МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

НОРМАЛЬНАЯ ФАКТОРИЗУЕМОСТЬ СУБНОРМАЛЬНОЙ В КОНЕЧНОЙ ГРУППЕ ПОДГРУППЫ В СВЯЗИ С ЛОКАЛЬНЫМИ ФОРМАЦИЯМИ И ОБОБЩЁННЫМИ ПОДГРУППАМИ ФРАТТИНИ. ФОРМАЦИОННЫЕ РАДИКАЛЫ

Л.М. Белоконь

Могилёвский государственный университет продовольствия

A NORMAL FACTORIZATION OF A SUBNORMAL SUBGROUP OF SOME FINITE GROUP IN CONNECTION WITH LOCAL FORMATIONS AND GENERALIZED FRATTINI SUBGROUPS. FORMATION RADICALS

L.M. Belokon

Mogilev State University of Food Technologies

Пусть π − некоторое множество простых чисел, $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$ − локальная формация конечных групп. Исследуются условия факторизуемости субнормальной подгруппы H группы G нормальными в H подгруппами H_1 и H_2 такими, что $H_1 \cap H_2 = \mathrm{O}_\pi(H)$, $H_1 \in \mathfrak{F}$, H_2 принадлежит определённой обобщённой подгруппе Фраттини группы G, причём $\pi(H_2/\mathrm{O}_\pi(H)) \bigcap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$. Получены утверждения, эквивалентные утверждениям о соответствующих факторизациях, функторно обобщённые, с вытекающими следствиями для $\pi = \varnothing$. Исследуется строение формационных радикалов факторгрупп субнормальных подгрупп конечных групп в связи с обобщёнными подгруппами Фраттини.

Ключевые слова: *локальные и радикальные локальные формации конечных групп*, *обобщённые подгруппы Фраттини*, *подгрупповой m-функтор*, $\mathfrak{F}$ *-радикалы.*

Let π be a set of primes, $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$ − a local formation of finite groups. The conditions of factorability of a subnormal subgroup H of a finite group G by normal subgroups H_1 и H_2 such that $H_1 \cap H_2 = \mathrm{O}_\pi(H)$, $H_1 \in \mathfrak{F}$, H_2 belongs to some generalized Frattini subgroup of a group G and $\pi(H_2/\mathrm{O}_\pi(H)) \bigcap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$ are investigated. Statements, equivalent to the statements on the respective factorizations, functorially generalized, with the consequences for $\pi = \varnothing$ are achieved. The structure of formation radicals of factorgroups of subnormal subgroups of finite groups in connection with generalized Frattini subgroups is investigated.

Keywords: *local and radical local formations of finite groups*, *generalized Frattini subgroups*, *subgroup m-functor*, $\mathfrak{F}$ *-radicals.*

Введение

Рассматриваются только конечные группы и формации конечных групп. Используются определения и обозначения, принятые в монографии [1].

Пусть $\mathfrak{F}$ − локальная формация. Классическая теорема Л.А. Шеметкова [1, теорема 4.2] о том, что нормальная подгруппа H, удовлетворяющая условию $H/H \cap \Phi(G) \in \mathfrak{F}$, представима в виде прямого произведения $H = H_1 \times H_2$, где $H_1 \in \mathfrak{F}$, $\pi(H_2) \bigcap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$, $H_2 \subseteq \Phi(G)$, широко используется при изучении формационных свойств групп, связанных с пересечениями максимальных подгрупп. С другой стороны, теоремой 3.1 из [2] было установлено, что субнормальная подгруппа H группы G принадлежит локальной формации $\mathfrak{F}$, если она содержит $\mathrm{O}_{\pi(\mathfrak{F})}(\Phi(G))$ и $H/\mathrm{O}_{\pi(\mathfrak{F})}(\Phi(G)) \in \mathfrak{F}$; при дополнительном для $\mathfrak{F}$ условии S_n-замкнутости доказана принадлежность H локальной формации $\mathfrak{F}$, если $H/H \cap \mathrm{O}_{\pi(\mathfrak{F})}(\Delta^{\mathfrak{F}}(G)) \in \mathfrak{F}$. Теорема 4.2[1] и результаты работы [2] получили развитие в публикациях разных авторов в отношении конкретных случаев для обобщённо нормальных подгрупп H в зависимости от свойств формации $\mathfrak{F}$ и в связи с обобщёнными подгруппами Фраттини группы G. Так, в работах [3], [4] исследовался вопрос о наличии схожих закономерностей в отношении обобщённых подгрупп Фраттини при использовании понятия абнормально полного регулярного m_α -функтора.

Пусть H − субнормальная подгруппа группы G, $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$ − локальная S_n-замкнутая формация, подгруппа $\Phi_\pi(G)$ группы G обладает свойством C_π. В разделе 2 настоящей работы показано (лемма 2.2), что $H/H \cap \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда факторгруппа $H/\mathrm{O}_\pi(H)$ представима в виде

$$H/O_\pi(H) = H_1/O_\pi(H) \times H_2/O_\pi(H),$$

где $H_1 \in \mathfrak{F}$, $\pi(H_2/O_\pi(H)) \bigcap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$, $H_2 \subseteq \Phi_\pi(G)$. В частности, установлена π'-сверхразрешимость субнормальной подгруппы H группы G с подгруппой $\Phi_\pi(G)$, обладающей свойством C_π, в случае, если π'-сверхразрешима факторгруппа $H/H \cap \Delta_\pi^{\mathfrak{A}^{\pi'}}(G)$, $\mathfrak{A}^{\pi'}$ − формация всех π'-сверхразрешимых групп (следствие 2.2.2 леммы 2.2). Кроме того, для субнормальной подгруппы H группы G лемма 2.2 включает (в случае $\pi = \varnothing$) высказывание о равносильности утверждения $H/H \cap \Delta^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$ утверждению о разложимости группы H в прямое произведение $H = H_1 \times H_2$, где $H_1 \in \mathfrak{F}$, $\pi(H_2) \bigcap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$, $H_2 \subseteq \Phi(G)$, $\mathfrak{F}$ − локальная S_n-замкнутая формация (лемма 2.1). Получены функторные обобщения приведенных результатов с использованием $\mathfrak{F}$-абнормально π'-полного и $\mathfrak{F}$-абнормально полного подгрупповых m_s-функторов.

В разделе 3 предлагаемой работы исследуется влияние $\mathfrak{F}$-радикала субнормальной в группе G подгруппы L, содержащей нормальную подгруппу K, $K \subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G)$ $(K \subseteq \Phi_\theta(G))$, на строение $\mathfrak{F}$-радикала факторгруппы L/K, θ − $\mathfrak{F}$-абнормально π'-полный подгрупповой m_s-функтор, $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ − радикальная локальная формация (θ − $\mathfrak{F}$-абнормально полный подгрупповой m_s-функтор, $\mathfrak{F}$ − радикальная локальная формация, соответственно). Среди приложений полученных результатов для конкретных формаций отметим, в частности, следующее. Если θ − $\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p$-абнормально полный подгрупповой m_s-функтор, p − простое число, то справедливо равенство $F_p(L/K) = F_p(L)/K$ для субнормальной в группе G подгруппы L, если нормальная в L подгруппа K удовлетворяет условию $K \subseteq \Phi_\theta(G)$ (а значит, и в случаях $K \subseteq \Phi_i(G)$, $i \in \{1,2,3\}$, где $\Phi_1(G) = \Phi(G)$, $\Phi_2(G) = \Delta(G)$, $\Phi_3(G) = \Delta^{\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p}(G)$). Отмеченное приложение нашло применение в исследованиях раздела 4 настоящей работы.

Основной теоремой раздела 4 является теорема 4.1, устанавливающая для локальной формации $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$, абнормально π'-полного подгруппового m_s-функтора θ и субнормальной подгруппы H группы G с подгруппой $\Phi_\pi(G)$, обладающей свойством C_π, равносильность утверждения $H/H \cap \Phi_{\theta_\pi}(G) \in \mathfrak{F}$ следующему утверждению: факторгруппа $H/O_\pi(H)$ представима в виде прямого произведения

$$H/O_\pi(H) = H_1/O_\pi(H) \times H_2/O_\pi(H),$$

где $H_1 \in \mathfrak{F}$; $\pi(H_2/O_\pi(H)) \bigcap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$; $H_2 \subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G)$. Следствия 4.1.5 и 4.1.6 теоремы 4.1, рассматриваемые для абнормально полного подгруппового m_s-функтора θ, не предполагают в условии его регулярность. Кроме того, теорема 5.2, как одно из приложений теоремы 4.1, содержит следствие 5.2.4, включающее теорему M.J. Tomkinson [2, теорема 3.1] как частный случай. В разделе 5 рассматриваются другие приложения теорем 2.1 и 4.1, включая утверждения, усиливающие или обобщающие ранее доказанные и опубликованные результаты.

1 Предварительные сведения

Под подгрупповым m-функтором будем понимать всякое отображение θ, которое ставит в соответствие каждой группе G множество $\theta(G)$, состоящее из группы G и некоторых её максимальных подгрупп. Подгруппы множества $\theta(G)$ называют θ-подгруппами группы G, через $\Phi_\theta(G)$ обозначают пересечение всех θ-подгрупп группы G. Определение подгруппового m-функтора θ, включающее условие $\theta(G^\varphi) = \{H^\varphi \mid H \in \theta(G)\}$ для любого изоморфизма φ группы G, вводилось в [5]; будем называть такой функтор подгрупповым m_i-функтором.

Определение подгруппового m-функтора θ, включающее условие $\theta(G^\alpha) = \{H^\alpha \mid H \in \theta(G)\}$ для любого автоморфизма α группы G, использовалось в [3], [4]. Подгрупповой m-функтор, отвечающий данному условию, будем называть подгрупповым m_α-функтором.

Подгрупповой m_i-функтор θ называют регулярным [5], если для любой нормальной подгруппы N группы G выполняются следующие условия:

1) из $H \in \theta(G)$ всегда следует

$$HN/N \in \theta(G/N);$$

2) из $H/N \in \theta(G/N)$ всегда следует $H \in \theta(G)$.

Подгрупповой m_α-функтор θ, для которого выполнены указанные условия 1) и 2), будем называть регулярным подгрупповым m_α-функтором.

Подгрупповой m-функтор θ назовём подгрупповым m_s-функтором при выполнении условия: если $H \in \theta(G)$, то $H^x \in \theta(G)$ для всех $x \in G$.

Обозначаем через π некоторое множество простых чисел, $\pi' = P \setminus \pi$, где P − множество всех простых чисел, считаем также, что $\pi \neq P$. Пусть $\mathfrak{F}$ − непустая формация, θ − подгрупповой m-функтор. Через $M(G)$ будем обозначать множество всех максимальных подгрупп группы G;

$\mathrm{M}_\theta(G)$ − множество всех максимальных θ-подгрупп группы G; $\mathrm{M}_\pi(G)$ − множество всех максимальных подгрупп группы G, имеющих взаимно простые с числами из π индексы; $\mathrm{M}^{\mathfrak{F}}(G)$ − множество всех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подгрупп группы G;

$$\mathrm{M}_\pi^{\mathfrak{F}}(G)=\mathrm{M}_\pi(G)\cap\mathrm{M}^{\mathfrak{F}}(G);$$
$$\mathrm{M}_{\theta_\pi}(G)=\mathrm{M}_\theta(G)\cap\mathrm{M}_\pi(G).$$

Если в группе G функтор θ выделяет саму группу G и все максимальные (все максимальные $\mathfrak{F}$-абнормальные) подгруппы в G, то

$$\Phi_{\theta_\pi}(G)=\Phi_\pi(G)=\cap H,\ \ H\in\mathrm{M}_\pi(G)$$

($\Phi_{\theta_\pi}(G)=\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)=\cap H,\quad H\in\mathrm{M}_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$, соответственно). Для формации всех нильпотентных групп $\mathfrak{N}$ используется обозначение: $\Delta_\pi^{\mathfrak{N}}(G)=\Delta_\pi(G)$. В случае отсутствия в группе G максимальных подгрупп, отвечающих требуемым условиям, соответствующие пересечения полагаем совпадающими с G.

***Определение* 1.1** [6]. *Пусть $\mathfrak{F}$ − непустая формация. Подгрупповой m-функтор θ называется $\mathfrak{F}$-абнормально π'-полным подгрупповым m-функтором, если $\theta(G)\supseteq\mathrm{M}_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$ для любой группы G. В случае $\mathfrak{F}=\mathfrak{N}$ функтор θ называется абнормально π'-полным подгрупповым m-функтором.*

Определение 1.1 включает понятие $\mathfrak{F}$-абнормально полного подгруппового *m*-функтора [7] (случай $\pi=\varnothing$). Заметим, что в случае, когда формация $\mathfrak{F}$ содержит формацию всех нильпотентных групп $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{F}\neq\mathfrak{N}$, условие: θ − $\mathfrak{F}$-абнормально π'-полный ($\mathfrak{F}$-абнормально полный) подгрупповой *m*-функтор является более слабым, чем условие: θ − абнормально π'-полный (абнормально полный, соответственно) подгрупповой *m*-функтор. Заметим также, что

$$\{G\}\cup\mathrm{M}_\pi(G)\supseteq\theta_\pi(G)\supseteq\mathrm{M}_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$$

для всякой группы G и $\mathfrak{F}$-абнормально π'-полного подгруппового *m*-функтора θ, а значит, $\Phi_\pi(G)\subseteq\Phi_{\theta_\pi}(G)\subseteq\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$.

Сформулируем в виде леммы некоторые опубликованные результаты, которые будут использованы в настоящей работе.

***Лемма* 1.1.** *Имеют место следующие утверждения.*

(1) [8, лемма 1]. *Пусть подгруппа $\Phi_\pi(G)$ группы G обладает свойством C_π. Тогда*

$$\Phi_\pi(G)/\mathrm{O}_\pi(G)=\Phi(G/\mathrm{O}_\pi(G)).$$

(2) [8, лемма 2]. *Пусть N − нормальная подгруппа группы G. Если $N\subseteq\Phi_\pi(G)$ $(N\subseteq\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G))$, то $\Phi_\pi(G)/N=\Phi_\pi(G/N)$ $(\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)/N=\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G/N)$, соответственно).*

(3) [8, теорема 1]. *Пусть $\mathfrak{F}$ − локальная формация. Если подгруппа $\Phi_\pi(G)$ группы G обладает свойством C_π, то*

$$\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)/\mathrm{O}_\pi(G)=\Delta^{\mathfrak{F}}(G/\mathrm{O}_\pi(G)).$$

(4) [9, лемма 4]. *Пусть $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ − локальная S_n-замкнутая формация, содержащая класс всех нильпотентных π'-групп $\mathfrak{N}_{\pi'}$. Если подгруппа $\Phi_\pi(G)$ группы G обладает свойством C_π, то $\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)\in\mathfrak{F}$.*

(5) [7, лемма 1.1]. *Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ − непустые формации, $\pi(\mathfrak{F}_1)\cap\pi(\mathfrak{F}_2)=\varnothing$, $\mathfrak{F}_0=\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$. Для всякой формации $\mathfrak{F}_3$, удовлетворяющей условию $\mathfrak{F}_2\subseteq\mathfrak{F}_3\subseteq\mathfrak{F}_0$, и максимальной, $\pi(\mathfrak{F}_2)$-индекса подгруппы H в группе G равносильны условия: подгруппа H $\mathfrak{F}_i$-абнормальна в G, $i\in\{0,2,3\}$.*

В частности, учитывая утверждение (4), *$\Delta_\pi(G)\in\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}$, если подгруппа $\Phi_\pi(G)$ группы G обладает свойством C_π.*

(6) [2, следствие 3.3 теоремы 3.1]. *Пусть $\mathfrak{F}$ − локальная, замкнутая относительно взятия субнормальных подгрупп, формация, H − субнормальная подгруппа группы G. И пусть $H/H\cap\mathrm{O}_{\pi(\mathfrak{F})}(\Delta^{\mathfrak{F}}(G))\in\mathfrak{F}$. Тогда $H\in\mathfrak{F}$.*

Следствие 3.1.3 теоремы 3.1 настоящей работы включает утверждение, использующее обозначение $\mathfrak{F}_{\pi'}^{\mathfrak{M}}$, которое вводится следующим образом: $\mathfrak{F}_{\pi'}^{\mathfrak{M}}=\bigcap\limits_{\varphi\in\mathfrak{M}}(\mathfrak{F}_\varphi)_{\pi'}$, где $(\mathfrak{F}_\varphi)_{\pi'}$ − формация всех φ-дисперсивных π'-групп, φ пробегает некоторое множество $\mathfrak{M}$ линейных упорядочений множества всех простых π'-чисел. Тогда $\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}_{\pi'}^{\mathfrak{M}}$ − радикальная локальная формация, содержащая $\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}$ [9]. В случае $\pi=\varnothing$ формацию $\mathfrak{F}_{\pi'}^{\mathfrak{M}}$ обозначаем $\mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}=\bigcap\limits_{\varphi\in\mathfrak{M}}\mathfrak{F}_\varphi$. Обозначение $\mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}$ присутствует в формулировке следствия 3.2.4 теоремы 3.2.

Заметим, что ввиду леммы 4.2 [1] локальная формация $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда содержит формацию всех нильпотентных групп (равносильно − всех нильпотентных π'-групп для локальной формации $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$), когда $\pi(\mathfrak{F})=\mathrm{P}$ − множество всех простых чисел. Заметим также, что условие нормальной наследственности (S_n-замкнутости) непустой формации $\mathfrak{F}$ равносильно условию субнормальной наследственности, т.е. замкнутости $\mathfrak{F}$ относительно взятия субнормальных подгрупп.

2 Факторизуемость субнормальной подгруппы H группы G нормальными в H подгруппами H_1 и H_2 такими, что $H_1 \cap H_2 = \mathrm{O}_\pi(H)$, $H_1 \in \mathfrak{F}$, $\pi(H_2/\mathrm{O}_\pi(H)) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$, $H_2 \subseteq \Phi_\pi(G)$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ − локальная S_n-замкнутая формация

***Лемма* 2.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ − локальная S_n-замкнутая формация, H − субнормальная подгруппа группы G. Тогда следующие утверждения* I *и* II *равносильны.*

I. $H/H \cap \Delta^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$.

II. *Группа H представима в виде прямого произведения $H = H_1 \times H_2$, где*:

(1) $H_1 \in \mathfrak{F}$;

(2) $\pi(H_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$;

(3) $H_2 \subseteq \Phi(G)$.

Доказательство. Пусть выполняется утверждение I, т. е. $H/H \cap \Delta^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$. Обозначим $\pi(\mathfrak{F}) = \pi$, $\mathfrak{G}_\pi \times \mathfrak{G}_{\pi'} = \mathfrak{X}$. Так как $\Delta^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq \Delta^{\mathfrak{X}}(G)$, ибо $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, то $H/H \cap \Delta^{\mathfrak{X}}(G) \in \mathfrak{X}$. А так как $\pi(\mathfrak{X}) = \mathrm{P}$, $\mathfrak{X}$ − S_n-замкнутая локальная формация, то по утверждению (6) леммы 1.1 $H = H_1 \times H_2$, $H_1 \in \mathfrak{G}_\pi$, $H_2 \in \mathfrak{G}_{\pi'}$. По теореме 8.7 [1] $\Delta^{\mathfrak{F}}(G) = A \times B$, где $A \in \mathfrak{F}$, $\pi(B) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$, $B \subseteq \Phi(G)$. Следовательно, $H \cap \Delta^{\mathfrak{F}}(G) = K \times H_2$, $K = H_1 \cap A$, $H_2 \subseteq B$. Из условия $H_1/K \cong H/H \cap \Delta^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$ получаем $H_1/H_1 \cap A = H_1/H_1 \cap \mathrm{O}_\pi(\Delta^{\mathfrak{F}}(G)) \in \mathfrak{F}$. По утверждению (6) леммы 1.1 $H_1 \in \mathfrak{F}$. Значит, утверждение II выполняется.

Пусть выполняется утверждение II. Из условия $H = H_1 \times H_2$, где $H_1 \in \mathfrak{F}$, $H_2 \subseteq \Phi(G)$, следует $H/H_2 \cong H_1 \in \mathfrak{F}$, а значит, $H/H \cap \Delta^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$, так как $\Phi(G) \subseteq \Delta^{\mathfrak{F}}(G)$. □

***Следствие* 2.1.1** [2]. *Пусть $\mathfrak{F}$ − локальная S_n-замкнутая формация, H − субнормальная подгруппа группы G. И пусть $H/H \cap \Delta^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$. Если $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{P}$, то $H \in \mathfrak{F}$.*

Следствие 2.1.1 леммы 2.1 непосредственно вытекает из утверждения (6) леммы 1.1 [2, следствие 3.3 теоремы 3.1]. Для случая, когда подгруппа *H* нормальна в группе *G*, этот результат доказан Селькиным М.В. [1, теорема 8.12].

Так как $\Phi(G) \subseteq \Phi_\theta(G) \subseteq \Delta^{\mathfrak{F}}(G)$ для $\mathfrak{F}$-абнормально полного подгруппового *m*-функтора θ, то из леммы 2.1 вытекает

***Следствие* 2.1.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ − локальная S_n-замкнутая формация. И пусть H − субнормальная подгруппа группы G. Тогда следующие утверждения* (1)–(4) *равносильны.*

(1) $H/H \cap \Delta^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$.

(2) $H/H \cap \Phi(G) \in \mathfrak{F}$.

(3) $H/H \cap \Phi_\theta(G) \in \mathfrak{F}$, *где θ − $\mathfrak{F}$-абнормально полный подгрупповой m_s-функтор.*

(4) *Группа H представима в виде прямого произведения $H = H_1 \times H_2$, где*

$H_1 \in \mathfrak{F}$; $\pi(H_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$; $H_2 \subseteq \Phi(G)$.

***Следствие* 2.1.3.** *Пусть $\mathfrak{F}$ − локальная S_n-замкнутая формация, θ − $\mathfrak{F}$-абнормально полный подгрупповой m_s-функтор. И пусть H − субнормальная подгруппа группы G, $H/H \cap \Phi_\theta(G) \in \mathfrak{F}$.* Если $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{P}$, *то* $H \in \mathfrak{F}$.

***Лемма* 2.2.** *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ − локальная S_n-замкнутая формация. И пусть H – субнормальная подгруппа группы G, подгруппа $\Phi_\pi(G)$ обладает свойством C_π. Тогда следующие утверждения* I *и* II *равносильны.*

I. $H/H \cap \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$.

II. *Факторгруппа $H/\mathrm{O}_\pi(H)$ представима в виде прямого произведения*

$$H/\mathrm{O}_\pi(H) = H_1/\mathrm{O}_\pi(H) \times H_2/\mathrm{O}_\pi(H),$$

где:

1) $H_1 \in \mathfrak{F}$;

2) $\pi(H_2/\mathrm{O}_\pi(H)) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$;

3) $H_2 \subseteq \Phi_\pi(G)$.

Доказательство. Пусть выполнено утверждение I, т. е. $H/H \cap \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$. Введём следующие обозначения:

$$\overline{G} = G/\mathrm{O}_\pi(G),$$

$$\overline{H} = H\,\mathrm{O}_\pi(G)/\mathrm{O}_\pi(G).$$

Тогда

$$\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G/\mathrm{O}_\pi(G)) = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)/\mathrm{O}_\pi(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G/\mathrm{O}_\pi(G))$$

по утверждениям (2) и (3) леммы 1.1,

$$\Phi_\pi(G)/\mathrm{O}_\pi(G) = \Phi(\overline{G})$$

по утверждению (1) леммы 1.1. Далее,

$$\overline{H}/\overline{H} \cap \Delta^{\mathfrak{F}}(\overline{G}) \cong H\,\mathrm{O}_\pi(G)/H\mathrm{O}_\pi(G) \cap \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \cong$$

$$\cong H/(H \cap \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G))\mathrm{O}_\pi(H) = H/H \cap \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F},$$

ибо подгруппа $\mathrm{O}_\pi(H)$ субнормальна в G, а ввиду следствия 7.7.2 теоремы 7.7 [1] $H \cap \mathrm{O}_\pi(G) = \mathrm{O}_\pi(H)$. Применяя лемму 2.1, получаем: $\overline{H} = N_1/\mathrm{O}_\pi(G) \times N_2/\mathrm{O}_\pi(G)$, где $N_1/\mathrm{O}_\pi(G) \in \mathfrak{F}$, $\pi(N_2/\mathrm{O}_\pi(G)) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$, $N_2/\mathrm{O}_\pi(G) \subseteq \Phi(\overline{G})$. Пусть $i \in \{1,2\}$. Так как

$$N_i = N_i \cap H\,\mathrm{O}_\pi(G) = (N_i \cap H)\,\mathrm{O}_\pi(G),$$

то, обозначая $N_i \cap H = H_i$, для каждого $i \in \{1,2\}$ имеем: H_i − нормальная подгруппа H,

$$N_i/\mathrm{O}_\pi(G) \cong H_i/N_i \cap H \cap \mathrm{O}_\pi(G) = H_i/\mathrm{O}_\pi(H);$$

$H_1/\mathrm{O}_\pi(H) \in \mathfrak{F}$, откуда

$$H_1 \in \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F} = \mathfrak{F};\ \pi(H_2/\mathrm{O}_\pi(H)) \bigcap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing;$$

$$H_2 = N_2 \cap H \subseteq \Phi_\pi(G).$$

Следовательно, $H_1 \cap H_2 = \mathrm{O}_\pi(H)$. Кроме того, $|H_1/\mathrm{O}_\pi(H) \times H_2/\mathrm{O}_\pi(H)| = |N_1/\mathrm{O}_\pi(G) \times N_2/\mathrm{O}_\pi(G)|$, а так как $H_1/\mathrm{O}_\pi(H) \times H_2/\mathrm{O}_\pi(H) \subseteq H/\mathrm{O}_\pi(H) \cong$ $\cong H\,\mathrm{O}_\pi(G)/\mathrm{O}_\pi(G)$, то $H_1/\mathrm{O}_\pi(H) \times H_2/\mathrm{O}_\pi(H) =$ $= H/\mathrm{O}_\pi(H)$. Таким образом, утверждение II выполнено.

Пусть $H/\mathrm{O}_\pi(H) = H_1/\mathrm{O}_\pi(H) \times H_2/\mathrm{O}_\pi(H)$, $H_1 \in \mathfrak{F}$, $H_2 \subseteq \Phi_\pi(G)$. Тогда $H/H_2 \cong H_1/\mathrm{O}_\pi(H) \in \mathfrak{F}$. А так как $\Phi_\pi(G) \subseteq \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$, то $H_2 \subseteq H \cap \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$, а значит, $H/H \cap \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$. □

Следующий результат обобщает следствие 2.1.1 леммы 2.1.

***Следствие* 2.2.1.** *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ *– локальная* S_n*-замкнутая формация*, $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{P}$. *И пусть H – субнормальная подгруппа группы G, подгруппа* $\Phi_\pi(G)$ *обладает свойством* C_π. *Если* $H/H \cap \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$, *то* $H \in \mathfrak{F}$.

***Следствие* 2.2.2.** *Пусть* $\mathfrak{A}^{\pi'}$ *– формация всех* π'*-сверхразрешимых групп. И пусть H – субнормальная подгруппа группы G, подгруппа* $\Phi_\pi(G)$ *обладает свойством* C_π. *Если факторгруппа* $H/H \cap \Delta_\pi^{\mathfrak{A}^{\pi'}}(G)$ π'*-сверхразрешима, то группа H также* π'*-сверхразрешима.*

В случае $\pi = \varnothing$ из следствия 2.2.2, как и непосредственно из леммы 2.2, вытекает следующий результат.

***Следствие* 2.2.3** [2, следствие 3.4]. *Пусть* $\mathfrak{A}$ *– формация всех сверхразрешимых групп. И пусть H – субнормальная подгруппа группы G такая, что* $H/H \cap \Delta^{\mathfrak{A}}(G)$ *сверхразрешима. Тогда H сверхразрешима.*

Так как $\Phi_\pi(G) \subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G) \subseteq \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$ для любой группы G и $\mathfrak{F}$-абнормально π'-полного подгруппового m-функтора θ, то лемма 2.2 может быть функторно обобщена следующей теоремой.

***Теорема* 2.1.** *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ *– локальная* S_n*-замкнутая формация,* θ *–* $\mathfrak{F}$*-абнормально* π'*-полный подгрупповой* m_s*-функтор. И пусть H – субнормальная подгруппа группы G, подгруппа* $\Phi_\pi(G)$ *обладает свойством* C_π. *Тогда следующие утверждения* I *и* II *равносильны.*

I. $H/H \cap \Phi_{\theta_\pi}(G) \in \mathfrak{F}$.

II. *Факторгруппа* $H/\mathrm{O}_\pi(H)$ *представима в виде прямого произведения*

$$H/\mathrm{O}_\pi(H) = H_1/\mathrm{O}_\pi(H) \times H_2/\mathrm{O}_\pi(H),$$

где: 1) $H_1 \in \mathfrak{F}$;

2) $\pi(H_2/\mathrm{O}_\pi(H)) \bigcap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$;

3) $H_2 \subseteq \Phi_\pi(G)$.

***Следствие* 2.1.1.** *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ *– локальная* S_n*-замкнутая формация. И пусть H – субнормальная подгруппа группы G, подгруппа* $\Phi_\pi(G)$ *обладает свойством* C_π. *Тогда следующие утверждения* (1)–(4) *равносильны.*

(1) $H/H \cap \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$.

(2) $H/H \cap \Phi_\pi(G) \in \mathfrak{F}$.

(3) $H/H \cap \Phi_{\theta_\pi}(G) \in \mathfrak{F}$, *где* θ *–* $\mathfrak{F}$*-абнормально* π'*-полный подгрупповой* m_s*-функтор.*

(4) *Факторгруппа* $H/\mathrm{O}_\pi(H)$ *представима в виде прямого произведения*

$$H/\mathrm{O}_\pi(H) = H_1/\mathrm{O}_\pi(H) \times H_2/\mathrm{O}_\pi(H),$$

где $H_1 \in \mathfrak{F}$; $\pi(H_2/\mathrm{O}_\pi(H)) \bigcap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$; $H_2 \subseteq \Phi_\pi(G)$.

Следствие 2.1.1 теоремы 2.1 включает следствие 2.1.2 леммы 2.1: случай $\pi = \varnothing$.

***Следствие* 2.1.2.** *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ *– локальная* S_n*-замкнутая формация,* $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{P}$, θ *–* $\mathfrak{F}$*-абнормально* π'*-полный подгрупповой* m_s*-функтор. И пусть H – субнормальная подгруппа группы G, подгруппа* $\Phi_\pi(G)$ *обладает свойством* C_π. *Если* $H/H \cap \Phi_{\theta_\pi}(G) \in \mathfrak{F}$, *то* $H \in \mathfrak{F}$.

3 Радикальные локальные формации. Формационные радикалы факторгруппы L/K с субнормальной в группе G подгруппой L и нормальной в L подгруппой K из обобщённой подгруппы Фраттини группы G

***Теорема* 3.1.** *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ *– радикальная локальная формация,* θ *–* $\mathfrak{F}$*-абнормально* π'*-полный подгрупповой* m_s*-функтор. И пусть подгруппа* $\Phi_\pi(G)$ *группы G обладает свойством* C_π, *L – субнормальная подгруппа группы G, K – нормальная подгруппа L,* $K \subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G)$. *Тогда выполняются следующие утверждения.*

(1) $(L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}K_0/K$, *где* K_0 *– (нильпотентная) холловская* $\pi'(\mathfrak{F})$*-подгруппа группы K,* $\mathrm{O}_\pi(K)K_0 \subseteq \Phi_\pi(G)$, *причём* $L_{\mathfrak{F}} \subseteq \mathrm{N}_G(\mathrm{O}_\pi(K)K_0)$. *В частности,*

$$(L/L \cap \Phi_{\theta_\pi}(G))_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}L_0/L \cap \Phi_{\theta_\pi}(G),$$

где L_0 *– холловская* $\pi'(\mathfrak{F})$*-подгруппа группы* $L \cap \Phi_{\theta_\pi}(G)$, $\mathrm{O}_\pi(L \cap \Phi_{\theta_\pi}(G))L_0 \subseteq \Phi_\pi(G)$, *причём* $L_{\mathfrak{F}} \subseteq \mathrm{N}_G((\mathrm{O}_\pi(L \cap \Phi_{\theta_\pi}(G))L_0)$.

(2) *Если* $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{P}$, *то* $(L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}/K$; *в частности,* $(L/L \cap \Phi_{\theta_\pi}(G))_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}/L \cap \Phi_{\theta_\pi}(G)$.

Доказательство. Докажем утверждение (1). Пусть $K \subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G) \cap L$. Обозначим $N/K = (L/K)_{\mathfrak{F}}$. Так как $N/K \in \mathfrak{F}$, $K \subseteq N \cap \Phi_{\theta_\pi}(G)$, то $N/N \cap \Phi_{\theta_\pi}(G) \in \mathfrak{F}$. По теореме 2.1

$$N/\mathrm{O}_\pi(N) = N_1/\mathrm{O}_\pi(N) \times N_2/\mathrm{O}_\pi(N),$$

где $N_1 \in \mathfrak{F}$, $\pi(N_2/\mathrm{O}_\pi(N)) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$, $N_2 \subseteq \Phi_\pi(G)$. Заметим, что $\pi(\mathfrak{F})$-замкнутая группа N обладает нильпотентной холловской $\pi'(\mathfrak{F})$-подгруппой K_0, $K_0 \subseteq N_2 \cap K$. Ясно, что $N_1 = N_{\mathfrak{F}}$, $N_{\mathfrak{F}} \subseteq L_{\mathfrak{F}}$, $N = N_{\mathfrak{F}}K_0$. Так как $L_{\mathfrak{F}}K/K \subseteq N/K$ и $L_{\mathfrak{F}}$ субнормальна в G, то $L_{\mathfrak{F}}$ субнормальна в N по следствию 7.3.1 [1], а по следствию 7.7.1 [1] $L_{\mathfrak{F}} \subseteq N_{\mathfrak{F}}$. Значит, $N_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}$, откуда $(L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}K_0/K$. Кроме того, подгруппа $N_2 \cap K = \mathrm{O}_\pi(N)K_0 \cap K = (\mathrm{O}_\pi(N) \cap K)K_0 = \mathrm{O}_\pi(K)K_0$ нормальна в N, а значит, $L_{\mathfrak{F}} \subseteq \mathrm{N}_G(\mathrm{O}_\pi(K)K_0)$. Утверждение (1) доказано, утверждение (2) есть следствие утверждения (1). □

***Следствие* 3.1.1.** *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ − радикальная локальная формация. И пусть подгруппа $\Phi_\pi(G)$ группы G обладает свойством C_π, L – субнормальная подгруппа группы G, K − нормальная подгруппа L. Тогда выполняются следующие утверждения.*

I. *Если $K \subseteq \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$, то*:

(1) $(L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}K_0/K$, *где K_0 − (нильпотентная) холловская $\pi'(\mathfrak{F})$-подгруппа группы K, $\mathrm{O}_\pi(K)K_0 \subseteq \Phi_\pi(G)$, причём $L_{\mathfrak{F}} \subseteq \mathrm{N}_G(\mathrm{O}_\pi(K)K_0)$. В частности,*

$$(L/L \cap \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G))_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}L_0/L \cap \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G),$$

где L_0 − холловская $\pi'(\mathfrak{F})$-подгруппа группы $L \cap \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$, $\mathrm{O}_\pi(L \cap \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G))L_0 \subseteq \Phi_\pi(G)$, причём $L_{\mathfrak{F}} \subseteq \mathrm{N}_G((\mathrm{O}_\pi(L \cap \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G))L_0)$.

(2) *Если $\pi(\mathfrak{F}) = \mathbb{P}$, то $(L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}/K$; в частности, $(L/L \cap \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G))_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}/L \cap \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$.*

II. *Пусть $K \subseteq \Delta_\pi(G)$. Если $\pi(\mathfrak{F}) = \mathbb{P}$, то $(L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}/K$; в частности,*

$$(L/L \cap \Delta_\pi(G))_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}/L \cap \Delta_\pi(G).$$

Утверждения I. (1), I. (2) следствия 3.1.1, вытекающие из теоремы 3.1 в случае, если для $\mathfrak{F}$-абнормально π'-полного подгруппового m_s-функтора θ и любой группы G положить $\theta(G) = \{G\} \cup \mathrm{M}_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$, усиливают лемму 3.1 и её следствие 3.1.1 (соответственно) из [10]. Утверждение II следствия 3.1.1 теоремы 3.1 вытекает из утверждения I.(2) ввиду того, что $\Delta_\pi(G) \subseteq \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$, если $\mathfrak{F}$ содержит все нильпотентные группы.

***Следствие* 3.1.2.** *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ − радикальная локальная формация. И пусть подгруппа $\Phi_\pi(G)$ группы G обладает свойством C_π, L – субнормальная подгруппа группы G, $K \subseteq L \cap \Phi_\pi(G)$, подгруппа K нормальна в L. Тогда выполняются следующие утверждения.*

(1) $(L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}K_0/K$, *где K_0 − (нильпотентная) холловская $\pi'(\mathfrak{F})$-подгруппа группы K, причём $L_{\mathfrak{F}} \subseteq \mathrm{N}_G(\mathrm{O}_\pi(K)K_0)$.*

В частности,

$$(L/L \cap \Phi_\pi(G))_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}L_0/L \cap \Phi_\pi(G),$$

где L_0 − холловская $\pi'(\mathfrak{F})$-подгруппа группы $L \cap \Phi_\pi(G)$, причём $L_{\mathfrak{F}} \subseteq \mathrm{N}_G((L \cap \Phi_\pi(G))K_0)$.

(2) *Если $\pi(\mathfrak{F}) = \mathbb{P}$, то $(L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}/K$; в частности, $(L/L \cap \Phi_\pi(G))_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}/L \cap \Phi_\pi(G)$.*

Следствие 3.1.2 получается из теоремы 3.1, если для $\mathfrak{F}$-абнормально π'-полного подгруппового m_s-функтора θ и любой группы G положить $\theta(G) = \{G\} \cup \mathrm{M}(G)$. Утверждение (1) следствия 3.1.2 вытекает также из утверждения I. (1) следствия 3.1.1. Следствие 3.1.2 усиливает лемму 2.1 из [10].

***Следствие* 3.1.3.** *Пусть подгруппа $\Phi_\pi(G)$ группы G обладает свойством C_π, L – субнормальная подгруппа группы G, подгруппа K − нормальная подгруппа L. Тогда выполняются следующие утверждения.*

I. *Пусть θ − $\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{G}_{\pi'}$-абнормально π'-полный подгрупповой m_s-функтор, и пусть $K \subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G)$ ($K \subseteq \Phi_i(G)$, $i \in \{1,2,3\}$, где $\Phi_1(G) = \Phi_\pi(G)$, $\Phi_2(G) = \Delta_\pi(G)$, $\Phi_3(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{G}_{\pi'}}(G)$). Тогда*

$$(L/K)_{\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{G}_{\pi'}} = L_{\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{G}_{\pi'}}/K.$$

В частности:

$$(L/L \cap \Phi_{\theta_\pi}(G))_{\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{G}_{\pi'}} = L_{\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{G}_{\pi'}}/L \cap \Phi_{\theta_\pi}(G)$$

(и, значит, $(L/L \cap \Phi_i(G))_{\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{G}_{\pi'}} = L_{\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{G}_{\pi'}}/L \cap \Phi_i(G)$, $i \in \{1,2,3\}$).

В частности, если $L/L \cap \Delta_\pi^{\mathfrak{G}_{\pi'}}(G)$ π-замкнута, то и L π-замкнута.

II. *Пусть θ − абнормально π'-полный подгрупповой m_s-функтор, и пусть $K \subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G)$ ($K \subseteq \Phi_i(G)$, $i \in \{1,2\}$, где $\Phi_1(G) = \Phi_\pi(G)$, $\Phi_2(G) = \Delta_\pi(G)$). Тогда $\mathrm{F}_{\pi'}(L/K) = \mathrm{F}_{\pi'}(L)/K$.*

В частности,

$$\mathrm{F}_{\pi'}(L/L \cap \Phi_{\theta_\pi}(G)) = \mathrm{F}_{\pi'}(L)/L \cap \Phi_{\theta_\pi}(G)$$

(и, значит, $\mathrm{F}_{\pi'}(L/L \cap \Phi_i(G)) = \mathrm{F}_{\pi'}(L)/L \cap \Phi_i(G)$, $i \in \{1,2\}$).

В частности, если $L/L \cap \Delta_\pi(G)$ π'-нильпотентна, то и L π'-нильпотентна.

III. *Пусть* θ – $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}_{\pi'}$*-абнормально* π'*-полный подгрупповой* m_s*-функтор, и пусть* $K \subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G)$ $(K \subseteq \Phi_i(G),\ i \in \{1,2,3\}$, *где* $\Phi_1(G) = \Phi_\pi(G)$, $\Phi_2(G) = \Delta_\pi(G)$, $\Phi_3(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}_{\pi'}}(G))$. *Тогда*

$$(L/K)_{\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}_{\pi'}} = L_{\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}_{\pi'}}/K.$$

В частности,

$$(L/L \cap \Phi_{\theta_\pi}(G))_{\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}_{\pi'}} = L_{\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}_{\pi'}}/L \cap \Phi_{\theta_\pi}(G)$$

(*и, значит,* $(L/L \cap \Phi_i(G))_{\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}_{\pi'}} = L_{\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}_{\pi'}}/L \cap \Phi_i(G)$, $i \in \{1,2,3\}$).

В частности, если $L/L \cap \Delta_\pi^{\mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}_{\pi'}}(G) \in \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}_{\pi'}$ *то и* $L \in \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}_{\pi'}$.

Доказательство. I. Пусть θ – $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$-абнормально π'-полный подгрупповой m_s-функтор. Для случая $K \subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G)$ справедливость утверждения I вытекает из утверждения (2) теоремы 3.1. Для случая $K \subseteq \Delta_\pi^{\mathfrak{S}_{\pi'}}(G)$ – из утверждения I. (2) следствия 3.1.1 теоремы 3.1, учитывая равенство $\Delta_\pi^{\mathfrak{S}_{\pi'}}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}}(G)$ согласно утверждению (5) леммы 1.1. Для случая $K \subseteq \Phi_\pi(G)$ утверждение I вытекает из утверждения (2) следствия 3.1.2 теоремы 3.1. А так как, учитывая утверждение (5) леммы 1.1,

$$\Delta_\pi(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{N}_{\pi'}}(G) \subseteq \Delta_\pi^{\mathfrak{S}_{\pi'}}(G)$$

для любой группы *G*, то утверждение I справедливо и для случая $K \subseteq \Delta_\pi(G)$. Справедливость утверждений II и III обосновывается аналогично. □

Заметим, что частные случаи утверждений следствия 3.1.3 теоремы 3.1 о π-замкнутости *L* (π'-нильпотентности *L*, $L \in \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}_{\pi'}$), если

$$L/L \cap \Delta_\pi^{\mathfrak{S}_{\pi'}}(G) \in \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}\ \ (L/L \cap \Delta_\pi(G) \in \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'},$$

$$L/L \cap \Delta_\pi^{\mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}_{\pi'}}(G) \in \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}_{\pi'},$$

соответственно), вытекают также из следствия 2.2.1 леммы 2.2.

Заметим также, что для подгруппового *m*-функтора θ в силу утверждения (5) леммы 1.1 условия: $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$-абнормально π'-полный (абнормально π'-полный, $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}_{\pi'}$-абнормально π'-полный) равносильны условиям: $\mathfrak{S}_{\pi'}$-абнормально π'-полный ($\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}$-абнормально π'-полный или $\mathfrak{N}_{\pi'}$-абнормально π'-полный, $\mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}_{\pi'}$-абнормально π'-полный, соответственно).

Полагая в условии теоремы 3.1 $\pi = \varnothing$, получаем как следствие следующую теорему.

***Теорема* 3.2.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ – *радикальная локальная формация,* $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, θ – $\mathfrak{F}$*-абнормально полный подгрупповой* m_s*-функтор. И пусть L – субнормальная подгруппа группы G, K – нормальная подгруппа L,* $K \subseteq \Phi_\theta(G)$. *Тогда выполняются следующие утверждения.*

(1) $(L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}} \times O_{\pi'}(K)/K$, $O_{\pi'}(K) \subseteq \Phi(G)$.

В частности,

$$(L/L \cap \Phi_\theta(G))_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}} \times O_{\pi'}(L \cap \Phi_\theta(G))/L \cap \Phi_\theta(G),$$

$$O_{\pi'}(L \cap \Phi_\theta(G)) \subseteq \Phi(G).$$

(2) *Если* $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{P}$, *то* $(L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}/K$;

в частности, $(L/L \cap \Phi_\theta(G))_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}/L \cap \Phi_\theta(G)$.

***Следствие* 3.2.1.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ – *радикальная локальная формация,* $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. *И пусть L – субнормальная подгруппа группы G, K – нормальная подгруппа L. Тогда выполняются следующие утверждения.*

I. *Если* $K \subseteq \Delta^{\mathfrak{F}}(G)$, *то*:

(1) $(L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}} \times O_{\pi'}(K)/K$, $O_{\pi'}(K) \subseteq \Phi(G)$.

В частности,

$$(L/L \cap \Delta^{\mathfrak{F}}(G))_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}} \times O_{\pi'}(L \cap \Delta^{\mathfrak{F}}(G))/L \cap \Delta^{\mathfrak{F}}(G),$$

$$O_{\pi'}(L \cap \Delta^{\mathfrak{F}}(G)) \subseteq \Phi(G).$$

(2) *Если* $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{P}$, *то* $(L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}/K$; *в частности,* $(L/L \cap \Delta^{\mathfrak{F}}(G))_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}/L \cap \Delta^{\mathfrak{F}}(G)$.

II. *Пусть* $K \subseteq \Delta(G)$. *Если* $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{P}$, *то* $(L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}/K$; *в частности,*

$$(L/L \cap \Delta(G))_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}/L \cap \Delta(G).$$

Утверждения I. (1) и I. (2) следствия 3.2.1 теоремы 3.2 усиливают следствия 3.1.2 и 3.1.3 леммы 3.1 (соответственно) из [10].

***Следствие* 3.2.2.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ – *радикальная локальная формация,* $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. *И пусть L – субнормальная подгруппа группы G,* $K \subseteq L \cap \Phi(G)$, *K нормальна в L. Тогда выполняются следующие утверждения.*

(1) $(L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}} \times O_{\pi'}(K)/K$.

В частности,

$$(L/L \cap \Phi(G))_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}} \times O_{\pi'}(L \cap \Phi(G))/L \cap \Phi(G).$$

(2) *Если* $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{P}$, *то* $(L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}/K$; *в частности,* $(L/L \cap \Phi(G))_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}/L \cap \Phi(G)$.

Следствие 3.2.2 теоремы 3.2 усиливает следствие 2 леммы 1 из [9]. Понятно, что утверждение (1) следствия 3.2.2 вытекает как непосредственно из утверждения (1) теоремы 3.2, так и из утверждения I.(1) следствия 3.2.1.

***Следствие* 3.2.3.** *Пусть L – субнормальная подгруппа группы G, K – нормальная подгруппа L. Имеют место следующие утверждения.*

I. *Пусть* θ – $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$*-абнормально полный подгрупповой* m_s*-функтор, и пусть* $K \subseteq \Phi_\theta(G)$, $(K \subseteq \Phi_i(G),\ \ i \in \{1,2,3\}$, *где* $\Phi_1(G) = \Phi(G)$, $\Phi_2(G) = \Delta(G)$, $\Phi_3(G) = \Delta^{\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}}(G))$. *Тогда*

$$(L/K)_{\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{S}_{\pi'}} = L_{\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{S}_{\pi'}} / K.$$

В частности,

$$(L/L \cap \Phi_\theta(G))_{\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{S}_{\pi'}} = L_{\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{S}_{\pi'}} / L \cap \Phi_\theta(G)$$

(*и, значит,* $(L/L \cap \Phi_i(G))_{\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{S}_{\pi'}} = L_{\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{S}_{\pi'}} / L \cap \Phi_i(G)$, $i \in \{1,2,3\}$).

В частности, если факторгруппа

$$L/L \cap \Delta^{\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{S}_{\pi'}}(G)$$

π*-замкнута, то и* L π*-замкнута.*

II. *Пусть* θ − $\mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{N}_p$*-абнормально полный подгрупповой* m_s*-функтор, p − простое число. Если* $K \subseteq \Phi_\theta(G)$ $(K \subseteq \Phi_i(G),$ $i \in \{1,2,3\}$, *где* $\Phi_1(G) = \Phi(G)$, $\Phi_2(G) = \Delta(G)$, $\Phi_3(G) = \Delta^{\mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{N}_p}(G))$, *то* $F_p(L/K) = F_p(L)/K$.

В частности,

$$F_p(L/L \cap \Phi_\theta(G)) = F_p(L)/L \cap \Phi_\theta(G)$$

(*и, значит,* $F_p(L/L \cap \Phi_i(G)) = F_p(L)/L \cap \Phi_i(G)$, $i \in \{1,2,3\}$).

Доказательство. I. Пусть θ − $\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{S}_{\pi'}$-абнормально полный подгрупповой m_s-функтор. Для случая $K \subseteq \Phi_\theta(G)$ справедливость утверждения I вытекает из утверждения (2) теоремы 3.2. Для случая $K \subseteq \Delta^{\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{S}_{\pi'}}(G)$ справедливость утверждения I вытекает из утверждения I. (2) следствия 3.2.1 теоремы 3.2. Случай $K \subseteq \Phi(G)$ − приложение для формации $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{S}_{\pi'}$ утверждения (2) следствия 3.2.2 теоремы 3.2. А так как $\Delta(G) \subseteq \Delta^{\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{S}_{\pi'}}(G)$ для любой группы *G*, то утверждение I справедливо и для случая $K \subseteq \Delta(G)$. Утверждение II вытекает из утверждения I, если положить $\pi' = \{p\}$.

Следствие 3.2.3 теоремы 3.2 обобщает лемму 4.4 из [1].

***Следствие* 3.2.4.** *Пусть L – субнормальная подгруппа группы G, K − нормальная подгруппа L. Имеют место следующие утверждения.*

I. *Пусть* θ *− абнормально полный подгрупповой* m_s*-функтор, и пусть* $K \subseteq \Phi_\theta(G)$ $(K \subseteq \Phi_i(G),$ $i \in \{1,2\}$, *где* $\Phi_1(G) = \Phi(G)$, $\Phi_2(G) = \Delta(G))$. *Тогда* $F(L/K) = F(L)/K$.

В частности,

$$F(L/L \cap \Phi_\theta(G)) = F(L)/L \cap \Phi_\theta(G)$$

(*и, значит,* $F(L/L \cap \Phi_i(G)) = F(L)/L \cap \Phi_i(G)$, $i \in \{1,2\}$).

В частности, если $L/L \cap \Delta(G)$ *нильпотентна, то и L нильпотентна.*

II. *Пусть* θ − $\mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}$*-абнормально полный подгрупповой* m_s*-функтор, и пусть* $K \subseteq \Phi_\theta(G)$ $(K \subseteq \Phi_i(G),$ $i \in \{1,2,3\}$, *где* $\Phi_1(G) = \Phi(G)$, $\Phi_2(G) = \Delta(G)$, $\Phi_3(G) = \Delta^{\mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}}(G))$. *Тогда*

$$(L/K)_{\mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}} = L_{\mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}} / K.$$

В частности,

$$(L/L \cap \Phi_\theta(G))_{\mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}} = L_{\mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}} / L \cap \Phi_\theta(G)$$

(*и, значит,* $(L/L \cap \Phi_i(G))_{\mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}} = L_{\mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}} / L \cap \Phi_i(G)$, $i \in \{1,2,3\}$).

В частности, если $L/L \cap \Delta^{\mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}}(G) \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}$ *то и* $L \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}$.

Следствие 3.2.4 теоремы 3.2 вытекает также из утверждений II и III следствия 3.1.3 теоремы 3.1, случай $\pi = \varnothing$. Частные случаи утверждений следствия 3.2.4 теоремы 3.2 о нильпотентности *L* (о принадлежности *L* формации $\mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}$), если $L/L \cap \Delta(G) \in \mathfrak{N}$ $(L/L \cap \Delta^{\mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}}(G) \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}$, соответственно), вытекают также из следствия 2.1.1[2] леммы 2.1.

Среди других приложений теоремы 3.2 для локальных радикальных формаций, содержащих все нильпотентные группы, можно указать на соответствующие утверждения для формаций $\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{N}_{\pi'}$, $\mathfrak{S}_\pi \times \mathfrak{S}_{\pi'}$, $\mathfrak{S}_\pi \times \mathfrak{N}_{\pi'}$, $\mathfrak{S}_\pi \times \mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}_{\pi'}$. Отметим, что утверждения II следствия 3.2.3 теоремы 3.2, представляющие собой частный случай $(\pi = p')$ утверждений, вытекающих из теоремы 3.2 для формации $\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{S}_{\pi'}$, вытекают из соответствующих утверждений и в отношении формации $\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{N}_{\pi'}$.

4 Факторизуемость субнормальной в группе *G* подгруппы *H* нормальными в *H* подгруппами в связи с локальными формациями и обобщёнными подгруппами Фраттини группы *G*

***Теорема* 4.1.** *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{F}$ *− локальная формация,* θ *− абнормально* π'*-полный подгрупповой* m_s*-функтор. И пусть H – субнормальная подгруппа группы G, подгруппа* $\Phi_\pi(G)$ *обладает свойством* C_π. *Тогда следующие утверждения* I *и* II *равносильны.*

I. $H/H \cap \Phi_{\theta_\pi}(G) \in \mathfrak{F}$.

II. *Факторгруппа* $H/O_\pi(H)$ *представима в виде прямого произведения*

$$H/O_\pi(H) = H_1/O_\pi(H) \times H_2/O_\pi(H),$$

где: 1) $H_1 \in \mathfrak{F}$;

2) $\pi(H_2/O_\pi(H)) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$;

3) $H_2 \subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G)$.

Доказательство. Пусть выполняется утверждение I, т. е. $H/H \cap \Phi_{\theta_\pi}(G) \in \mathfrak{F}$. Введём следующие обозначения:

$$\overline{G} = G/O_\pi(G), \ \overline{H} = H\,O_\pi(G)/O_\pi(G).$$

По утверждениям (2) и (3) леммы 1.1 $\Delta_\pi(G/\mathrm{O}_\pi(G)) = \Delta_\pi(G)/\mathrm{O}_\pi(G) = \Delta(G/\mathrm{O}_\pi(G))$, а так как $\Phi_{\theta_\pi}(G) \subseteq \Delta_\pi(G)$, то

$$\overline{H}\big/\overline{H} \cap \Delta(\overline{G}) \cong H\big/H \cap \Delta_\pi(G) \in \mathfrak{F}.$$

Обозначая $\pi(\mathfrak{F}) = \tau$, $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}_\tau \times \mathfrak{G}_{\tau'}$ и учитывая $\Delta(\overline{G}) \subseteq \Delta^{\mathfrak{X}}(\overline{G})$, ибо $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{X}$, получаем

$$\overline{H}\big/\overline{H} \cap \Delta^{\mathfrak{X}}(\overline{G}) \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X},$$

откуда по утверждению (6) леммы 1.1 $\overline{H} \in \mathfrak{X}$, т. е. $\overline{H} = N_1/\mathrm{O}_\pi(G) \times N_2/\mathrm{O}_\pi(G)$, $N_1/\mathrm{O}_\pi(G) \in \mathfrak{G}_\tau$, $N_2/\mathrm{O}_\pi(G) \in \mathfrak{G}_{\tau'}$. Обозначая $N_i \cap H = H_i$, для каждого $i \in \{1,2\}$ имеем: H_i − нормальная подгруппа H, $N_i/\mathrm{O}_\pi(G) \cong H_i/\mathrm{O}_\pi(H)$; $H_1 \in \mathfrak{G}_\tau$, $\pi(H_2/\mathrm{O}_\pi(H)) \bigcap \tau = \varnothing$. Значит, $H_1 \cap H_2 = \mathrm{O}_\pi(H)$. Кроме того,

$$|H_1/\mathrm{O}_\pi(H) \times H_2/\mathrm{O}_\pi(H)| = |N_1/\mathrm{O}_\pi(G) \times N_2/\mathrm{O}_\pi(G)|,$$

а так как

$$H_1/\mathrm{O}_\pi(H) \times H_2/\mathrm{O}_\pi(H) \subseteq$$
$$\subseteq H/\mathrm{O}_\pi(H) \cong H\,\mathrm{O}_\pi(G)/\mathrm{O}_\pi(G),$$

то $H/\mathrm{O}_\pi(H) = H_1/\mathrm{O}_\pi(H) \times H_2/\mathrm{O}_\pi(H)$. Из условия $H\big/H \cap \Phi_{\theta_\pi}(G) \in \mathfrak{F}$ следует $H_2 \subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G)$. Действительно, ввиду следствия 7.7.2 теоремы 7.7 из [1] $\mathrm{O}_\pi(H) \subseteq \mathrm{O}_\pi(G) \subseteq \Phi_\pi(G) \subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G)$. А так как группа *H* и её нормальные подгруппы H_2 и $H \cap \Phi_{\theta_\pi}(G)$ τ-замкнуты, то H_2 и $\Phi_{\theta_\pi}(G)$ содержат все холловские τ'-подгруппы группы *H*, учитывая их сопряжённость в *H* в связи с теоремой Шура-Цассенхауза.

Покажем, что $H_1 \in \mathfrak{F}$. Так как $\overline{H}\big/\overline{H} \cap \Delta(\overline{G}) \in \mathfrak{F}$ и $\overline{H} = N_1/\mathrm{O}_\pi(G) \times N_2/\mathrm{O}_\pi(G)$, $N_1/\mathrm{O}_\pi(G) \in \mathfrak{G}_\tau$, $N_2/\mathrm{O}_\pi(G) \in \mathfrak{G}_{\tau'}$, то

$$\overline{H} \cap \Delta(\overline{G}) = K_1/\mathrm{O}_\pi(G) \times K_2/\mathrm{O}_\pi(G),\ K_2 = N_2$$

и, следовательно, $\overline{N}_1\big/\overline{K}_1 \in \mathfrak{F}$, где $\overline{N}_1 = N_1/\mathrm{O}_\pi(G)$, $\overline{K}_1 = K_1/\mathrm{O}_\pi(G)$. Так как $\overline{K}_1 \subseteq \Delta(\overline{G})$, то $\mathrm{F}_p(\overline{N}_1/\overline{K}_1) = \mathrm{F}_p(\overline{N}_1)\big/\overline{K}_1$ для любого простого числа *p* по утверждению II следствия 3.2.3 теоремы 3.2. Если $K_1 = \mathrm{O}_\pi(G)$, то $\overline{N}_1 \in \mathfrak{F}$, а значит, группа $H_1/\mathrm{O}_\pi(H)$, изоморфная $\overline{N}_1$, принадлежит формации $\mathfrak{F}$, откуда $H_1 \in \mathfrak{F}$. Поэтому считаем, что $\pi(\overline{K}_1) \neq \varnothing$. Пусть $\mathfrak{f}$ − локальный экран формации $\mathfrak{F}$, p − произвольное простое из множества $\pi(\overline{K}_1)$. Если $p \in \pi(\overline{N}_1/\overline{K}_1)$, то по лемме 4.5[1] $\overline{N}_1/\overline{K}_1\big/\mathrm{F}_p(\overline{N}_1/\overline{K}_1) \in \mathfrak{f}(p)$, откуда $\overline{N}_1\big/\mathrm{F}_p(\overline{N}_1) \in \mathfrak{f}(p)$. Если $p \notin \pi(\overline{N}_1/\overline{K}_1)$, то $\mathrm{F}_p(\overline{N}_1/\overline{K}_1) = \overline{N}_1/\overline{K}_1$, и, значит, $\overline{N}_1 = \mathrm{F}_p(\overline{N}_1)$. А так как согласно лемме 4.2 [1] $\mathfrak{f}(p) \neq \varnothing$, то и в этом случае $\overline{N}_1\big/\mathrm{F}_p(\overline{N}_1) \in \mathfrak{f}(p)$. Применяя лемму 4.5[1] и учитывая $\overline{N}_1\big/\overline{K}_1 \in \mathfrak{F}$, получаем $\overline{N}_1 \in \mathfrak{F}$. Значит, снова $H_1/\mathrm{O}_\pi(H) \in \mathfrak{F}$, а следовательно, и H_1 принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Справедливость утверждения II при условии выполнения утверждения I доказана.

Пусть выполняется утверждение II. Из условия $H = H_1 \times H_2$, где $H_1 \in \mathfrak{F}$, $H_2 \subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G)$, следует $H\big/H \cap \Phi_{\theta_\pi}(G) \in \mathfrak{F}$. Значит, выполняется утверждение I. □

***Следствие* 4.1.1.** *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ − *локальная формация*, $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{P}$, θ − *абнормально* π'*-полный подгрупповой* m_s*-функтор. И пусть H – субнормальная подгруппа группы G, подгруппа* $\Phi_\pi(G)$ *обладает свойством* C_π. *Если* $H\big/H \cap \Phi_{\theta_\pi}(G) \in \mathfrak{F}$, *то* $H \in \mathfrak{F}$.

***Следствие* 4.1.2.** *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ − *локальная формация. И пусть подгруппа* $\Phi_\pi(G)$ *группы G обладает свойством* C_π, *H – субнормальная подгруппа группы G. Тогда следующие утверждения* I *и* II *равносильны.*

I. $H\big/H \cap \Phi_\pi(G) \in \mathfrak{F}$.

II. *Факторгруппа* $H/\mathrm{O}_\pi(H)$ *представима в виде прямого произведения*

$$H/\mathrm{O}_\pi(H) = H_1/\mathrm{O}_\pi(H) \times H_2/\mathrm{O}_\pi(H),$$

где:

1) $H_1 \in \mathfrak{F}$;

2) $\pi(H_2/\mathrm{O}_\pi(H)) \bigcap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$;

3) $H_2 \subseteq \Phi_\pi(G)$.

***Следствие* 4.1.3.** *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ − *локальная формация. И пусть подгруппа* $\Phi_\pi(G)$ *группы G обладает свойством* C_π, *H – субнормальная подгруппа группы G. Тогда следующие утверждения* I *и* II *равносильны.*

I. $H\big/H \cap \Delta_\pi(G) \in \mathfrak{F}$.

II. *Факторгруппа* $H/\mathrm{O}_\pi(H)$ *представима в виде прямого произведения*

$$H/\mathrm{O}_\pi(H) = H_1/\mathrm{O}_\pi(H) \times H_2/\mathrm{O}_\pi(H),$$

где:

1) $H_1 \in \mathfrak{F}$;

2) $\pi(H_2/\mathrm{O}_\pi(H)) \bigcap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$;

3) $H_2 \subseteq \Delta_\pi(G)$.

***Следствие* 4.1.4.** *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ − *локальная формация*, $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{P}$. *И пусть подгруппа* $\Phi_\pi(G)$ *группы G обладает свойством* C_π, *H – субнормальная подгруппа группы G. Если* $H\big/H \cap \Delta_\pi(G) \in \mathfrak{F}$, *то* $H \in \mathfrak{F}$.

Полагая $\pi = \varnothing$, из теоремы 4.1 получаем следующий результат.

***Следствие* 4.1.5.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– локальная формация,* θ *– абнормально полный подгрупповой* m_s*-функтор. И пусть H – субнормальная подгруппа группы G. Тогда следующие утверждения* I *и* II *равносильны.*

I. $H/H \cap \Phi_\theta(G) \in \mathfrak{F}$.

II. *Группа H представима в виде прямого произведения* $H = H_1 \times H_2$, *где*:

1) $H_1 \in \mathfrak{F}$;

2) $\pi(H_2) \bigcap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$;

3) $H_2 \subseteq \Phi_\theta(G)$.

Следствие 4.1.5 теоремы 4.1 ослабляет требования, предьявляемые к функтору θ в теореме 2 из [3] (а также в утверждении 1) теоремы 1 из [4]), и дополняет соответствующий результат.

***Следствие* 4.1.6.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– локальная формация,* $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{P}$, θ *– абнормально полный подгрупповой* m_s*-функтор. И пусть H – субнормальная подгруппа группы G. Если* $H/H \cap \Phi_\theta(G) \in \mathfrak{F}$, *то* $H \in \mathfrak{F}$.

Следствие 4.1.6 теоремы 4.1 приведено в [3, следствие 2.1] и в [4, следствие 1.1] с дополнительным условием регулярности m_α-функтора θ.

***Следствие* 4.1.7.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– локальная формация, и пусть H – субнормальная подгруппа группы G. Тогда следующие утверждения* I *и* II *равносильны.*

I. $H/H \cap \Phi(G) \in \mathfrak{F}$.

II. *Группа H представима в виде прямого произведения* $H = H_1 \times H_2$, *где*:

1) $H_1 \in \mathfrak{F}$;

2) $\pi(H_2) \bigcap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$;

3) $H_2 \subseteq \Phi(G)$.

***Следствие* 4.1.8.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– локальная формация, и пусть H – субнормальная подгруппа группы G. Тогда следующие утверждения* I *и* II *равносильны.*

I. $H/H \cap \Delta(G) \in \mathfrak{F}$.

II. *Группа H представима в виде прямого произведения* $H = H_1 \times H_2$, *где:*

1) $H_1 \in \mathfrak{F}$;

2) $\pi(H_2) \bigcap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$;

3) $H_2 \subseteq \Delta(G)$.

Следствие 4.1.8 включает следствие 2.2 из [3] и следствие 1.2 из [4].

***Следствие* 4.1.9** [3], [4]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– локальная формация,* $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{P}$. *И пусть H – субнормальная подгруппа группы G. Если* $H/H \cap \Delta(G) \in \mathfrak{F}$, *то* $H \in \mathfrak{F}$.

5 Приложения теоремы 2.1 для локальных S_n-замкнутых формаций. Приложения теоремы 4.1 для локальных формаций

***Теорема* 5.1.** *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$ *– локальная* S_n*-замкнутая формация,* θ *–* $\mathfrak{F}$*-абнормально* π'*-полный подгрупповой* m_s*-функтор. И пусть подгруппа* $\Phi_\pi(G)$ *группы G обладает свойством* C_π, *H – субнормальная подгруппы группы G. Если* $H/H \cap \mathrm{O}_{\pi(\mathfrak{F})}(\Phi_{\theta_\pi}(G)) \in \mathfrak{F}$, *то* $H \in \mathfrak{F}$.

Доказательство. Пусть

$$H/H \cap \mathrm{O}_{\pi(\mathfrak{F})}(\Phi_{\theta_\pi}(G)) \in \mathfrak{F}.$$

Ясно, что H – $\pi(\mathfrak{F})$-группа. Так как

$$H \cap \mathrm{O}_{\pi(\mathfrak{F})}(\Phi_{\theta_\pi}(G)) \subseteq H \cap \Phi_{\theta_\pi}(G),$$

то по теореме 2.1

$$H/\mathrm{O}_\pi(H) = H_1/\mathrm{O}_\pi(H) \times H_2/\mathrm{O}_\pi(H),$$

где $H_1 \in \mathfrak{F}$, $\pi(H_2/\mathrm{O}_\pi(H)) \bigcap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$. Значит, $H = H_1$. □

***Следствие* 5.1.1.** *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$ *– локальная* S_n*-замкнутая формация, и пусть подгруппа* $\Phi_\pi(G)$ *группы G обладает свойством* C_π, *H – субнормальная подгруппа группы G. Если* $H/H \cap \mathrm{O}_{\pi(\mathfrak{F})}(\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)) \in \mathfrak{F}$, *то* $H \in \mathfrak{F}$.

В случае $\pi = \varnothing$ из теоремы 5.1 вытекает следующее утверждение.

***Следствие* 5.1.2.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– локальная* S_n*-замкнутая формация,* θ *–* $\mathfrak{F}$*-абнормально полный подгрупповой* m_s*-функтор. И пусть H – субнормальная подгруппа группы G. Если* $H/H \cap \mathrm{O}_{\pi(\mathfrak{F})}(\Phi_\theta(G)) \in \mathfrak{F}$, *то* $H \in \mathfrak{F}$.

Следствие 5.1.2 теоремы 5.1 включает результат из [2] (утверждение (6) леммы 1.1).

***Теорема* 5.2.** *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$ *– локальная формация,* θ *– абнормально* π'*-полный подгрупповой* m_s*-функтор. И пусть H – субнормальная подгруппа группы G, подгруппа* $\Phi_\pi(G)$ *обладает свойством* C_π. *Если*

$$H/H \cap \mathrm{O}_{\pi(\mathfrak{F})}(\Phi_{\theta_\pi}(G)) \in \mathfrak{F}, \text{ то } H \in \mathfrak{F}.$$

Доказательство. Пусть

$$H/H \cap \mathrm{O}_{\pi(\mathfrak{F})}(\Phi_{\theta_\pi}(G)) \in \mathfrak{F}.$$

Тогда $H/H \cap \Phi_{\theta_\pi}(G) \in \mathfrak{F}$, и по теореме 4.1 $H/\mathrm{O}_\pi(H) = H_1/\mathrm{O}_\pi(H) \times H_2/\mathrm{O}_\pi(H)$, где $H_1 \in \mathfrak{F}$,

$$\pi(H_2/\mathrm{O}_\pi(H)) \bigcap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing.$$

А так как H – $\pi(\mathfrak{F})$-группа, то $H = H_1$. □

***Следствие* 5.2.1.** *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$ *– локальная формация. И пусть H – субнормальная подгруппа группы G, подгруппа* $\Phi_\pi(G)$ *обладает свойством* C_π. *Если* $H/H \cap \mathrm{O}_{\pi(\mathfrak{F})}(\Phi_\pi(G)) \in \mathfrak{F}$, *то* $H \in \mathfrak{F}$.

Следующий результат, вытекающий из теоремы 5.2 в случае, если для абнормально π'-полного подгруппового m_s-функтора θ и любой группы G положить $\theta(G)=\{G\}\cup \mathrm{M}_{\pi}^{\mathfrak{N}}(G)$, усиливает следствие 5.2.1 теоремы 5.2 ввиду

$$\mathrm{O}_{\pi(\mathfrak{F})}(\Phi_{\pi}(G))\subseteq \mathrm{O}_{\pi(\mathfrak{F})}(\Delta_{\pi}(G)).$$

***Следствие* 5.2.2.** *Пусть* $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{F}$ − *локальная формация. И пусть* H – *субнормальная подгруппа группы* G, *подгруппа* $\Phi_{\pi}(G)$ *обладает свойством* C_{π}. *Если* $H/H\cap \mathrm{O}_{\pi(\mathfrak{F})}(\Delta_{\pi}(G))\in\mathfrak{F}$, *то* $H\in\mathfrak{F}$.

***Следствие* 5.2.3.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ − *локальная формация*, θ − *абнормально полный подгрупповой* m_s*-функтор. И пусть* H – *субнормальная подгруппа группы* G. *Если* $H/H\cap \mathrm{O}_{\pi(\mathfrak{F})}(\Phi_{\theta}(G))\in\mathfrak{F}$, *то* $H\in\mathfrak{F}$.

Следствие 5.2.3 теоремы 5.2 усиливает теорему 1 из [3], доказанную для случая $\mathrm{O}_{\pi(\mathfrak{F})}(\Phi_{\theta}(G))\subseteq H$ и при дополнительном условии, предполагающем: θ − абнормально полный регулярный m_{α}-функтор.

***Следствие* 5.2.4.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ − *локальная формация*, *и пусть* H – *субнормальная подгруппа группы* G. *Если* $H/H\cap \mathrm{O}_{\pi(\mathfrak{F})}(\Phi(G))\in\mathfrak{F}$, *то* $H\in\mathfrak{F}$.

В частном случае, когда H содержит $\mathrm{O}_{\pi(\mathfrak{F})}(\Phi(G))$, из следствия 5.2.4 вытекает результат M.J. Tomkinson [2, теорема 3.1]. Следующий результат усиливает следствие 5.2.4 теоремы 5.2.

***Следствие* 5.2.5.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ − *локальная формация*, *и пусть* H – *субнормальная подгруппа группы* G. *Если* $H/H\cap \mathrm{O}_{\pi(\mathfrak{F})}(\Delta(G))\in\mathfrak{F}$, *то* $H\in\mathfrak{F}$.

Из следствия 5.2.5 теоремы 5.2 вытекает соответствующий результат для случая $\mathrm{O}_{\pi(\mathfrak{F})}(\Delta(G))\subseteq H$ [3, следствие 1.1 теоремы 1].

В заключение отметим в виде теоремы одно общее, имеющее отношение к теоремам 2.1 и 4.1, свойство представления факторгруппы $H/\mathrm{O}_{\pi}(H)$, связанное с обобщёнными подгруппами Фраттини и локальной формацией $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{F}$.

***Теорема* 5.3.** Пусть $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{F}$ − *локальная формация*, *и пусть* H − *подгруппа группы* G, *подгруппа* $\Phi_{\pi}(G)$ *обладает свойством* C_{π}. *Имеют место следующие утверждения.*

I. *Если* θ − *абнормально* π'*-полный подгрупповой m-функтор*, *то факторгруппа* $H/\mathrm{O}_{\pi}(H)$ *представима в виде прямого произведения*

$$H/\mathrm{O}_{\pi}(H)=H_1/\mathrm{O}_{\pi}(H)\times H_2/\mathrm{O}_{\pi}(H),$$

множители которого удовлетворяют условиям:

1) $H_1\in\mathfrak{F}$;

2) $H_2\subseteq\Phi_{\theta_{\pi}}(G)$,

тогда и только тогда, *когда* $H/\mathrm{O}_{\pi}(H)$ *представима в виде прямого произведения*

$$H/\mathrm{O}_{\pi}(H)=\tilde{H}_1/\mathrm{O}_{\pi}(H)\times\tilde{H}_2/\mathrm{O}_{\pi}(H),$$

множители которого удовлетворяют условиям:

1) $\tilde{H}_1\in\mathfrak{F}$;

2) $\pi(\tilde{H}_2/\mathrm{O}_{\pi}(H))\bigcap\pi(\mathfrak{F})=\varnothing$;

3) $\tilde{H}_2\subseteq\Phi_{\theta_{\pi}}(G)$.

II. *Факторгруппа* $H/\mathrm{O}_{\pi}(H)$ *представима в виде прямого произведения*

$$H/\mathrm{O}_{\pi}(H)=H_1/\mathrm{O}_{\pi}(H)\times H_2/\mathrm{O}_{\pi}(H),$$

множители которого удовлетворяют условиям:

1) $H_1\in\mathfrak{F}$;

2) $H_2\subseteq\Phi_{\pi}(G)$ $(H_2\subseteq\Delta_{\pi}(G))$,

тогда и только тогда, *когда* $H/\mathrm{O}_{\pi}(H)$ *представима в виде прямого произведения*

$$H/\mathrm{O}_{\pi}(H)=\tilde{H}_1/\mathrm{O}_{\pi}(H)\times\tilde{H}_2/\mathrm{O}_{\pi}(H),$$

множители которого удовлетворяют условиям:

1) $\tilde{H}_1\in\mathfrak{F}$;

2) $\pi(\tilde{H}_2/\mathrm{O}_{\pi}(H))\bigcap\pi(\mathfrak{F})=\varnothing$;

3) $\tilde{H}_2\subseteq\Phi_{\pi}(G)$ $(\tilde{H}_2\subseteq\Delta_{\pi}(G)$, *соответственно*).

Доказательство. I. Пусть факторгруппа $H/\mathrm{O}_{\pi}(H)$ представима в виде:

$$H/\mathrm{O}_{\pi}(H)=H_1/\mathrm{O}_{\pi}(H)\times H_2/\mathrm{O}_{\pi}(H),$$

где $H_1\in\mathfrak{F}$, $H_2\subseteq\Phi_{\theta_{\pi}}(G)$, θ − абнормально π'-полный подгрупповой m-функтор. Предположим, $\pi(H_2/\mathrm{O}_{\pi}(H))\bigcap\pi(\mathfrak{F})\neq\varnothing$. Принимая во внимание утверждение (5) леммы 1.1,

$$\Phi_{\theta_{\pi}}(G)\subseteq\Delta_{\pi}(G)\in\mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{N}_{\pi'},$$

а значит, ввиду S-замкнутости формации $\mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{N}_{\pi'}$ подгруппа H_2 π'-нильпотентна и, следовательно, учитывая $\mathrm{O}_{\pi}(H_2)=\mathrm{O}_{\pi}(H)$, имеем:

$$H_2/\mathrm{O}_{\pi}(H)=H_0/\mathrm{O}_{\pi}(H)\times\tilde{H}_2/\mathrm{O}_{\pi}(H),$$

где $H_0/\mathrm{O}_{\pi}(H)$ − нильпотентная холловская $\pi(\mathfrak{F})\cap\pi'$-подгруппа, а $\tilde{H}_2/\mathrm{O}_{\pi}(H)$ − (нильпотентная) холловская $\pi'(\mathfrak{F})$-подгруппа группы $H_2/\mathrm{O}_{\pi}(H)$. Кроме того, так как формация $\mathfrak{F}$ локальна, то по лемме 4.2 из [1] $H_0/\mathrm{O}_{\pi}(H)\in\mathfrak{F}$. Имеем:

$$H/\mathrm{O}_{\pi}(H)=H_1/\mathrm{O}_{\pi}(H)\times(H_0/\mathrm{O}_{\pi}(H)\times\tilde{H}_2/\mathrm{O}_{\pi}(H))=$$
$$=(H_1/\mathrm{O}_{\pi}(H)\times H_0/\mathrm{O}_{\pi}(H))\times\tilde{H}_2/\mathrm{O}_{\pi}(H)=$$
$$=\tilde{H}_1/\mathrm{O}_{\pi}(H)\times\tilde{H}_2/\mathrm{O}_{\pi}(H),$$

где

$$\tilde{H}_1/\mathrm{O}_{\pi}(H)=H_1/\mathrm{O}_{\pi}(H)\times H_0/\mathrm{O}_{\pi}(H)\in\mathfrak{F},$$
$$\tilde{H}_2\in\Phi_{\theta_{\pi}}(G),\ \ \pi(\tilde{H}_2/\mathrm{O}_{\pi}(H))\bigcap\pi(\mathfrak{F})=\varnothing.$$

Обратное утверждение не требует доказательства. Утверждение II может быть доказано аналогично, т. к. по утверждениям (1) и (5) леммы 1.1 подгруппы $\Phi_\pi(G)$ и $\Delta_\pi(G)$ π'-нильпотентны; утверждение II следует также из утверждения I: положим в соответствующих случаях для абнормально π'-полного подгруппового *m*-функтора θ

$$\theta(G)=\{G\}\cup \mathrm{M}(G) \text{ и } \theta(G)=\{G\}\cup \mathrm{M}_\pi^{\mathfrak{N}}(G). \ \square$$

***Следствие* 5.3.1.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *− локальная формация, и пусть H − подгруппа группы G. Имеют место следующие утверждения.*

I. *Если* θ *− абнормально полный подгрупповой m-функтор, то группа H представима в виде прямого произведения* $H=H_1\times H_2$, *множители которого удовлетворяют условиям:*

1) $H_1\in\mathfrak{F}$;

2) $H_2\subseteq \Phi_\theta(G)$,

тогда и только тогда, когда H представима в виде прямого произведения $H=\tilde{H}_1\times\tilde{H}_2$, *множители которого удовлетворяют условиям*:

1) $\tilde{H}_1\in\mathfrak{F}$;

2) $\pi(\tilde{H}_2)\cap\pi(\mathfrak{F})=\varnothing$;

3) $\tilde{H}_2\subseteq\Phi_\theta(G)$.

II. *Группа H представима в виде прямого произведения* $H=H_1\times H_2$, *множители которого удовлетворяют условиям*:

1) $H_1\in\mathfrak{F}$;

2) $H_2\subseteq\Phi(G)$, $(H_2\subseteq\Delta(G))$,

тогда и только тогда, когда H представима в виде прямого произведения $H=\tilde{H}_1\times\tilde{H}_2$, *множители которого удовлетворяют условиям*:

1) $\tilde{H}_1\in\mathfrak{F}$;

2) $\pi(\tilde{H}_2)\cap\pi(\mathfrak{F})=\varnothing$;

3) $\tilde{H}_2\subseteq\Phi(G)$ ($\tilde{H}_2\subseteq\Delta(G)$, *соответственно*).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва: Наука, 1978. – 272 с.
2. *Ballester-Bolinches*, *A.* On $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups and Frattini-like subgroups of a finite group / A. Ballester-Bolinches, M.D. Perez-Ramos // Glazgow Math. J. – 1994. – № 36. – P. 241–247.
3. *Бородич*, *Е.Н.* Об абнормальных максимальных подгруппах конечных групп / Е.Н. Бородич, М.В. Селькин // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2006. – № 5 (38). – С. 11–13.
4. *Бородич*, *Р.В.* К теореме Л.А. Шеметкова / Р.В. Бородич, М.В. Селькин // Вестник БГУ. Серия 1. – 2008. – № 3. – С. 101–107.
5. *Каморников*, *С.Ф.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Мн.: Беларуская навука, 2003. – 254 с.
6. *Белоконь*, *Л.М.* О пересечениях максимальных θ_π-подгрупп конечных групп и $\mathfrak{F}$-абнормально π'-полный подгрупповой *m*-функтор / Л.М. Белоконь // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 4 (25). – С. 50–58.
7. *Белоконь*, *Л.М.* К вопросу о пересечениях максимальных θ-подгрупп конечных групп / Л.М. Белоконь // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 46–50.
8. *Селькин*, *М.В.* Пересечение максимальных подгрупп в конечных группах / М.В. Селькин, В.Н. Семенчук // Вопросы алгебры. – 1985. – Вып. 1. – С. 67–72.
9. *Белоконь*, *Л.М.* Пересечения максимальных подгрупп конечных групп и радикальные формации / Л.М. Белоконь // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2013. – № 6 (81). – С. 3–10.
10. *Белоконь*, *Л.М.* О пересечениях максимальных подгрупп конечных групп / Л.М. Белоконь // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 46–59.

Поступила в редакцию 30.09.16.