

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ НА ОСНОВАНИИ ПАСТЕРНАКА

А.Г. Козел

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

MATHEMATICAL MODEL OF DEFORMATION OF THE CIRCULAR THREE-LAYER PLATE ON THE BASIS OF PASTERNAK

A.G. Kozel

Belarusian State University of Transport, Gomel

Приведена постановка краевой задачи об изгибе несимметричной по толщине упругой трёхслойной круговой пластины на основании Пастернака. Получено общее аналитическое решение, которое может служить исходным для исследования любого случая симметричного изгиба трёхслойной круговой пластины, опертой на упругое основание Пастернака.

Ключевые слова: трёхслойная круговая пластина, симметричный изгиб, основание Пастернака.

Statement of a boundary problem about a bend of an elastic three-layer circular plate on the basis of Pasternak is given. General analytical solution for the asymmetrical on thickness plate is obtained. It can serve as a source for the study of any case of symmetric bending a circular three-layer plate, simply supported on an elastic foundation of Pasternak's.

Keywords: three-layer circular plate, symmetric bend, Pasternak's basis.

Введение

Современные тенденции в строительстве диктуют всё новые и новые требования к конструкциям и изделиям. Необходимость повышения прочностных характеристик непрерывно возрастает, а условия эксплуатации становятся всё более жесткими. Широкое применение в технике и строительстве получили многослойные конструкции. Стержни, пластины и оболочки, имеющие слоистую структуру, при относительно малом весе способны обеспечить заданную прочность, жёсткость и противостоять ряду других физических воздействий.

В последнее время значительное распространение получили трёхслойные элементы конструкций, которые состоят из двух несущих слоев и заполнителя, обеспечивающего их совместную работу. В условиях деформации изгиба подобные системы оказываются наиболее рациональными, т. е. близкими оптимальным с точки зрения обеспечения минимума весовых показателей при заданных ограничениях на прочность и жесткость.

Статическое и динамическое деформирование трёхслойных элементов конструкций исследовалось В.В. Болотиним, А.Г. Горшковым, Э.И. Старовойтовым, Д.В. Леоненко, А.В. Яровой, Ю.М. Плещачевским в работах [1]–[5].

Важную роль играет расчёт конструкций, связанных с упругим основанием. Это применимо к таким сооружениям как аэродромные и дорожные покрытия, полы промышленных зданий, днища резервуаров, ленточные фундаменты, треки для испытаний и площадки для запуска

ракет, конструкции зданий, расположенных на сжимаемых грунтах и многим другим.

В настоящее время деформирование круглых трёхслойных пластин изучено при опирании на основание Винклера [6]–[15]. Однако в этом случае учитывается только сжимаемость грунта, а его связность пренебрегается. Таким образом, предлагаемая постановка задачи является более общей, из которой будут следовать предыдущие модели как частные случаи.

1 Постановка краевой задачи в усилиях

Поперечно нагруженная упругая трёхслойная круговая пластина покоится на упругом основании (рисунок 1.1). Для изотропных несущих слоев толщиной h_1, h_2 приняты гипотезы Кирхгофа о несжимаемости, прямолинейности и перпендикулярности нормали к деформированной срединной поверхности. В несжимаемом по толщине заполнителе ($h_3 = 2c$) деформированная нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол ψ . Заполнитель считается легким, т. е. не учитывается его работа в тангенциальном направлении.

Постановка задачи и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат r, φ, z . Внешняя вертикальная нагрузка не зависит от координаты φ : $q_0 = q_0(r)$. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительно сдвигу слоев. На нижнюю поверхность пластины действует распределенная по ее площади реакция основания q_r .

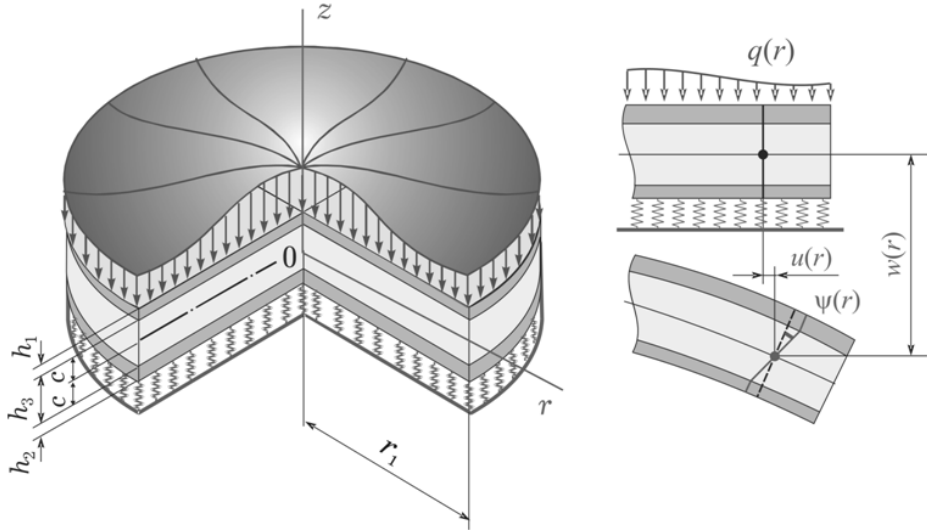


Рисунок 1.1 – Схема деформирования круговой пластины

В силу симметрии нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют: $u_\varphi(k) = 0$ (k – номер слоя), а прогиб пластины, относительный сдвиг в заполнителе и радиальное перемещение координатной плоскости не зависят от координаты φ , т. е. $u(r)$, $\psi(r)$, $w(r)$. В дальнейшем эти функции считаются искомыми. Через h_k обозначена толщина k -го слоя, реакция основания – q_r .

Используя гипотезу прямолинейности нормали заполнителя $2\varepsilon_{rz}^{(3)} = u_{r,z}^{(3)} + w_{,r} = \psi$, после интегрирования получим выражения радиальных перемещений в слоях $u_r(k)$ через искомые функции:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,r} \quad (c \leq z \leq c + h_1), \\ u_r^{(3)} &= u + z\psi - zw_{,r} \quad (-c \leq z \leq c), \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где z – координата рассматриваемого волокна; $(u + c\psi)$ – величина смещения внешнего несущего слоя за счет деформации заполнителя, для второго несущего слоя это смещение $(u - c\psi)$, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Деформации в слоях следуют из (1.1) и соотношений Коши:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(1)} &= u_{,r} + c\psi_{,r} - zw_{,rr}, \\ \varepsilon_\varphi^{(1)} &= \frac{1}{r}(u + c\psi - zw_{,r}), \quad \varepsilon_{rz}^{(1)} = 0, \\ \varepsilon_r^{(2)} &= u_{,r} - c\psi_{,r} - zw_{,rr}, \\ \varepsilon_\varphi^{(2)} &= \frac{1}{r}(u - c\psi - zw_{,r}), \quad \varepsilon_{rz}^{(2)} = 0, \\ \varepsilon_r^{(3)} &= u_{,r} + z\psi_{,r} - zw_{,rr}, \\ \varepsilon_\varphi^{(3)} &= \frac{1}{r}(u + z\psi - zw_{,r}), \quad \varepsilon_{rz}^{(3)} = \frac{1}{2}\psi. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Используя компоненты тензора напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}$ ($\alpha = r, \varphi$), введем обобщенные внутренние силы и моменты в пластине:

$$\begin{aligned} T_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, \\ M_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz, \\ H_\alpha &= M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Уравнения равновесия круговой трехслойной пластины в усилиях получены из вариационного принципа Лагранжа:

$$\begin{aligned} T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) &= -p, \\ H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) &= 0, \\ M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) &= -q_0 + q_R. \end{aligned} \quad (1.4)$$

На контуре пластины ($r = r_1$) должны выполняться силовые условия

$$\begin{aligned} T_r &= T_r^1, \quad H_r = H_r^1, \quad M_r = M_r^1, \\ M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) &= Q^1. \end{aligned} \quad (1.5)$$

2 Решение краевой задачи в перемещениях

Предполагается, что связь напряжений и деформаций в слоях описывается соотношениями линейной теории упругости:

$$s_\alpha^k = 2G_k \varepsilon_\alpha^k, \quad \sigma^k = K_k \theta^k. \quad (2.1)$$

Связь между реакцией и прогибом принимаем в соответствии с моделью Пастернака [16], согласно которой:

$$q_r(r) = -\kappa_0 w + t_f \Delta w, \quad (2.2)$$

где κ_0 – коэффициент сжатия, формально совпадающий с коэффициентом жесткости основания Винклера; t_f – коэффициент сдвига материала основания; Δ – оператор Лапласа

$$\Delta w(r) = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}.$$

Используя соотношения (1.2), (1.3), (2.1), (2.2) усилия в уравнениях (1.4) можно выразить через три искомые функции. В результате получим систему дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях, описывающую изгиб круговой трехслойной пластины на упругом основании Пастернака:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) &= -p, \\ L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) &= 0, \end{aligned}$$

$$L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) - \kappa_0 w + t_f \Delta w = -q_0, \quad (2.3)$$

где L_2, L_3 – дифференциальные операторы, a_n – коэффициенты, определяемые через модули упругости материалов и геометрические параметры слоев

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), \\ a_3 &= h_1(c + \frac{1}{2}h_1)K_1^+ - h_2(c + \frac{1}{2}h_2)K_2^+, \\ a_4 &= c^2(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3}c K_3^+), \\ a_5 &= c[h_1(c + \frac{1}{2}h_1)K_1^+ + h_2(c + \frac{1}{2}h_2)K_2^+ + \frac{2}{3}c^2 K_3^+], \\ a_6 &= h_1(c^2 + ch_1 + \frac{1}{3}h_1^2)K_1^+ + \\ &+ h_2(c^2 + ch_2 + \frac{1}{3}h_2^2)K_2^+ + \frac{2}{3}c^3 K_3^+, \\ K_k + \frac{4}{3}G_k &\equiv K_k^+, \quad K_k - \frac{2}{3}G_k \equiv K_k^-, \\ L_3(g) &\equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}, \\ L_2(g) &\equiv \left(\frac{1}{r}(rg)_{,r}\right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}. \end{aligned}$$

С помощью первых двух уравнений системы (2.3) в третьем уравнении обнуляем коэффициенты перед функциями u и ψ . После некоторых преобразований выделим дифференциальное уравнение четвертого порядка для определения прогиба $w(r)$:

$$\begin{aligned} w_{,rrrr} + \frac{2}{r}w_{,rrr} - \frac{1}{r^2}w_{,rr} + \frac{1}{r^3}w_{,r} - \\ - t_{f1} \left(w_{,rr} + \frac{1}{r}w_{,r} \right) + \kappa^4 w = q, \end{aligned} \quad (2.4)$$

или

$$\Delta^2 w - t_{f1} \Delta w + \kappa^4 w = q,$$

где

$$\kappa^4 = \kappa_0 D, \quad q = q_0 D, \quad t_{f1} = t_f D,$$

$$D = \frac{a_1(a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}.$$

Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее полученному уравнению (2.4), и введем в нем замену переменной $x = \kappa r$. В результате приходим к уравнению вида

$$\begin{aligned} w_{,xxxx} + \frac{2}{x}w_{,xxx} - \frac{1}{x^2}w_{,xx} + \frac{1}{x^3}w_{,x} - \\ - 2t_0^2 \left(w_{,xx} + \frac{1}{x}w_{,x} \right) + w = 0 \end{aligned}$$

или

$$\Delta^2 w - 2t_0^2 \Delta w + w = 0, \quad (2.5)$$

где

$$2t_0^2 = \frac{t_{f1}}{\kappa^2}, \quad \Delta w(x) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Уравнение (2.5) может быть приведено к системе эквивалентных ему двух уравнений второго порядка. Пусть $w = w(x)$ – некоторое частное решение однородного уравнения (2.5), удовлетворяющее в то же время уравнению

$$\Delta w + \lambda w = 0, \quad (2.6)$$

где λ – константа, подлежащая определению.

Исходя из уравнения (2.6), имеем

$$\Delta w = -\lambda w, \quad \Delta^2 w = \lambda^2 w. \quad (2.7)$$

Подставив теперь выражения (2.7) в исходное уравнение (2.5), получим относительно λ характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2t_0^2 \lambda + 1 = 0. \quad (2.8)$$

Значения корней характеристического уравнения (2.8) определяются формулами

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -t_0^2 + \sqrt{(t_0^2)^2 - 1}, \\ \lambda_2 &= -t_0^2 - \sqrt{(t_0^2)^2 - 1}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Следует отметить, что для реальных грунтов значение интегральной характеристики находится в пределах [16] $0 \leq t_0^2 \leq 1$. Случай $t_0^2 = 0$ соответствует отсутствию сил сдвига в упругом основании $t_f = 0$.

Таким образом, корни характеристического уравнения (2.8) можно рассматривать как комплексно сопряженные величины

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a = -a_1 + ib_1, \\ \lambda_2 &= \bar{a} = -a_1 - ib_1, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $a_1 = t_0^2$, $b_1 = \sqrt{1 - (t_0^2)^2}$.

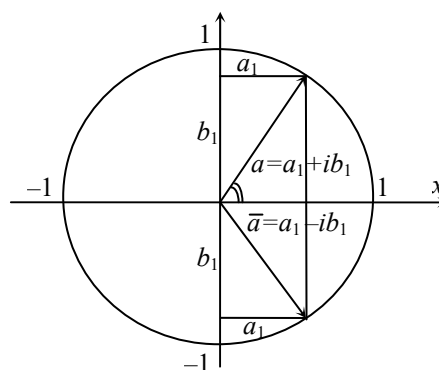


Рисунок 2.1 – Области расположения комплексных величин

Заметим, что комплексные величины (2.9) расположены в областях (рисунок 2.1)

$$\pi > \arg a \geq \frac{\pi}{2}, \quad -\pi < \arg \bar{a} \leq -\frac{\pi}{2} \quad (2.11)$$

и равны по модулю, согласно теореме Виета, свободному члену характеристического уравнения (2.8), т. е. равны единице:

$$|a| = 1, \quad |\bar{a}| = 1. \quad (2.12)$$

Исходя из уравнения (2.5), можно видеть, что двум комплексно сопряженным корням (2.10) соответствуют два линейно независимых уравнения второго порядка

$$\begin{aligned} w_{1,xx} + \frac{1}{x} w_{1,x} + aw_1 &= 0, \\ w_{2,xx} + \frac{1}{x} w_{2,x} + \bar{a}w_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Общий интеграл основного дифференциального уравнения (2.4) может быть теперь представлен в виде

$$w = w_1 + w_2 + w_p, \quad (2.14)$$

где w_1 и w_2 – фундаментальная система частных интегралов, удовлетворяющая дифференциальным уравнениям (2.13), а w_p – частный интеграл, соответствующий неоднородному уравнению (2.4).

Введем новые переменные по формулам:

$$u = \sqrt{ax}, \quad v = \sqrt{\bar{a}x}. \quad (2.15)$$

С введением новых переменных (2.15) преобразуем уравнение (2.13) к уравнениям Бесселя нулевого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dw_1}{du^2} + \frac{1}{u} \cdot \frac{dw_1}{du} + w_1 &= 0, \\ \frac{dw_2}{dv^2} + \frac{1}{v} \cdot \frac{dw_2}{dv} + w_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Решение системы (2.16), как это следует из теории бесселевых функций, можно записать в виде:

$$\begin{aligned} w_1(x) &= B_1 I_0(\sqrt{ax}) + B_2 H_0^{(1)}(\sqrt{ax}), \\ w_2(x) &= B_3 I_0(\sqrt{\bar{a}x}) + B_4 H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}x}), \end{aligned} \quad (2.17)$$

где $I_0(\sqrt{ax})$ и $I_0(\sqrt{\bar{a}x})$ – функции Бесселя первого рода, нулевого порядка, аргументов \sqrt{ax} и $\sqrt{\bar{a}x}$; $H_0^{(1)}(\sqrt{ax})$ и $H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}x})$ – функции Ганкеля первого и второго рода, нулевого порядка от тех же аргументов.

Используя решение (2.17), перепишем общий интеграл (2.14) в окончательной форме

$$\begin{aligned} w &= B_1 I_0(\sqrt{ax}) + B_2 H_0^{(1)}(\sqrt{ax}) + \\ &+ B_3 I_0(\sqrt{\bar{a}x}) + B_4 H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}x}) + w_p. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Отметим, что для решения практических задач аргумент цилиндрических функций, входящих в выражение (2.18), удобнее представить в показательной или тригонометрической форме:

$$\begin{aligned} \sqrt{a} &= e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi, \\ \sqrt{\bar{a}} &= e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \cdot \sin \varphi, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где $\varphi = \frac{1}{2} \arg a$, а модуль комплексных чисел

\sqrt{a} и $\sqrt{\bar{a}}$ в соответствии с (2.12) положен равным единице.

Из выражений (2.11) и (2.19) можно видеть, что функции

$$I_0(\sqrt{ax}), \quad I_0(\sqrt{\bar{a}x}), \quad H_0^{(1)}(\sqrt{ax}), \quad H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}x})$$

определены в областях

$$\frac{\pi}{2} > \varphi \geq \frac{\pi}{4}, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi \leq -\frac{\pi}{4}.$$

В частном случае, когда характеристика упругого основания на сдвиг t_f равна нулю ($t_f^2 = 0$), эти функции определяются вдоль прямой, наклоненной к действительной оси под углом $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Так как функции $I_0(\sqrt{ax})$, $I_0(\sqrt{\bar{a}x})$, $H_0^{(1)}(\sqrt{ax})$, $H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}x})$ являются комплексными, а функция прогибов пластины w должна быть действительной, то постоянные интегрирования B_1, B_2, B_3, B_4 также должны быть комплексными числами. Для того чтобы выразить решение задачи через действительные функции, перепишем интеграл (2.18) в другой форме

$$\begin{aligned} W &= C_1 u_0(\sqrt{ax}) + C_2 v_0(\sqrt{ax}) + \\ &+ C_3 f_0(\sqrt{ax}) + C_4 g_0(\sqrt{ax}) + w_p, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где введены следующие обозначения:

$$u_0(x) = \operatorname{Re} I_0(\sqrt{ax}) = \frac{I_0(\sqrt{ax}) + I_0(\sqrt{\bar{a}x})}{2},$$

$$v_0(x) = \operatorname{Im} I_0(\sqrt{\bar{a}x}) = \frac{I_0(\sqrt{ax}) - I_0(\sqrt{\bar{a}x})}{2i},$$

$$f_0(x) = \operatorname{Re} H_0^{(1)}(\sqrt{ax}) = \frac{H_0^{(1)}(\sqrt{ax}) + H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}x})}{2},$$

$$g_0(x) = \operatorname{Im} H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}x}) = \frac{H_0^{(1)}(\sqrt{ax}) - H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}x})}{2i}.$$

Из выражений (2.20) следует, что функции $u_0(x)$, $f_0(x)$ представляют собой действительные, а функции $v_0(x)$, $g_0(x)$ – мнимые части функций Бесселя и Ганкеля нулевого порядка. Так как эти функции действительны, то действительными будут и произвольные постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 , которые определяются из граничных условий типа (1.5).

Заключение

Полученное в работе общее решение можно использовать для исследования любого случая симметричного изгиба трёхслойной круговой пластины при опирании ее на упругое основание Пастернака.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин, В.В. Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.

2. Старовойтов, Э.И. Сопротивление материалов / Э.И. Старовойтов. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.
3. Горшков, А.Г. Гармоническое нагружение слоистых вязкоупругопластических систем / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2000. – № 6. – С. 91–98.
4. Starovoitov, E.I. Circular sandwich plates under local impulsive loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. – Vol. 39, № 8. – P. 945–952.
5. Starovoitov, E.I. Vibration of circular sandwich plates under resonance loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. – Vol. 39, № 12. – P. 1458–1463.
6. Плскачевский, Ю.М. Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием / Ю.М. Плскачевский, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 560 с.
7. Деформирование круговой трехслойной пластины на упругом основании / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2005. – № 1. – С. 16–22.
8. Старовойтов, Э.И. Изгиб прямоугольной трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Е.П. Доровская // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2006. – № 3. – С. 45–50.
9. Старовойтов, Э.И. Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, М. Сулейман // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2006. – № 4. – С. 55–62.
10. Starovoitov, É.I. Thermoplastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation / É.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2008. – Vol. 44, № 9. – P. 1032–1040.
11. Starovoitov, E.I. Impact of thermal and ionizing radiation on a circular sandwich plate on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2011. – Vol. 47, № 5. – P. 580–589.
12. Leonenko, D.V. Thermoplastic strain of circular sandwich plates on an elastic base / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // Mechanics of Solids. – 2009. – Vol. 44, № 5. – P. 744–755.
13. Starovoitov, E.I. Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // Mechanics of Solids. – 2011. – Vol. 46, № 2. – P. 291–298.
14. Leonenko, D.V. Thermal impact on a circular sandwich plate on an elastic foundation / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // Mechanics of Solids. – 2012. – Vol. 47, № 1. – P. 111–118.
15. Kuznetsova, E.L. Natural vibrations of three-layer circular cylindrical shells in an elastic medium / E.L. Kuznetsova, D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // Mechanics of Solids. – 2015. – Vol. 5, № 3. – P. 359–366. DOI: 10.3103/S0025654415030127.
16. Власов, В.З. Балки, плиты, оболочки на упругом основании / В.З. Власов, Н.Н. Леонтьев. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1960. – С. 226–235.

Поступила в редакцию 18.10.16.