УДК 535.42

РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ. I. 3D СВЕТОВЫЕ ПУЧКИ КУММЕРА – КУММЕРА С НЕПРЕРЫВНЫМ УГЛОВЫМ ИНДЕКСОМ

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

SOLUTIONS OF THE WAVE EQUATION IN PARABOLIC ROTARY COORDINATES. I. 3D KUMMER – KUMMER LIGHT BEAMS WITH THE CONTINUOUS ANGULAR INDEX

S.S. Girgel

F. Scorina Gomel State University

Предложены и анализируются аналитические выражения в замкнутой форме для непараксиальных и параксиальных 3D пучков Куммера – Куммера (К-К) с непрерывным угловым индексом m в параболических вращательных координатах. Сформулированы физические ограничения на возможные значения свободных параметров таких пучков.

Ключевые слова: *непараксиальные пучки*, *параксиальные пучки*, *параболические пучки*, *пучки Куммера – Куммера.*

Analytical expressions in the closed form for nonparaxial and paraxial 3D Kummer – Kummer (K-K) beams with continuous angular index m in parabolic rotary coordinates are offered and analyzed. Physical restrictions on possible values of the free parameters of such beams are formulated.

Keywords: *nonparaxial beams*, *paraxial beams*, *parabolic beams*, *Kummer – Kummer beams.*

Введение

В настоящее время наблюдается повышенный интерес к поиску новых решений для оптических полей. При этом получают как новые решения, так и обобщаются значения свободных параметров. В работах [1]–[6] нами были введены пучки Бесселя [1], Бесселя – Гаусса [2], [3], Куммера – Гаусса [4], Куммера [5] и Вебера – Гаусса [6] непрерывного порядка.

В данной работе этот подход распространяется на другие решения волнового уравнения в параболических вращательных координатах. Получены выражения, описывающие 3D световые пучки Куммера – Куммера с непрерывным угловым индексом m и обсуждаются физически приемлемые значения других их свободных параметров.

1 Решение волнового уравнения в параболических координатах вращения

Для монохроматических волн вида

$$E = f(k,\mathbf{r})\exp(i\omega t)$$

волновое уравнение редуцируется к уравнению Гельмгольца

$$\left(\partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz} + k^2\right) f = 0.$$

Переходя к параболическим координатам вращения соотношениями [7]–[9]

$$\left[x = \xi\eta\cos\varphi;\ y = \xi\eta\sin\varphi;\ = (\eta^2 - \xi^2)/2\right]$$

получаем уравнение Гельмгольца в параболическом базисе

$$\frac{1}{\eta^2+\xi^2}\left[\left(\partial_{\eta\eta} + \partial_{\xi\xi}\right) f + \left(\frac{1}{\eta} f_\eta + \frac{1}{\xi} f_\xi\right)\right] + \\ + \frac{1}{\xi^2\eta^2} f_{\varphi\varphi} + k^2 f = 0. \quad (1.1)$$

Здесь $\xi \in [0,\infty), \eta \in [0,\infty), \varphi \in [0, 2\pi]$. Тогда

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = \xi^2 + \eta^2;$$

$$tg\varphi = y / x;$$

$$\xi^2 = -z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$\eta^2 = z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Ищем решение (1.1) в виде

$$f\left(\xi,\eta,\varphi\right) = S\left(\xi\right) N\left(\eta\right) \Theta\left(\varphi\right).$$

Разделяя переменные, получаем уравнения

$$d_{\xi\xi} S + \frac{1}{\xi} d_\xi S + \left(-\frac{m^2}{\xi^2} + k^2\xi^2 + 2i\alpha k\right) S = 0. \quad (1.2)$$

$$d_{\eta\eta} N + \frac{1}{\eta} d_\eta N + \left(-\frac{m^2}{\eta^2} + k^2\eta^2 - 2i\alpha k\right) N = 0. \quad (1.3)$$

$$\Theta_{\varphi\varphi} + m^2\Theta = 0, \quad (1.4)$$

где m и α – постоянные разделения. Решения уравнений (1.2) и (1.3) можно выразить через вырожденные гипергеометрические функции Куммера M (чаще обозначаются как ${}_1F_1$) и функции Трикоми U следующим образом:

$$S = \xi^m e^{-ik\xi^2/2}\left[c_1 M\left(\frac{m+1-\alpha}{2}, m+1; ik\xi^2\right)+ +c_2 U\left(\frac{m+1-\alpha}{2}, m+1; ik\xi^2\right)\right]; \quad (1.5)$$

$$N = \eta^m e^{-ik\eta^2/2}\left[c_3 M\left(\frac{m+1+\alpha}{2}, m+1; ik\eta^2\right)+ +c_4 U\left(\frac{m+1+\alpha}{2}, m+1; ik\eta^2\right)\right]. \quad (1.6)$$

Обозначим далее $\frac{m+1-\alpha}{2} = a$. Возьмем, для простоты, азимутальную зависимость в (1.4) в форме $\Theta = e^{im\varphi}$. Здесь m – азимутальное число (топологический заряд) для оптических вихрей. Так как $\eta \geq 0$, $\xi \geq 0$, то полагаем $m \geq 0$, чтобы ξ^m и η^m при $\eta, \xi \to 0$ были конечными. Обычно полагают [7]–[12] угловой индекс m дискретным целочисленным. Однако, в общем случае индекс m может быть непрерывным. В таких случаях волновой фронт исследуемых пучков является спиральным. Функции S и N и их производные должны быть конечными и непрерывными. Учитываем, что

$$\xi^2 = -z + r;$$
$$\eta^2 = z + r;$$
$$e^{im\varphi}(\xi\eta)^m = (x+iy)^m.$$

Теперь общее решение волнового уравнения для световых монохроматических полей в параболических вращательных координатах имеет вид

$$E = \exp(ikz \pm i\omega t)\cdot\big(k(x+iy)\big)^m \times \times(c_1M_- + c_2U_-)(c_5M_+ + c_6U_+),$$

где c_i – произвольные константы. Перейдем к безразмерным переменным и параметрам соотношениями

$$kx = X;\ ky = Y;\ kz = Z;$$
$$\omega t = T;$$
$$k\rho = R_\perp = \sqrt{X^2+Y^2};$$
$$R = kr = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}.$$

Тогда общее решение для световых монохроматических волн в параболических вращательных безразмерных координатах принимает форму

$$E = e^{i(Z\pm T)}\cdot(X+iY)^m \times \times(c_1M_- + c_2U_-)(c_5M_+ + c_6U_+), \quad (1.7)$$

где

$$M_\pm = M\big(a, m+1; \mp i(R\pm Z)\big);$$
$$U_\pm = U\big(a, m+1; \mp i(R\pm Z)\big). \quad (1.8)$$

2 Непараксиальные параболические Куммера – Куммера волновые поля

Теперь обсудим непараксиальные параболические Куммера – Куммера (pK-K) волновые поля, описываемые выражением

$$E(M_+M_-) = e^{i(Z+T)}\cdot(X+iY)^m \times \times M\big(a, m+1; -i(R+Q)\big)\times \times M\big(a, m+1; +i(R-Q)\big). \quad (2.1)$$

Это – плоские монохроматические волны с внедренным оптическим вихрем и амплитудой, зависящей от координат и двух параметров a и m. Здесь и далее выполнена комплексификация координаты Z, т. е. введен комплексный параметр пучка $Q = Z - iQ_0$, широко применяемый в теории гауссовых пучков. Будем считать также, что азимутальный параметр (индекс) m является непрерывным. Индекс a может быть, вообще говоря, произвольным комплексным числом. Отметим, что выражение (2.1) соответствует некоторым формулам работ [9], [12], однако там индекс m считался целочисленным.

1. Пусть $a = -n$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Тогда функции

$$M\big(-n, m+1; \mp i(R\pm Q)\big),$$

согласно [12], [13], пропорциональны полиномам Лагерра

$$L_n^m(\mp i(R\pm Q))$$

мнимого аргумента степени n. В итоге получаем параболические Лагерра – Лагерра (pL-L) волновые поля, описываемые выражением

$$E_{pLL} = e^{i(Z+T)}\cdot(X+iY)^m \times \times L_n^m(-i(R+Q))\cdot L_n^m(i(R-Q)).$$

Здесь функции E_{pLL} конечны и непрерывны, но неограниченно возрастают при увеличении Z и $R_\perp$. В частности, если $n = 0$, тогда

$$M\big(0, m+1; \mp i(R\pm Q)\big) = 1;$$
$$U\big(0, m+1; \mp i(R\pm Q)\big) = 1$$

и получаем плоскую монохроматическую волну постоянной амплитуды с внедренным оптическим вихрем. Она обладает бесконечной энергией и бесконечной переносимой мощностью.

2. Пусть $a = m+1$, тогда

$$M\big(m+1, m+1; \mp i(R\pm Q)\big) = \exp(\mp i(R\pm Q)),$$
$$M_-M_+ = \exp(-2iQ)$$

и снова получаем плоскую монохроматическую волну постоянной амплитуды с внедренным оптическим вихрем

3. Наибольший практический интерес представляют физически реализуемые пучки конечной мощности. Амплитуда такого пучка должна быть ограниченной при всех $R_\perp$. Более того, при $|R_\perp| \to \infty$ амплитуда E должна стремиться к

нулю и удовлетворять некоторым условиям квадратичной интегрируемости (КИ). Пусть $a=(m+1)/2,$ тогда, согласно Абрамовицу [12]

$$M\left(\frac{m+1}{2}, m+1; \mp i(R\pm Q)\right)=$$
$$=2^m \exp\left(\mp i\frac{(R\pm Q)}{2}\right)(R\pm Q)^{-m/2}\times$$
$$\times J_{m/2}\left(\frac{R\pm Q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)$$

и получаем волновые поля параболик-Бессель–Бессель

$$E_{pBB}=e^{i(+T)}\cdot e^{im\varphi}J_{m/2}\left(\frac{R+Q}{2}\right)\cdot J_{m/2}\left(\frac{R-Q}{2}\right).$$

Это выражение не может описывать бегущие волны. Это обстоятельство впервые отметили Ковалев и Котляр в [14]. Действительно, так как при $x\to 0$ $J_a(x)\to x^a 2^{-a}/\Gamma(1+a),$ то при $R_\perp\to 0$

$$E_{pBB}\to 4^{-m}e^{+iT}\cdot e^{im\varphi}R_\perp^2 J/\Gamma(1+m/2)\sim$$
$$\sim e^{\pm iT}(X+IY)^m.$$

Здесь и далее $Z_\pm=(R\pm Q)/2.$ Получили не бегущую волну, а монохроматическое колебание. Действительно, пусть $Z_+\to\infty,$ тогда имеем стоячую волну

$$E_{pBB}\to e^{\pm iT}\cdot e^{im\phi}J_{m/2}\left(\frac{R_\perp^2}{4Q}\right)\times$$
$$\times\sqrt{\frac{2}{\pi Z_+}}\cos\left(Q_+-\left(\frac{2m+1}{4}\right)\pi\right).$$

Функция M_-M_+ периодически обращается в нуль при возрастании Z_+. Известно [12], что функция Бесселя вещественного аргумента имеет бесчисленное множество нулей. Так как функции Бесселя непрерывны, то каждому значению $Z_\pm=0$ соответствует узел стоячей волны. Каждому узлу – некоторая непрерывная поверхность с нулевой амплитудой. Уравнения

$$Z_1=\sqrt{R_\perp^2+Q^2}\pm Q$$

описывают параболоиды вращения вокруг оси *Z*, где амплитуда функции M_-M_+ обращается в нуль. Поэтому волновые E_{pBB} поля описывают стоячие вдоль оси *Z* волны, но не с плоскими поверхностями нулевой амплитуды, а с параболическими. Функции Куммера

$$M\left(a, m+1; \mp i(R\pm Q)\right)$$

при различных значениях $a=\frac{m+1}{2}$ (функции Бесселя, сферические функции Бесселя, функции Эрмита, Лагерра, тригонометрические функции sin*x* и cos*x*) имеют нули и соответствуют стоячим волнам.

Возникает вопрос: можно ли получить бегущую волну вместо стоячей E_{pBB}? При комплексификации $Z_\pm$ по *X*, *Y*, *Z* все нули не исчезают, только видоизменяются. При параксиализации *E*, т. е. при $Z^2>>R_\perp^2$ аргументы

$$Z_+\to 2Q;$$
$$Z_-\to R_\perp^2/(2Q)$$

и остается нуль в Z_-, Z_+ можно использовать. Однако функции Куммера

$$M\left(a, m+1; \mp i(R\pm Q)\right)$$

имеют нули только при $a=(m+1)/2,$ при любых *a* и *m*, даже комплексных.

Проведем анализ условий КИ для 3D световых пучков Куммера – Куммера (2.1). Для этого исследуем поведение функций *E* при $R_\perp\to\infty.$ Предварительно обсудим варианты $a=-n$ и $b-a=-n.$ В обоих случаях при $R_\perp\to\infty$ функция $E(M_+M_-)\to R_\perp^{m+2n}$ и при $m\ge 0$ нет КИ. Обсудим другие возможные варианты. Асимптотическое поведение конфлюэнтной гипергеометрической функции $M(a,b,L)$ при $|L|\to\infty$ описывается формулой [15]

$$M(a,b,L)\to\frac{e^{-i\pi a}\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)}L^{-a}+\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}L^{a-b}e^{L},$$

если $a\ne 0,-1,-2,\ldots$. Тогда, при $R_\perp^2\to\infty$ получаем, с точностью до множителей, не содержащих $R_\perp$, что

$$E(M_+M_-)\to$$
$$\to\left(\frac{R_\perp^{-2a+m}}{\Gamma^2(b-a)}+\frac{R_\perp^{2a-2b+m}e^{iR_\perp}}{\Gamma^2(a)}+\frac{R_\perp^{-b}\cos(R_\perp)}{\Gamma(b-a)\Gamma(a)}\right). \quad (2.2)$$

При $a'=\frac{m'}{2}$ или $a'=\frac{m'+2}{2}$ амплитуда $E\to const.$ При $a'\in\left(\frac{m'}{2},\frac{m'+2}{2}\right)$ интенсивность $I(R_\perp)$ с увеличением $R_\perp$ постепенно убывает, но общая переносимая мощность бесконечно большая. Интенсивность волн при возрастании $R_\perp$ колеблется около постоянного значения, при этом осцилляции амплитуды постепенно уменьшаются. Картина интенсивности в поперечном сечении пучка представляет собой кольца. Компьютерное моделирование показывает, что вариации остальных параметров качественно картину не меняют. Иногда кольца сливаются в одну, модулированную по поперечной координате $R_\perp$ фигуру. С увеличением *Z* происходит постепенное расширение (расплывание) картины интенсивности. Строгой КИ нет. Лучший вариант, когда $a'=\frac{m+1}{2},$ тогда $E(M_+M_-)\to R_\perp^{-1}$ и получаем бегущую волну с квази-КИ. Итак, если a немного отличается от $\frac{m+1}{2}$ вещественной или мнимой частью, то получается модулированная волна, перемещающаяся вдоль Z и убывающая по всем трем координатам. Это – аналог волны Бесселя. Однако классическая волна Бесселя – бегущая вдоль Z и стоячая в перпендикулярных направлениях. Квази-КИ при реальных апертурных ограничениях пучков будет приводить к практической реализации пучков $E(M_+M_-)$.

3 Параболические Куммера-Куммера $E(M_+M_-)$ волновые поля в параксиальном приближении

Волновые поля $E(M_+M_-)$ в параксиальном приближении описываются выражением

$$E(M_{+p}M_{-p}) = e^{i(Z+T)} \cdot \left(X + iY\right)^m \times$$
$$\times M\left(a, m+1; -2iQ\right) \cdot M\left(a, m+1; +\frac{iR_\perp^2}{2Q}\right). \quad (3.1)$$

Здесь и далее индекс p означает параксиальное приближение. Следуя Флюгге [15], при $\left|R_\perp\right| \to \infty$ получаем

$$E(M_{+p}M_{-p}) \to \left(\frac{R_\perp^{-2a+m}}{\Gamma(m+1-a)} + \frac{R_\perp^{2a-2-m}}{\Gamma(a)} e^{i\frac{R_\perp^2}{2Q}}\right).$$

Множители, не содержащие $R_\perp$, не учитываем. В общем случае параметр a также – комплексный, т. е. $a = a' + ia''$. Обозначим переносимую мощность пучка через его поперечное сечение как W. Анализ показывает, что возможны следующие варианты условий КИ функции E при $Q_0 > 0$:

1. Если $a' < \frac{m}{2}$, тогда $\left|E\right| \to \infty$ и $W \to \infty$.

2. Если $a' = \frac{m}{2}$, тогда $\left|E\right| \to const$, но $W \to \infty$.

3. Если $a' \in \left(\frac{m}{2}, \frac{m+1}{2}\right]$, тогда $\left|E\right| \to 0$, но $W \to \infty$.

4. Если $a' > \frac{m+1}{2}$, тогда $\left|E\right| \to 0$ и $W \to const$.

Итак, необходимые и достаточные условия переносимой конечной мощности параксиальных параболических пучков Куммера – Куммера и, тем самым, его физической реализуемости следующие: $(Q_0 > 0) \cap \left(a' > \frac{m+1}{2}\right)$. При этом мнимая часть a'' параметра a, а также комплексификация переменных X, Y, Z не влияют на КИ. Компьютерное моделирование подтверждает эти выводы.

Заключение

В данной работе выведены выражения, описывающие новые типы пучков – 3D световые пучки Куммера – Куммера с непрерывным угловым индексом m в параболических вращательных координатах. Частными случаями введенных здесь пучков являются соответствующие пучки с дискретным целочисленным индексом m.

Найдены условия физической реализуемости непараксиальных и параксиальных параболических пучков Куммера – Куммера, которые подтверждаются графическим моделированием их интенсивности. Существенно, что здесь для КИ не требуется гауссова аподизация пучков. Одновременный переход от дискретных значений m к непрерывному спектру, а также от вещественных к комплексным значениям a сильно расширяет класс известных в настоящее время пучков с цилиндрической симметрией. Варьирование новых свободных параметров таких пучков несомненно расширяет и предоставляет новые дополнительные возможности создания и исследования пучков с заданными свойствами для последующих практических применений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гиргель*, *С.С.* Бездифракционные асимметричные волновые поля Бесселя непрерывного порядка / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 13–16.

2. *Гиргель*, *С.С.* Обобщенные пучки Бесселя – Гаусса непрерывного порядка / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 4 (25). – С. 11–15.

3. *Гиргель*, *С.С.* Обобщенные асимметричные волновые пучки Бесселя – Гаусса непрерывного порядка / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 2 (31). – С. 10–14.

4. *Гиргель*, *С.С.* Циркулярные 3D световые пучки Куммера – Гаусса с непрерывным угловым спектром / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 1 (38). – С. 4–7.

5. *Гиргель*, *С.С.* Пучки Куммера без гауссовой аподизации с переносимой конечной мощностью / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 7–9.

6. *Гиргель*, *С.С.* Оптические пучки Вебера – Гаусса с непрерывным угловым спектром / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4 (37). – С. 1–5.

7. *Миллер*, *У.* Симметрия и разделение переменных / У. Миллер. – М.: Мир, 1981. – 342 с.

8. *Морс*, *Ф.М.* Методы теоретической физики. Т. 2 / Ф.М. Морс, Г.М. Фешбах. – Пер. с англ. – Москва.: ИЛ. – 1960. – 886 с.

9. *Three-dimensional nonparaxial beams in parabolic rotational coordinates* / D. Deng [et al.] //

Optics Letters. – 2013. – Vol. 38, № 19. – P. 3934–3936.

10. *Woon*, *L.C.* Helmholtz equation in parabolic rotation coordinates application to wave problems in quantum mechanics and acoustics / L.C. Woon, L.Y. Willartzen // Mathematics and Computers in simulation. – 2004. – Vol. 65. – P. 337–349.

11. *Miller*, *W.* Lie theory and separation of variables. II. Parabolic coordinates / W. Miller // Siam J. Math. Anal. – 1974. – Vol. 5, № 5. – P. 822–836.

12. *Ковалёв*, *А.А.* Лазерные пучки Ханкеля-Бесселя / А.А. Ковалёв, В.В. Котляр // Компьютерная оптика. – 2011. – Т. 35, № 3. – С. 297–304.

13. *Справочник по специальным функциям* / Под ред. Абрамовица М. и Стиган И. – Пер. с англ. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

14. *Янке*, *Е.* Специальные функции / Е. Янке Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.: Наука, 1977. – 342 с.

15. *Флюгге*, *З.* Задачи по квантовой механике. Т. 2 / З. Флюгге. – М.: Мир, 1974. – 418 с.

Поступила в редакцию 24.06.2020.