539.121.7

К теории прохождения γ-квантов через вещество

В. С. Галишев

Дана аналитическая трактовка задачи прохождения γ-квантов через плоскопараллельную пластинку. Интегрально-дифференциальное уравнение проблемы при учете граничных условий для плотности потока рассеянных γ-квантов в n-м приближении сводится к системе $2n$ интегрально-дифференциальных уравнений первого порядка для коэффициентов разложения плотности потока рассеянных γ-квантов по полиномам Лежандра. Значения $2n$ произвольных постоянных определяются из $2n$ граничных условий. Окончательные результаты приведены лишь для случая $n=1$, дающего спектральное распределение плотности потока рассеянных γ-квантов на заданном расстоянии от источника.

Введение

В последнее время большое внимание уделяется прохождению γ-излучения через вещество. Распространяясь в различных поглощающих средах, γ-лучи поглощаются и рассеиваются, причем при большой толщине поглотителя основная доля их интенсивности приходится не на первичные, а на многократно рассеянные кванты. Вследствие многократного рассеяния ослабление интенсивности γ-квантов с увеличением глубины проникновения в поглотитель не может быть описано простым экспоненциальным законом. Ослабление излучения сложно зависит от энергии источника, его геометрической формы, а также от свойств и геометрии поглотителя. Для выяснения этой зависимости было предложено много методов различной степени строгости [1—4].

В настоящее время одним из наиболее строгих методов расчета прохождения γ-квантов через вещество принято считать так называемый метод моментов [5, 6]. Сущность этого метода состоит в том, что он сводит интегрально-дифференциальное кинетическое уравнение для функции плотности потока фотонов, зависящей от трех переменных, к системе связанных друг с другом интегральных уравнений для пространственно-угловых моментов функции плотности потока фотонов, которые зависят только от одной переменной. Систему интегральных уравнений решают с помощью численных методов, после чего по найденным моментам находят плотность потока фотонов.

Наиболее серьезное ограничение метода моментов — применение его только для бесконечной среды. Для расчета важной в практическом отношении ограниченной среды метод моментов по существу неприменим.

Цель настоящей работы — попытка аналитически трактовать простейшую граничную задачу при прохождении γ-квантов через вещество. Эта задача сводится к следующему. Допустим, что пучок монохроматических γ-квантов падает нормально на плоскопараллельную пластинку конечной толщины a в направлении оси x и бесконечной протяженности в направлениях осей y и z. Интерес представляет плотность потока фотонов, выходящих с поверхности ($x=a$), а также плотность потока фотонов, идущих обратно от поверхности ($x=0$).

Относительно использованного метода решения поставленной выше задачи можно заметить, что он во многом аналогичен методу Мертенса [7], примененному им при решении подобной задачи, но не для γ-квантов, а для заряженных частиц.

Применение метода Мертенса в теории многократного рассеяния γ-квантов

В основу наших рассуждений о решении сформулированной во введении граничной задачи прохождения γ-квантов через плоскопараллельную пластинку положим интегрально-дифференциальное уравнение переноса для источника, расположенного на безграничной плоскости ($x=0$) и испускающего кванты с длиной волны $\lambda^{*}=\lambda_0$ (в комптоновских единицах) нормально к его поверхности. Это уравнение можно записать следующим образом [1, 5]:

$$u_x \frac{\partial N(x, u_x, \lambda)}{\partial x} + \mu(\lambda) N(x, u_x, \lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda' K(\lambda', \lambda) \int_{4\pi} d\mathbf{u}' \frac{1}{2\pi} \delta(1 - \mathbf{u}\mathbf{u}' - \lambda + \lambda') \times N(x, u'_x, \lambda') \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\left. \begin{aligned} & N(0, u_x, \lambda) = \\ & = \frac{1}{2\pi} \delta(1-u_x)\, \delta(\lambda - \lambda_0) \quad \text{при} \quad u_x > 0; \\ & N(a, u_x, \lambda) = 0 \quad \text{при} \quad u_x < 0. \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

Здесь $N(x, u_x, \lambda)$ — плотность потока фотонов с длиной волны λ на расстоянии x от источника, образующих угол $\arccos u_x$ с нормалью к пластинке (осью x); $\mu(\lambda)$ — полный коэффициент ослабления среды для γ-квантов с длиной волны λ; $K(\lambda', \lambda)$ — коэффициент Клейна — Нишины для комптоновского рассеяния с изменением длины волны от λ' до λ; $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Из двух граничных условий (2) первое отражает тот факт, что γ-кванты входят внутрь пластины только нормально к ее поверхности ($x=0$), а второе соответствует предположению о том, что ни один из γ-квантов не возвращается назад с выходной поверхности ($x=a$).

Учитывая возможность применения метода Мертенса в теории многократного рассеяния γ-квантов в ограниченной среде, будем искать решение исходного уравнения (1) с граничными условиями (2) в виде

$$N(x, u_x, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \delta(1-u_x)\, \delta(\lambda - \lambda_0)\, e^{-\mu(\lambda_0)x} + N'(x, u_x, \lambda), \tag{3}$$

где первое слагаемое соответствует нерассеянному излучению, а второе — излучению, испытавшему рассеяние. Если далее подставить выражение (3) для полной плотности потока фотонов в уравнение (1) и учесть представление δ-функции через полиномы Лежандра, то нетрудно показать, что плотность потока рассеянных фотонов удовлетворяет уравнению

$$u_x \frac{\partial N'(x, u_x, \lambda)}{\partial x} + \mu(\lambda) N'(x, u_x, \lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda' K(\lambda', \lambda) \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{2l+1}{2}\right) P_l(1-\lambda+\lambda') P_l(u_x) \times \int_{-1}^{1} du'_x P_l(u'_x) N'(x, u'_x, \lambda) + e^{-\mu(\lambda_0)x} K(\lambda_0, \lambda) \times \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{2l+1}{4\pi}\right) P_l(1-\lambda+\lambda') P_l(u_x) \tag{4}$$

с граничными условиями

$$\left. \begin{aligned} N'(0, u_x, \lambda) = 0 \quad \text{при} \quad u_x > 0; \\ N'(a, u_x, \lambda) = 0 \quad \text{при} \quad u_x < 0. \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

Обозначим через $N_{+}(x, u_x, \lambda)$ и $N_{-}(x, u_x, \lambda)$ плотности потока рассеянных фотонов с длиной волны λ на расстоянии x от источника для $u_x > 0$ и $u_x < 0$ соответственно и разложим эти функции в ряды по полиномам Лежандра в интервалах $0-1$ и $-1-0$. Получим

$$N_{\pm}(x, u_x, \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} (2i+1) N_i^{\pm}(x, \lambda) P_i(2u_x \mp 1), \tag{6}$$

где $P_i(x)$ — полином Лежандра i-й степени. Тогда для коэффициентов разложения $N_i^{\pm}(x, \lambda)$ система интегрально-дифференциальных уравнений примет вид

$$i \frac{\partial N_{i-1}^{\pm}(x, \lambda)}{\partial x} \pm (2i+1) \frac{\partial N_i^{\pm}(x, \lambda)}{\partial x} + (i+1) \frac{\partial N_{i+1}^{\pm}(x, \lambda)}{\partial x} + 2(2i+1)\mu(\lambda) N_i^{\pm}(x, \lambda) = (2i+1) \int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda' K(\lambda', \lambda) \times \sum_{l=i}^{\infty} (2l+1) P_l(1-\lambda+\lambda') P_{li}^{\pm} \times \left\{ \sum_{r=0}^{l} (2r+1) P_{lr}^{-} N_r^{-}(x, \lambda') + \sum_{r=0}^{l} (2r+1) P_{lr}^{+} N_r^{+}(x, \lambda') \right\} + (2i+1) e^{-\mu(\lambda_0)x} K(\lambda_0, \lambda) \times \sum_{l=i}^{\infty} \left(\frac{2l+1}{2\pi}\right) P_l(1-\lambda+\lambda_0) P_{li}^{\pm} \tag{7}$$

с граничными условиями

$$N_i^{+}(0, \lambda) = 0, \qquad N_i^{-}(a, \lambda) = 0 \tag{8}$$

и

$$P_{li}^{+}=(-1)^{l+i}P_{li}^{-}=\int\limits_{0}^{1}P_{l}(x)\,P_{i}(2x-1)\,dx. \quad (9)$$

Для того чтобы получить решение в n-м приближении, сохраним систему, образованную n-первыми уравнениями (7): в n-м уравнении примем $N_n^+(x,\ \lambda)=N_n^-(x,\ \lambda)=0$ и, кроме того, всюду будем считать $P_n(1-\lambda+\lambda')=P_{n+1}(1-\lambda+\lambda')=\ldots=0$ (это фактически соответствует замене δ-функции в уравнении (1) конечным отрезком ее ряда Фурье по полиномам Лежандра). Таким образом, получим систему $2n$ линейных интегрально-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, позволяющих вычислить $2n$ неизвестных функций $N_i^{\pm}(x,\ \lambda)$ $[i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (n-1)]$. Значения $2n$ произвольных постоянных полностью определены условиями (8).

В первом приближении ($n=1$) для определения двух неизвестных функций $N_0^{\pm}(x,\ \lambda)$ имеем систему двух интегрально-дифференциальных уравнений

$$\pm\frac{\partial N_0^{\pm}(x,\ \lambda)}{\partial x}+2\mu(\lambda)\,N_0^{\pm}(x,\ \lambda)=\frac{1}{2\pi}K(\lambda_0,\ \lambda)\,e^{-\mu(\lambda_0)x}+\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}K(\lambda',\ \lambda)\,[N_0^{+}(x,\ \lambda')+N_0^{-}(x,\ \lambda')]\,d\lambda' \quad (10)$$

с граничными условиями

$$N_0^{+}(0,\ \lambda)=0,\quad N_0^{-}(a,\ \lambda)=0. \quad (11)$$

Приближенные аналитические выражения для решения системы уравнений (10) можно найти с помощью метода последовательных приближений.

В качестве «нулевого», наиболее грубого, приближения искомого решения возьмем функции $N_{00}^{\pm}(x,\ \lambda)$, определяемые из двух уравнений

$$\pm\frac{\partial N_{00}^{\pm}(x,\ \lambda)}{\partial x}+2\mu(\lambda)\,N_{00}^{\pm}(x,\ \lambda)=\frac{1}{2\pi}K(\lambda_0,\ \lambda)\,e^{-\mu(\lambda_0)x} \quad (12)$$

с граничными условиями

$$N_{00}^{+}(0,\ \lambda)=0,\qquad N_{00}^{-}(a,\ \lambda)=0. \quad (13)$$

Тогда для определения функций $N_{01}^{\pm}(x,\ \lambda)$ первого приближения будем иметь следующие два уравнения:

$$\pm\frac{\partial N_{01}^{\pm}(x,\ \lambda)}{\partial x}+2\mu(\lambda)\,N_{01}^{\pm}(x,\ \lambda)=\frac{1}{2\pi}K(\lambda_0,\ \lambda)\,e^{-\mu(\lambda_0)x}+\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}K(\lambda',\ \lambda)\,[N_{00}^{+}(x,\ \lambda')+N_{00}^{-}(x,\ \lambda')]\,d\lambda' \quad (14)$$

при

$$N_{01}^{+}(0,\ \lambda)=0,\qquad N_{01}^{-}(a,\ \lambda)=0. \quad (15)$$

Продолжая решение таким образом, получим две бесконечные последовательности функций

$$N_{00}^{\pm}(x,\ \lambda),\ N_{01}^{\pm}(x,\ \lambda),\ N_{02}^{\pm}(x,\ \lambda),\ \ldots,\ N_{0n}^{\pm}(x,\ \lambda),\ \ldots, \quad (16)$$

удовлетворяющих рекуррентным соотношениям

$$\pm\frac{\partial N_{0n}^{\pm}(x,\ \lambda)}{\partial x}+2\mu(\lambda)\,N_{0n}^{\pm}(x,\ \lambda)=\frac{1}{2\pi}K(\lambda_0,\ \lambda)\,e^{-\mu(\lambda_0)x}+\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}K(\lambda',\ \lambda)\,[N_{0,\,n-1}^{+}(x,\ \lambda')+N_{0,\,n-1}^{-}(x,\ \lambda')]\,d\lambda' \quad (17)$$

при

$$N_{0n}^{+}(0,\ \lambda)=0,\qquad N_{0n}^{-}(a,\ \lambda)=0\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \quad (18)$$

Если принять

$$N_{0n}^{\pm}(x,\ \lambda)-N_{0,\,n-1}^{\pm}(x,\ \lambda)=\overline{N}_{0n}^{\pm}(x,\ \lambda), \quad (19)$$

то

$$N_{0n}^{\pm}(x,\ \lambda)=\sum_{\nu=0}^{n}\overline{N}_{0\nu}^{\pm}(x,\ \lambda), \quad (20)$$

где

$$\overline{N}_{00}^{\pm}(x,\ \lambda)=N_{00}^{\pm}(x,\ \lambda)$$

и

$$\pm\frac{\partial\overline{N}_{0n}^{\pm}(x,\ \lambda)}{\partial x}+2\mu(\lambda)\,\overline{N}_{0n}(x,\ \lambda)=\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}K(\lambda',\ \lambda)\,[\overline{N}_{0,\,n-1}^{+}(x,\ \lambda')+\overline{N}_{0,\,n-1}^{-}(x,\ \lambda')]\,d\lambda' \quad (21)$$

при

$$\overline{N}^{+}_{0n}(0,\ \lambda)=0,\quad \overline{N}^{-}_{0n}(a,\ \lambda)=0$$
$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,). \tag{22}$$

Решения уравнений (21), удовлетворяющие граничным условиям (22), имеют вид

$$\overline{N}^{+}_{0n}(x,\ \lambda)=\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda' K(\lambda',\ \lambda)\int\limits_{0}^{x} dx' e^{-2\mu(\lambda)(x-x')}\times$$
$$\times[\overline{N}^{+}_{0,\,n-1}(x',\ \lambda')+\overline{N}^{-}_{0,\,n-1}(x',\ \lambda')], \tag{23}$$

$$\overline{N}^{-}_{0n}(x,\ \lambda)=\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda' K(\lambda',\ \lambda)\int\limits_{x}^{a} dx' e^{-2\mu(\lambda)(x'-x)}\times$$
$$\times[\overline{N}^{+}_{0,\,n-1}(x',\ \lambda')+\overline{N}^{-}_{0,\,n-1}(x',\ \lambda')]. \tag{24}$$

Различие выражений (23) и (24) состоит в том, что в первом из них интеграл $\int\limits_0^x dx'\ \ldots$ заменен $\int\limits_x^a dx'\ \ldots$ и, кроме того, в экспоненте x и x' меняются местами. Поэтому последующие преобразования вполне достаточно проводить, например, с $\overline{N}^{+}_{0n}(x,\ \lambda)$. Выразим интеграл через $N^{+}_{00}(x,\ \lambda)$. Для $n=1$ получим

$$\overline{N}^{+}_{01}(x,\ \lambda)=\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda_1 K(\lambda_1,\ \lambda)\int\limits_{0}^{x} dx_1 e^{-2\mu(\lambda)(x-x_1)}\times$$
$$\times[N^{+}_{00}(x_1,\ \lambda_1)+N^{-}_{00}(x_1,\ \lambda_1)]. \tag{25}$$

Если же $n>1$, то соответствующее выражение принимает более сложный вид:

$$\overline{N}^{+}_{0n}(x,\ \lambda)=\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda_1 K(\lambda_1,\ \lambda)\int\limits_{0}^{x} dx_1 e^{-2\mu(\lambda)(x-x_1)}\times$$
$$\times\prod_{i=2}^{n}\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda_{i-1}} d\lambda_i K(\lambda_i,\ \lambda_{i-1})\times$$
$$\times\Bigg[\int\limits_{0}^{x_{i-1}} dx_i e^{-2\mu(\lambda_{i-1})(x_{i-1}-x_i)}+$$
$$+\int\limits_{x_{i-1}}^{a} dx_i\, e^{-2\mu(\lambda_{i-1})(x_i-x_{i-1})}\Bigg]\times$$
$$\times[N^{+}_{00}(x_n,\ \lambda_n)+N^{-}_{00}(x_n,\ \lambda_n)]. \tag{26}$$

Естественно далее ожидать, что решения системы двух интегрально-дифференциальных уравнений (10) с граничными условиями (11) будут иметь вид суммы бесконечных рядов

$$N^{\pm}_{0}(x,\ \lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{N}^{\pm}_{0n}(x,\ \lambda), \tag{27}$$

где выражения для $\overline{N}^{+}_{0n}$ определяются формулами (25) и (26), а соответствующие выражения для $\overline{N}^{-}_{0n}$ — формально из них подобно тому, как из (23) получается (24).

Таким образом, метод последовательных приближений действительно позволяет проводить общее исследование первого приближения к задаче о прохождении γ-квантов через плоскопараллельную пластинку.

Заключение

Спектральное распределение плотности потока рассеянных фотонов на расстоянии x от источника определяется интегралом от $N'(x,\ u_x,\ \lambda)$ по всем возможным значениям u_x. Согласно выражению (6) этот интеграл

$$\int\limits_{-1}^{1} N'(x,\ u_x,\ \lambda)\,du_x=N^{+}_{0}(x,\ \lambda)+N^{-}_{0}(x,\ \lambda). \tag{28}$$

Величины $N^{\pm}_{0}(x,\lambda)$ приближенно определяются первым приближением, рассмотренным в предыдущем разделе.

Следовательно, проведенные выше расчеты указывают способ приближенного вычисления спектрального распределения плотности потока рассеянных фотонов в задаче о прохождении γ-квантов через плоскопараллельную пластинку. На ее выходной поверхности вследствие граничных условий (8) $N^{-}_{0}(a,\lambda)=0$ и спектральное распределение плотности потока рассеянных фотонов определяется через

$$N^{+}_{0}(a,\ \lambda)=\overline{N}^{+}_{00}(a,\ \lambda)+\overline{N}^{+}_{01}(a,\ \lambda)+$$
$$+\overline{N}^{+}_{02}(a,\ \lambda)+\ \ldots\ . \tag{29}$$

Для $\overline{N}^{+}_{00}(a,\ \lambda)$ из уравнения (12) при учете граничного условия (13) находим

$$N^{+}_{00}(a,\ \lambda)=\frac{K(\lambda_0,\ \lambda)}{2\pi\,[2\mu(\lambda)-\mu(\lambda_0)]}e^{-\mu(\lambda_0)a}\times$$
$$\times[1-e^{-[2\mu(\lambda)-\mu(\lambda_0)]a}]. \tag{30}$$

Выражения для других слагаемых, входящих в (29), также легко получить, пользуясь формулами (25) и (26). На входной поверхности пластинки спектральное распределение плотности потока рассеянных фотонов определяется через

$$N_0^-(o,\ \lambda) = \overline{N}_{00}^-(o,\ \lambda) + \overline{N}_{01}^-(o,\ \lambda) + \overline{N}_{02}^-(o,\ \lambda) + \ \dots, \tag{31}$$

где

$$\overline{N}_{00}^-(o,\ \lambda) = \frac{K(\lambda_0,\ \lambda)}{2\pi\,[2\mu(\lambda) + \mu(\lambda_0)]}\left(1 - e^{-[2\mu(\lambda)+\mu(\lambda_0)]a}\right), \tag{32}$$

а выражения для всех других слагаемых также легко установить на основании выражений, подобных (25) и (26).

Применение предложенной методики расчета прохождения γ-квантов через вещество к конкретным случаям будет рассмотрено в специальной работе.

Поступила в Редакцию 26/VII 1962 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Галишев, В. И. Огиевецкий, А. Н. Орлов. «Усп. физ. наук», **61**, 161 (1957).
2. Н. Ф. Нелипа. Введение в теорию многократного рассеяния частиц. М., Атомиздат, 1960.
3. О. И. Лейпунский, Б. В. Новожилов, В. Н. Сахаров. Распространение гамма-квантов в веществе. М., Физматгиз, 1960.
4. U. Faho, L. Spencer, M. Berger. Penetration and Diffusion of X-rays Handbuch der Physik, 38/2, 660 ed. Berlin, Springer, 1959.
5. L. Spencer, U. Fano. J. Res. Nat. Bur. Standards, **46**, 446 (1951).
6. H. Goldstein, J. Wilkins. Calculations of the Penetration of Camma Rays. NYO-3075, 1954.
7. R. Mertens. Compt. rend., **236**, 1753 (1953); **237**, 1644 (1953); **238**, 53 (1954).