МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О СТРОЕНИИ СУБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП В ГРУППАХ С ОПЕРАТОРАМИ

Р.В. Бородич, Е.Н. Бородич, М.В. Селькин

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON THE STRUCTURE OF SUBNORMAL SUBGROUPS IN GROUPS WITH OPERATORS

R.V. Borodich, E.N. Borodich, M.V. Selkin

F. Scorina Gomel State University

Изучаются свойства пересечений максимальных подгрупп в группах с операторами.

Ключевые слова: *конечная группа*, *субнормальная подгруппа*, *локальная формация.*

The properties of intersection of maximal subgroups in groups with the operators are studied.

Keywords: *finite group*, *subnormal subgroup*, *local formation.*

Введение

В работе Д.Бейдлемана и Ш.Смита [1] был поставлен следующий вопрос: «Если H – субнормальная подгруппа группы G, содержащая подгруппу Фраттини $\Phi(G)$, то будет ли из сверхразрешимости $H/\Phi(G)$ следовать сверхразрешимость подгруппы H?» Эта задача рассматривалась в работах М.В. Селькина [2], Баллестера-Болиншеса [3] и многих других авторов [2].

В данной работе даётся ответ на более общий вопрос: «Пусть $\Im$ – локальная формация, H – субнормальная подгруппа. В каком случае из $H/\Delta(G,A)\in\Im$ будет следовать, что $H\in\Im$, где $\Delta(G,A)$ подгруппа, равная пересечению ядер всех абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп?»

1 Используемые определения и леммы

Рассматриваются только конечные группы. В обозначениях и определениях мы следуем монографиям [2], [4].

Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G (то есть пересечение всех подгрупп из G, сопряженных с подгруппой M).

Пусть даны группа G, множество A и отображение $f: A\mapsto End(G)$, где $End(G)$ – гомоморфное отображение группы G в себя или эндоморфизм группы G. Подгруппа M называется A-допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A, то есть $M^{\alpha}\subseteq M$ для любого оператора $\alpha\in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им эндоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A-допустимой для произвольной группы операторов.

Напомним, подгруппа H группы G называется: *пронормальной*, если для любого $x\in G$ подгруппы H и H^x сопряжены между собой в $<H,H^x>$; *абнормальной*, если $x\in<H,H^x>$ для любого $x\in G$.

Обозначим через $\Phi(G,A)$ пересечение ядер всех максимальных A-допустимых подгрупп, а через $\Delta(G,A)$ $(\Delta^p(G,A))$ пересечение ядер всех абнормальных (абнормальных не p-нильпотентных) максимальных A-допустимых подгрупп.

Для пересечения всех абнормальных (абнормальных не p-нильпотентных) максимальных подгрупп группы G будем использовать ставшее традиционным обозначение подгруппы Гашюца $\Delta(G)$ $(\Delta^p(G))$.

В случае отсутствия в группе G указанных подгрупп будем полагать, что соответствующие пересечения совпадают с самой группой G.

Необходимо отметить, что не всегда множество всех максимальных подгрупп группы G будет совпадать со множеством всех максимальных A-допустимых подгрупп группы G относительно некоторой группы операторов A [5].

Напомним, что группа G называется π-замкнутой, если она содержит инвариантную π-холловскую подгруппу.

***Лемма* 1.1.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что* $(|G|,|A|)=1$, $K\subseteq N\lhd G$, $K\lhd G$, N *и* K *– A-допустимые подгруппы группы G и* $K\subseteq\Delta(G,A)$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

© *Бородич Р.В.*, *Бородич Е.Н.*, *Селькин М.В.*, 2016

1) *если* N/K π*-замкнута, то и* N π*-замкнута*;

2) $F_p(N/K) = F_p(N)/K$.

Доказательство. Пусть N/K имеет нормальную S_π-подгруппу H/K. Так как $K \subseteq \Delta(G, A)$, то K нильпотентна. Нетрудно заметить, что $S_{\pi'}$-подгруппа R из K является $S_{\pi'}$-подгруппой в H. По теореме Шура-Цассенхауза H содержит S_π-подгруппу S и любые две такие подгруппы сопряжены в H. По обобщенной лемме Фраттини $G = N_G(S)H$. С учётом того, что $H = SR$, получаем, что $G = N_G(S)R$. Так как S есть S_π-подгруппа в N, а подгруппа N A-допустима, то S A-допустима. Тогда подгруппа $N_G(S)$ A-допустима и является абнормальной подгруппой группы G. Следовательно, $N_G(S)$ содержится в некоторой абнормальной максимальной A-допустимой подгруппе M из G. Поэтому $G = MR$. Так как $R \subseteq \Delta(G, A) \subseteq M$, то $G = M$. Получили противоречие. Следовательно, S нормальна в G.

Второе утверждение леммы является следствием первого при $\pi = p'$. □

***Лемма* 1.2** [6, с. 367]. *Пусть F – локальная формация, $G \in F$ и p является простым делителем порядка группы G. Тогда формация F содержит циклическую группу порядка p. В частности, если $\Im$ – локальная формация, $\pi = \pi(\Im)$, то $N_\pi \subseteq F \subseteq E_\pi$.*

***Лемма* 1.3** [4, с. 38]. *Пусть f – локальный экран формации F. Группа G тогда и только тогда принадлежит F, когда $G/F_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G)$.*

***Лемма* 1.4.** *Пусть K – нормальная подгруппа группы G обладающая свойством C_π и H – холлова подгруппа из K. Тогда $N_G(H)$ – абнормальная подгруппа группы G.*

Доказательство. Заметим, что для любого $x \in G$ подгруппы H и H^x сопряжены между собой в $< H, H^x > \subseteq K$, то есть H является пронормальной подгруппой в G. Тогда подгруппа $N_G(H)$ является абнормальной в G. □

Из теоремы Силова следует, что любая подгруппа группы G обладает свойством C_p. Отсюда и из предыдущей леммы получаем, что в любой нормальной подгруппе нормализатор A-допустимой силовской подгруппы является абнормальной подгруппой группы G.

***Лемма* 1.5** [7, с. 44]. *Пусть p – простое нечётное число. Группа G является p-нильпотентной тогда и только тогда, когда для любой подгруппы P, характеристической в некоторой силовской p-подгруппе группы G, $N_G(P)/C_G(P)$ – p-подгруппа.*

***Лемма* 1.6** [8, с. 26]. *Пусть группа G имеет группу операторов A. Если K – A-допустимая подгруппа группы G, то $N_G(K)$ является A-допустимой подгруппой группы G.*

2 Свойства пересечений максимальных подгрупп в группах с операторами.

***Теорема* 2.1.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|, |A|) = 1$, $\Im$ – локальная формация, $\pi = \pi(\Im)$. Если субнормальная A-допустимая подгруппа H группы G содержит $O_\pi(\Delta(G, A))$ и $H/O_\pi(\Delta(G, A)) \in \Im$, то $H \in \Im$.*

Доказательство. Согласно лемме 1.2 $\Im$ содержится в E_π классе всех π-групп. Не ограничивая общности, можно считать, что $\Delta(G, A)$ – π-группа. Таким образом, H – π-группа и $H/\Delta(G, A) \in \Im$. Пусть $p \in \pi$. Так как H – субнормальная подгруппа группы G и согласно леммы 1.1 $F_p(G/\Delta(G, A)) = F_p(G)/\Delta(G, A)$, получаем, что $F_p(H/\Delta(G, A)) = F_p(H)/\Delta(G, A)$. Так как $H/\Delta(G, A) \in \Im$, то, используя лемму 1.1 и лемму 1.3, получаем, что

$$(H/\Delta(G, A))/F_p(H/\Delta(G, A)) =$$
$$= H/\Delta(G, A)/F_p(H)/\Delta(G, A)$$
$$H/F_p(H) \in f(p).$$

Так как последнее справедливо для любого $p \in \pi(H)$, то по лемме 1.3 подгруппа H входит в $\Im$. Теорема доказана.

В случае, когда $\Im$ содержит формацию нильпотентных групп, тогда $\pi = P$ и теорема 2.1 дает ответ на вопрос: «Если H субнормальная A-допустимая подгруппа группы G, такая, что $H/\Delta(G, A) \in \Im$, то $H \in \Im$?»

В случае, когда группа операторов $A = 1$, то подгруппа $\Delta(G, A)$ совпадает с подгруппой Гашюца $\Delta(G)$ и имеет место следующее

***Следствие* 2.1.1.** *Пусть $\Im$ – локальная формация, $\pi = \pi(\Im)$. Если субнормальная подгруппа H группы G содержит $O_\pi(\Delta(G))$ и $H/O_\pi(\Delta(G)) \in \Im$, то $H \in \Im$.*

Используя доказательство теоремы 2.1, несложно получить следующее следствие.

***Следствие* 2.1.2.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|, |A|) = 1$, $\Im$ – локальная формация, $\pi = \pi(\Im)$. Если субнормальная A-допустимая подгруппа H группы G содержит $O_\pi(\Phi(G, A))$ и $H/O_\pi(\Phi(G, A)) \in \Im$, то $H \in \Im$.*

Если группа операторов A единична, то подгруппа $\Phi(G, A)$ совпадает с подгруппой Фраттини $\Phi(G)$ и из следствия 2.1.2 получаем результат работы [3].

Замечание. *Если локальная формация $\mathfrak{I}$ не содержит формацию нильпотентных групп, то даже в случае единичной группы операторов из того, что $H / \Delta(G) \in \mathfrak{I}$ для субнормальной подгруппы H, не всегда следует, что $H \in \mathfrak{I}$. Действительно, пусть $\mathfrak{I} = S_p$ – насыщенная формация всех p-групп, p – простое число. Рассмотрим $q \neq p$ и пусть $G = C_{p^2} \times C_{q^2}$ – циклическая группа порядка p^2q^2. Если $H = C_{p^2}\Delta(G)$, тогда $H \lhd G$ и $H / \Delta(G) \in \mathfrak{I}$, но $H \notin \mathfrak{I}$.*

***Теорема* 2.2.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|, |A|) = 1$, $\mathfrak{I}$ – локальная формация. Если N – субнормальная A-допустимая подгруппа группы G и*

$$N / N \cap \Delta(G, A) \in \mathfrak{I}.$$

Тогда N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:

1) $N_1 \in \mathfrak{I}$;
2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{I}) = \varnothing$;
3) $N_2 \subseteq \Delta(G, A)$.

Доказательство. Пусть $D = N \cap \Delta(G, A)$, $\pi = \pi(\mathfrak{I})$. По теореме 2.1 подгруппа N представима в виде $N = N_1 \times N_2$, где N_1 – холловская π-подгруппа из N. Так как $N_2 \subseteq \Delta(G, A)$, то $N / DN_1 / D_1 \in \mathfrak{I}$, где $D_1 = N_1 \cap \Delta(G, A)$. Пусть $p \in \pi$. Так как $N_1 / D_1 \in \mathfrak{I}$, то, используя лемму 1.1 и лемму 1.3, получаем, что

$$(N_1 / D_1) / F_p(N_1 / D_1) =$$
$$= N_1 / D_1 / F_p(N_1) / D_1N_1 / F_p(N_1) \in f(p).$$

Так как последнее справедливо для любого $p \in \pi(N_1)$, то по лемме 1.3 подгруппа N_1 входит в $\mathfrak{I}$. □

***Следствие* 2.2.1.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|, |A|) = 1$, $\mathfrak{I}$ – локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если N – субнормальная A-допустимая подгруппа группы G и $N / N \cap \Delta(G, A) \in \mathfrak{I}$, то $N \in \mathfrak{I}$.*

***Следствие* 2.2.2.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|, |A|) = 1$, $\mathfrak{I}$ – локальная формация. Если N – субнормальная A-допустимая подгруппа группы G и $N / N \cap \Phi(G, A) \in \mathfrak{I}$. Тогда N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:*

1) $N_1 \in \mathfrak{I}$;
2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{I}) = \varnothing$;
3) $N_2 \subseteq \Phi(G, A)$.

***Следствие* 2.2.3.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|, |A|) = 1$, $\mathfrak{I}$ – локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если N – субнормальная A-допустимая подгруппа группы G и*

$$N / N \cap \Phi(G, A) \in \mathfrak{I},$$

то $N \in \mathfrak{I}$.

В случае, когда группа операторов единична имеет место следующее

***Следствие* 2.2.4.** *Пусть $\mathfrak{I}$ – локальная формация. Если N – субнормальная подгруппа группы G и $N / N \cap \Delta(G) \in \mathfrak{I}$. Тогда N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:*

1) $N_1 \in \mathfrak{I}$;
2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{I}) = \varnothing$;
3) $N_2 \subseteq \Delta(G)$.

***Следствие* 2.2.5.** *Пусть $\mathfrak{I}$ – локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если N – субнормальная подгруппа группы G и $N / N \cap \Delta(G) \in \mathfrak{I}$, то $N \in \mathfrak{I}$.*

***Следствие* 2.2.6.** *Пусть $\mathfrak{I}$ – локальная формация. Если N – субнормальная подгруппа группы G и $N / N \cap \Phi(G) \in \mathfrak{I}$. Тогда N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:*

1) $N_1 \in \mathfrak{I}$;
2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{I}) = \varnothing$;
3) $N_2 \subseteq \Phi(G)$.

***Следствие* 2.2.7.** *Пусть $\mathfrak{I}$ – локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если N – субнормальная подгруппа группы G и $N / N \cap \Phi(G) \in \mathfrak{I}$, то $N \in \mathfrak{I}$.*

***Теорема* 2.3.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|, |A|) = 1$ и $p > 2$. Тогда либо $\Delta^p(G, A) = \Delta(G, A)$, либо G является p-разрешимой группой.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{I}$ – формация всех p-нильпотентных групп. Так как G не p-разрешима, то $K = G^{\mathfrak{I}} \notin \mathfrak{I}$. Можно считать, что $O_p(G) = 1$. Пусть P – силовская p-подгруппа из K. По теореме Томпсона в P найдётся такая характеристическая, а следовательно, A-допустимая подгруппа $R \neq 1$, что $N_K(R) \notin \mathfrak{I}$. Так как R – A-допустимая подгруппа, то по лемме 1.6 $N_G(R)$ – A-допустимая подгруппа. Далее $N_K(R) \subseteq N_G(R)$. Значит, $N_G(R) \notin \mathfrak{I}$. Так как $O_p(G) = 1$, то $N_G(P) \neq G$.

По лемме 1.4, $N_G(P)$ – абнормальная подгруппа. Из того, что $N_G(P) \subseteq N_G(R)$, имеем, что $N_G(R)$ – абнормальная подгруппа. Так как любая подгруппа, содержащая $N_G(R)$ является абнормальной и не p-нильпотентной, то в качестве абнормальной не p-нильпотентной максимальной A-допустимой подгруппы выберем наибольшую A-допустимую подгруппу, содержащую $N_G(R)$.

Пусть G не p-разрешима. Обозначим через D пересечение ядер всех абнормальных не p-нильпотентных максимальных A-допустимых подгрупп группы G. Если в G нет p-нильпотентных максимальных A-допустимых подгрупп, то $D = \Delta(G, A)$. Так как G не p-разрешима, то G имеет по крайней мере одну абнормальную не p-нильпотентную максимальную A-допустимую подгруппу. Следовательно, $D \neq G$.

В G существует p-нильпотентная абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа MD. В противном случае, если любая p-нильпотентная абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа из G содержит D, то $\Delta(G, A) = D$. Отсюда следует, что $G = MD$. Имеем

$$G / D \simeq M / M \cap D \qquad (2.1)$$

является p-нильпотентной, в частности, p-разрешимой.

Пусть P – A-допустимая силовская p-подгруппа из D. По лемме Фраттини $G = DN_G(P)$. Тогда или $N_G(P) = G$, или $N_G(P)$ – p-нильпотентная подгруппа.

Если $N_G(P) = G$, то $P \lhd G$. Следовательно, $P \lhd \Delta(G, A)$, а значит, $\Delta(G, A)$ p-разрешима, тогда из (2.1) G p-разрешима. Противоречие. Получаем, что $N_G(P)$ является A-допустимой p-нильпотентной подгруппой. Если D p-нильпотентна, то G по (2.1) является p-разрешимой, получаем противоречие, которое показывает, что D не p-нильпотентна.

По лемме 1.5 в D существует характеристическая подгруппа P^* из P, такая, что

$$N_D(P^*) / C_D(P^*) \text{ –}$$

не p-группа. Так как $N_G(P^*) \supseteq N_G(P)$, то $G = DN_G(P^*)$.

Возможны ситуации: $N_G(P^*) = G$ или $N_G(P^*)$ p-нильпотентна. Но во втором случае $N_D(P^*)$ p-нильпотентна и $N_D(P^*) / C_D(P^*)$ – p-группа. Остаётся предположить, что $N_D(P^*) / C_D(P^*)$ – не p-группа и P^* нормальна в G.

Пусть P^* максимальная среди всех таких подгрупп. Положим $\overline{G} = G / P^*$. Пусть $\overline{P_0}$ – характеристическая подгруппа в $\overline{P}$. Тогда P_0 характеристична в P и содержит P^*. Следовательно, $N_D(P_0) / C_D(P_0)$ – p-группа.

Но

$$N_{\overline{D}}(\overline{P_0}) = N_D(P_0) / P^* \text{ и } C_D(P_0)P^* / P^* \subseteq C_{\overline{D}}(\overline{P_0}),$$

где $\overline{P_0} = P_0 / P^*$. Из этого получаем, что $N_{\overline{D}}(\overline{P_0}) / C_{\overline{D}}(\overline{P_0})$ – p-группа. Следовательно, по лемме 1.5 $\overline{D}$ p-нильпотентна. Так как $\overline{D} = D / P^*$ и P^* – p-группа, то D p-разрешима и, следовательно, G p-разрешима. Последнее противоречие показывает, что $D = \Delta(G, A)$. □

Следствие 2.3.1. *Пусть* $p > 2$, *тогда либо* $\Delta^p(G) = \Delta(G)$, *либо* G *является* p*-разрешимой группой.*

Из следствия 2.3.1 вытекает результат В.В. Шлыка из [9].

Заключение

В данной работе исследовано влияние операторно-обобщенной подгруппы Фраттини на строение конечных групп.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Beidleman*, *J.C.* On Frattini-like subgroups / J.C. Beidleman, H.Smith. // Glasgow Math. J. – 1993. – Vol. 35. – P. 95–98.

2. *Селькин*, *М.В.* Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Мн. : Беларуская навука, 1997. – 144 с.

3. *Ballester-Bolinches*, *A.* On *F*-subnormal subgroups and Frattini-like subgroups of a finite group / A. Ballester-Bolinches, M.D. Perez-Ramos // Glasgow Math. J. – 1994. – Vol. 36. – P. 241–247.

4. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Шеметков Л.А. – М.: Наука, 1978. – 267 с.

5. *Бородич*, *Р.В.* Об *F*-достижимых подгруппах в группах с операторами / Р.В. Бородич, Е.Н. Бородич, М.В. Селькин // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 2 (23). – С. 33–39.

6. *Doerk*, *K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

7. *Thompson*, *J.G.* Normal *p*-complements for finite groups / J.G. Thompson // J. Algebra. – 1964. – Vol. 1. – P. 43–46.

8. *Gorenshtein*, *D.* Finite groups / D. Gorenshtein. – New York: Harper and Row, 1968. – 572 p.

9. *Шлык*, *В.В.* О пересечении максимальных подгрупп в конечных группах / В.В. Шлык // Мат. заметки. – 1973. – Т. 14, № 3. – С. 429–439.

Поступила в редакцию 16.06.16.