выражении (4) функция $\chi_{L+1}(u' \rightarrow u)$ является коэффициентом разложения угловой зависимости индикатрисы рассеяния $\Sigma_S(\mu_0, u' \rightarrow u)$ по $P_l(\mu_0)$:

$$\chi_{L+1}(u' \rightarrow u) = \frac{1}{\Sigma_S(u')} \int \Sigma_S(\mu_0, u' \rightarrow u) P_{L+1}(\mu_0) d\Omega_0 = \int_{-1}^{+1} \chi(\mu_0, u') \delta[u-u'-R(\mu_0)] P_{L+1}(\mu_0) d\mu_0, \quad (5)$$

где $\chi(\mu_0, u') = \frac{\Sigma_S(\mu_0, u')}{\Sigma_S(u')}$ — функция, описывающая угловую зависимость дифференциального сечения рассеяния $\Sigma_S(\mu_0, u')$ при логарифме u'

$$R(\mu_0) = 2 \ln \frac{\mu_0 + \sqrt{\mu_0^2 + M^2 - 1}}{M + 1}.$$

Последний член в правой части выражения (4) описывает рассеяние без изменения направления движения нейтрона. Подобное рассеяние не должно сопровождаться изменением энергии нейтрона. Поэтому в выражении (5) следует заменить $\delta[u-u'-R(\mu_0)]$ на $\delta[u-u']$.