**МАТЕМАТИКА**

УДК 517.984

# РЕЗОЛЬВЕНТА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

**Али А. Шукур, О.А. Архипенко**

*Белорусский государственный университет*, *Минск*

# RESOLVENT OF BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE DIFFERENCE EQUATION

**Ali A. Shukur, O.A. Arhipenko**

*Belarusian State University*, *Minsk*

Рассматривается краевая задача для разностного уравнения $a(k)u(k+1)-\lambda u(k)=f(k)$ со спектральным параметром $\lambda$. Получены условия существования правосторонней резольвенты этой задачи в пространстве $l_2(\mathbb{Z})$ и построена в явном виде резольвента.

***Ключевые слова***: *правосторонняя резольвента*, *дискретный оператор взвешенного сдвига*, *проектор Рисса*.

Boundary value problem for the difference equation $a(k)u(k+1)-\lambda u(k)=f(k)$ with spectral parameter $\lambda$ is considered. The condition of the existence of the right sided resolvents of the above problem in the space $l_2(\mathbb{Z})$ is given. The resolvent is constructed.

***Keywords***: *right-side resolvent*, *discrete weighted shift operator*, *Risze projection*.

## Введение

Пусть $B$ есть линейный ограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве $F$. Если $\lambda$ принадлежит спектру оператора $B$, то оператор $B-\lambda I$ необратим, однако может быть односторонне обратимым. Особый интерес представляет существование правого обратного, которое эквивалентно существованию решения соответствующего уравнения при любой правой части, а явное построение правого обратного есть получение формулы решения.

Пусть оператор $B-\lambda_0 I$ обратим справа и $R_0$ есть один из правых обратных к нему. Тогда образ $L=R_0(F)$ оператора $R_0$ является замкнутым подпространством, дополнительным к ядру оператора $B-\lambda_0 I$, и по этому подпространству оператор $R_0$ восстанавливается однозначно.

На сказанное выше можно посмотреть с другой точки зрения: оператор $R_0$ дает решение краевой задачи – найти решение уравнения

$$(B-\lambda_0 I)u=f,$$

удовлетворяющее «краевому условию»

$$u\in L.$$

Для каждого $\lambda$, лежащего в достаточно малой окрестности точки $\lambda_0$, существует оператор $R(\lambda)$, правый обратный к $B-\lambda I$ и такой, что образ $R(\lambda)$ совпадает с $L$. Семейство операторов $R(\lambda)$ представляется в виде ряда

$$R(\lambda)=\sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda-\lambda_0)^k R_0^{k+1},$$

из чего следует, что оно аналитически зависит от $\lambda$. Это семейство задает одну из правосторонних резольвент для оператора $B$, определенную в окрестности точки $\lambda_0$. Возникает вопрос о том, на какое множество из комплексной плоскости семейство операторов $R(\lambda)$ продолжается аналитически, в зависимости от выбранного подпространства $L$.

В тех точках $\lambda$, где определены операторы $R(\lambda)$, эти операторы задают решение краевой задачи:

$$(B-\lambda I)u=f, u\in L,$$

т. е. это семейство операторов является резольвентой краевой задачи. Поэтому вопрос об аналитическом продолжении фактически заключается в исследовании разрешимости краевой задачи, в зависимости от спектрального параметра $\lambda$ и заданного подпространства $L$.

Если правосторонняя резольвента $R(\lambda)$ аналитически продолжается на окрестность единичной окружности, то она разлагается в операторный ряд Лорана. Как показано в [1], [2], если оператор $B$ обратим, такой ряд имеет специальный вид, который будем называть стандартной формой правосторонней резольвенты:

$$R(\lambda)=\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^k B^{-k-1}(I-P)-\sum_{-\infty}^{-1}\lambda^k B^{-k-1}P, \quad (0.1)$$

где оператор $P$ есть коэффициент при $\lambda^{-1}$. Из этого разложения видно, что резольвента определяется по этому коэффициенту однозначно.

Этот ряд похож на разложение (0.1) резольвенты гиперболического оператора, но в рассматриваемом случае оператор $P$ может не быть проектором.

В работе рассмотрены некоторые краевые задачи для дискретных операторов взвешенного сдвига $B$. При заданном подпространстве $L$ получены условия разрешимости краевой задачи при заданном $\lambda$ и построена ее резольвента. Для конкретных примеров в случае, когда резольвента $R(\lambda)$ определена в окрестности единичной окружности, найден явный вид соответствующего оператора $P$ и, тем самым получено представление правосторонней резольвенты в стандартной форме ряда Лорана (0.1).

## 1 Гиперболические и правосторонне гиперболические операторы

Пусть $B$ – ограниченный линейный оператор в банаховом пространстве $F$, простой замкнутый контур $G$ не пересекается со спектром оператора $\Sigma(B)$, и, следовательно, резольвента $R(\lambda;B)=(B-\lambda I)^{-1}$ определена на контуре. Тогда формула

$$P=-\frac{1}{2\pi i}\int_G R(\lambda,B)d\lambda$$

задаёт проектор Рисса [6]. Этот проектор перестановочен с $B$ и осуществляет разложение $F=F^+\oplus F^-$ пространства в прямую сумму замкнутых подпространств, инвариантных относительно оператора $B$, где

$$F^+=\operatorname{Im}P,\ F^-=\operatorname{Im}(I-P)=\operatorname{Ker}P.$$

При этом оператор разлагается в прямую сумму операторов $B=B^+\oplus B^-$, действующих в соответствующих подпространствах, причём спектр оператора $B^+$ в подпространстве $F^+$ совпадает с частью спектра $\Sigma(B)$, лежащей внутри контура $G$, а спектр оператора $B^-$ в подпространстве $F^-$ совпадает с частью спектра $\Sigma(B)$, лежащей вне контура $G$.

Оператор $B$ называется *гиперболическим*, если $\Sigma(B)\cap\mathbb{S}^1=\varnothing$, где $\mathbb{S}^1=\{\lambda:|\lambda|=1\}$ – единичная окружность.

Гиперболические операторы встречаются в разных приложениях, в частности, в теории динамических систем [4]. Для гиперболического оператора проектор Рисса задается интегралом

$$P=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1}R(\lambda,B)d\lambda. \tag{1.1}$$

В случае гиперболического оператора получаем,

$$r(B^+)<1,\ r((B^-)^{-1})<1,$$

где $r(A)$ – спектральный радиус оператора $A$.

Если оператор $B$ является гиперболическим, то резольвента в окрестности единичной окружности разлагается в операторный ряд Лорана

$$R_r(B;\lambda)=\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^k B^{-k-1}(I-P)-\sum_{-\infty}^{-1}\lambda^k B^{-k-1}P, \tag{1.2}$$

где $P$ – проектор Рисса и сходимость рядов следует из оценок соответствующих спектральных радиусов.

Рассмотренные во введении свойства оператора $B$ могут быть переформулированы в спектральной терминологии, так как поставленные выше задачи сводятся к нахождению некоторых частей спектра $\Sigma(B)$, называемых *существенными спектрами.*

Одним из наиболее часто используемых существенных спектров является *спектр Фредгольма* $\Sigma_F(B)$. Оператор $B$, действующий в гильбертовом пространстве $H$, называется *оператором Фредгольма*, если его ядро $\ker B$ и коядро (ядро сопряженного оператора) $\ker B^*$ конечномерны и образ $\operatorname{Im}B$ замкнут [5]. Индексом фредгольмова оператора $B$ называется число

$$\operatorname{ind}B=\dim\ker B-\dim\ker B^*.$$

Фредгольмов спектр есть множество

$$\Sigma_F(B)=\{\lambda\in\mathbb{C}:B-\lambda I$$

не является оператором Фредгольма}.

Кроме спектра Фредгольма, представляют интерес и другие виды существенных спектров оператора $B$, в частности:

$$\Sigma^+(B)=\{\lambda\in\mathbb{C}:B-\lambda I$$

не имеет правого обратного},

$$\Sigma^-(B)=\{\lambda\in\mathbb{C}:B-\lambda I$$

не имеет левого обратного}.

Если $\lambda\in\Sigma(B)\setminus\Sigma^+(B)$, то у оператора $B-\lambda I$ существует много различных правых обратных. Семейство правых обратных $R_r(B;\lambda)$, аналитически зависящее от $\lambda$, называется *правосторонней резольвентой* для $B$.

Оператор $B$ называется *правосторонне гиперболическим,* если существует правосторонняя резольвента $R_r(B;\lambda)$, определенная в окрестности единичной окружности.

***Лемма* 1.1** [1]. *Если существует правосторонняя резольвента* $R_r(B;\lambda)$, *определенная в окрестности единичной окружности и оператор B обратим, то в окрестности единичной окружности она разлагается в операторный ряд Лорана*

$$R_r(B;\lambda)=\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^k B^{-k-1}(I-P)-\sum_{-\infty}^{-1}\lambda^k B^{-k-1}P, \tag{1.3}$$

*где* $P$ *есть коэффициент при* $\lambda^{-1}$ *в разложении этой правосторонней резольвенты в ряд, который задается той же формулой, что и проектор Рисса в* (1.1).

*Если существует оператор P, для которого ряд* (1.3) *сходится, то сумма этого ряда есть одна из правосторонних резольвент.*

Из леммы 1.1 следует, что для того, чтобы построить правостороннюю резольвенту, достаточно найти подходящий оператор $P$. Существенным отличием случая правосторонней гиперболичности от гиперболичности является то, что оператор $P$ всегда не перестановочен с $B$, может не быть проектором и не задает разложение пространства в прямую сумму инвариантных подпространств.

## 2 Операторы взвешенного сдвига

Оператор $B$, действующий в некотором пространстве $F(X)$ функций на множестве $X$, называется оператором взвешенного сдвига, если он представляется в виде

$$Bu(x) = a(x)u(\alpha(x)), \; x \in X,$$

где $\alpha : X \to X$ есть заданное отображение, $a(x)$ – заданная функция. Примером является дискретный оператор взвешенного сдвига, соответствующий случаю $X = \mathbb{Z}$ и отображению $\alpha(x) = x+1$. Сформулированные выше вопросы содержательны для этого класса операторов и они рассмотрены в данной работе.

Пусть $l_p(\mathbb{Z}),\ (p \ge 1)$ есть пространство двусторонних последовательностей комплексных чисел $u = (u(k))$, для которых конечна норма

$$\|u\|_p = \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} |u(k)|^p\right]^{1/p}.$$

Оператор сдвига $W$ действует в этом пространстве по формуле

$$Wu(k) = u(k+1), \; k \in Z.$$

*Дискретным оператором взвешенного сдвига* называется оператор в $l_p(\mathbb{Z})$, действующий по формуле

$$Bu(k) = a(k)u(k+1), \; k \in \mathbb{Z}, \qquad (2.1)$$

где $a = (a(k))$ есть заданная ограниченная числовая последовательность.

Если $a(k) \ne 0$ для $k \in \mathbb{Z}$ и последовательность $\frac{1}{a(k)}$ ограничена, то оператор $B$ обратим и

$$B^{-1}u(k) = \frac{1}{a(k-1)}u(k-1).$$

Мы рассматриваем здесь случай, когда для последовательности коэффициентов существуют пределы

$$\lim_{k\to\pm\infty} a(k) := a(\pm\infty). \qquad (2.2)$$

Свойства дискретных операторов взвешенного сдвига исследовались многими авторами. Мы воспользуемся следующим известным утверждением.

***Лемма* 2.1** [3]. *Пусть $B$ есть оператор вида* (2.1) *и пусть $a(k) \ne 0$ для всех $k$ и $a(\pm\infty) \ne 0$. Спектром оператора является кольцо*

$$\Sigma(B) = \{\lambda : r(a) \le |\lambda| \le R(a)\},$$

*где*

$$R(a) = \max\{|a(+\infty)|, |a(-\infty)|\},$$

$$r(a) = \min\{|a(+\infty)|, |a(-\infty)|\}.$$

*Если $|a(+\infty)| < |\lambda| < |a(-\infty)|$, то оператор $B - \lambda I$ фредгольмов, $ind(B-\lambda I) = -1$ и он обратим слева.*

*Если $|a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|$, то оператор $B - \lambda I$ фредгольмов, $ind(B-\lambda I) = 1$ и он обратим справа.*

*Если $|\lambda| = |a(\pm\infty)|$, то оператор $B - \lambda I$ не фредгольмов и его образ незамкнут.*

Примеры правосторонних резольвент для рассматриваемого оператора, определенных во всем открытом кольце $|a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|$, приведены в [1].

***Теорема* 2.1** [1]. *Пусть $P_\mu, \mu \in \mathbb{Z}$, есть проектор на подпространство*

$$F_\mu = \{u \in l_2(\mathbb{Z}) : u(k) = 0 \text{ при } k \le \mu\},$$

*действующий по формуле*

$$(P_\mu u)(k) = \begin{cases} u(k), & k \ge \mu \\ 0, & k < \mu. \end{cases} \qquad (2.3)$$

*Если $|\mathrm{a}(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|$, то для любого $\mu \in Z$ ряд*

$$R_\mu(B;\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1}(I - P_\mu) - \sum_{-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P_\mu \qquad (2.4)$$

*сходится и задает правостороннюю резольвенту для оператора B, определенную на кольце*

$$|a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|.$$

*При заданном $\mu \in \mathbb{Z}$ образы всех операторов $R_\mu(B;\lambda)$ совпадают с подпространством*

$$L_\mu = \{u \in l_2(\mathbb{Z}) : u(\mu) = 0\}.$$

## 3 Резольвента краевой задачи

В работе для разностного уравнения

$$a(j)u(j+1) - \lambda u(j) = f(j)$$

изучается корректность краевой задачи, заданной условием $u \in L_\eta$, где

$$L_\eta = \{u \in l_p(\mathbb{Z}) : \eta_0 u(0) + \eta_1 u(1) + \\ + \eta_2 u(2) \ldots + \eta_m u(m) = 0 \text{ при } m \ge 0\}. \qquad (3.1)$$

Под корректностью задачи, как обычно, понимается разрешимость для любой правой части, единственность и непрерывная зависимость решения от правой части. Это эквивалентно построению правосторонней резольвенты для оператора взвешенного сдвига $B$, состоящей из операторов, образы которых совпадают с подпространством $L_\eta$.

В отличие от случая, описанного в теореме 2.1, может оказаться, что такая правосторонняя резольвента определена не во всех точках кольца $|a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|$.

Как выше, предполагаем, что оператор $B$ обратим и в частности $a(j) \ne 0$ для всех $j$.

Одним из необходимых условий существования такой правосторонней резольвенты является правосторонняя обратимость оператора $B-\lambda I$. Согласно теореме 3.1 , оператор $B-\lambda I$ может быть правосторонняя обратимым только в случае, когда коэффициенты оператора удовлетворяют условию $|a(-\infty)|<|a(+\infty)|$ и правосторонняя обратимость имеет место только при условии $|a(-\infty)|<|\lambda|<|a(+\infty)|$.

Найдем сначала необходимое условия для того, чтобы у оператора $B-\lambda I$ существовал правый обратный, образ которого совпадает с подпространством $L_\eta$.

По подпространству $L_\eta$ и оператору $B$ построим полином от переменной $\lambda$

$$Q_\eta(\lambda)=\sum_{k=0}^{m}\frac{\eta_k\lambda^k}{\prod_{j=0}^{k-1}a(j)}.$$

***Теорема* 3.1.** *Если* $|a(-\infty)|<|\lambda|<|a(+\infty)|$, *то условие* $Q_\eta(\lambda)\neq 0$ *является необходимым для того, чтобы существовал правый обратный оператор к* $B-\lambda I$, *образ которого принадлежит подпространству* $L_\eta$.

*Доказательство.* Пусть существует правый обратный $R$ к оператору $B-\lambda I$ и $\operatorname{Im}R$ совпадает с $L_\eta$. Тогда $L_\eta\cap\operatorname{Ker}(B-\lambda I)=\{0\}$.

Согласно лемме 2.1, при сделанных предположениях подпространство $\operatorname{Ker}(B-\lambda I)$ одномерно и для его построения достаточно найти одно ненулевое решение однородного уравнения $(B-\lambda I)\omega=0$, т. е. уравнения

$$a(\tau)\omega(\tau+1)-\lambda\omega(\tau)=0,\quad \tau\in\mathbb{Z}.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $\omega(0)=1$, задаётся формулой

$$\omega_\lambda(\tau)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^\tau}{\prod_{j=0}^{\tau-1}a(j)}, & \tau\geq 0;\\[2ex] \dfrac{\prod_{j=\tau}^{-1}a(j)}{\lambda^{-\tau}}, & \tau<0,\end{cases}\tag{3.2}$$

построенная последовательность $\omega_\lambda(\tau)$ принадлежит пространству $l_p(\mathbb{Z})$.

Заметим, что эта последовательность может быть представлена в виде

$$\omega_\lambda=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\lambda^k B^{-k}e_0,\tag{3.3}$$

где $e_0$ есть последовательность

$$e_0(\tau)=\begin{cases}0, & \tau\neq 0,\\ 1, & \tau=0.\end{cases}$$

Подставив в (3.1), получаем, что условие $\omega_\lambda\in L_\eta$ имеет вид $Q_\eta(\lambda)=0$. Поэтому условие $Q_\eta(\lambda)\neq 0$ эквивалентно тому, что

$$L_\eta\cap\operatorname{Ker}(B-\lambda I)\neq\{0\}$$

и оно следует из существования правого обратного $R$ к оператору $B-\lambda I$, образ которого совпадает с $L_\eta$.

***Теорема* 3.2.** *Правый обратный оператор к* $B-\lambda I$, *образ которого совпадает с подпространством* $L_\eta$, *существует в тех точках* $\lambda$, *для которых выполнены условия:*

1) $|a(-\infty)|<|\lambda|<|a(+\infty)|$,

2) $Q_\eta(\lambda)\neq 0$.

*Тогда семейство таких правых обратных* $R_\eta(B;\lambda)$ *аналитически зависит от* $\lambda$, *т. е. является правосторонней резольвентой. Эта правосторонняя резольвента может быть записана в виде*

$$R_\eta(B;\lambda)f=$$
$$=\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^k B^{-k-1}(I-P_0)f-\sum_{-\infty}^{-1}\lambda^k B^{-k-1}P_0 f\right]+$$
$$+\frac{\Phi_\lambda(f)}{Q_\eta(\lambda)}\omega_\lambda,$$

*где* $\Phi_\lambda(f)$ *есть функционал на* $l_p(\mathbb{Z})$, *заданный формулой*

$$\Phi_\lambda(f)=-\sum_{\tau=0}^{m-1}\left[\sum_{i=0}^{m-\tau-1}\frac{\lambda^i\eta_{i+1}}{\prod_{j=0}^{i}a(j)}\right]f(\tau).$$

*Доказательство.* Пусть $f\in l_2(\mathbb{Z})$. Будем строить решение уравнения $(B-\lambda I)u=f$, принадлежащее $L_\eta$. В координатной записи это уравнение имеет вид:

$$a(\tau)u(\tau+1)-\lambda u(\tau)=f(\tau).$$

При $\tau>0$ находим выражения для $u(\tau)$ через $f(\tau)$ и $u(0)$:

$$u(\tau)=\left[\frac{f(\tau-1)}{a(\tau-1)}+\frac{\lambda f(\tau-2)}{a(\tau-1)a(\tau-2)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\lambda^2 f(\tau-3)}{a(\tau-1)a(\tau-2)a(\tau-3)}+\ldots+\frac{\lambda^{k-1}f(0)}{a(0)\ldots a(\tau-1)}\right]+$$
$$+\frac{\lambda^k}{a(0)\ldots a(\tau-1)}u(0).$$

Аналогично при $\tau<0$:

$$u(\tau)=\left[-\frac{f(\tau)}{\lambda}-\frac{f(\tau+1)a(\tau+1)}{\lambda^2}-\right.$$
$$-\frac{f(\tau+2)a(\tau+1)a(\tau+2)}{\lambda^3}-\ldots-$$
$$\left.-\frac{f(-1)a(-1)\ldots a(\tau+1)}{\lambda^{-k}}\right]+\frac{a(-1)\ldots a(\tau+1)}{\lambda^{-k}}u(0).$$

Подставив найденные выражения для $u(\tau)$ в условие $u\in L_\eta$, получаем:

$$u(0)\left[I+\frac{\eta_1\lambda}{a(0)}+\frac{\eta_2\lambda^2}{a(0)a(1)}+\ldots+\frac{\eta_m\lambda^m}{a(0)\ldots a(m-1)}\right]=$$
$$=-\left[I+\eta_1\left[\frac{f(0)}{a(0)}\right]+\eta_2\left[\frac{f(1)}{a(1)}\frac{\lambda f(0)}{a(0)a(1)}\right]+\ldots+\right.$$

$$+\eta_m\left[\frac{f(m-1)}{a(m-1)}+\ldots+\frac{\lambda^{m-1}f(0)}{a(0)\ldots a(m-1)}\right]\Bigg].$$

Из этого условия находим, что

$$u(0)=\frac{\Phi_\lambda(f)}{Q_\eta(\lambda)},$$

где $\Phi_\lambda(f)=-\sum_{\tau=0}^{m-1}\left[\sum_{i=0}^{m-\tau-1}\frac{\lambda^i\eta_{i+1}}{\prod_{j=0}^{i}a(j)}\right]f(\tau).$

Выражение для каждого $u(\tau)$ состоит из двух слагаемых: первое слагаемое при $\tau>0$ совпадает с выражением для координат вектора

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^k B^{-k-1}(I-P_0)f,$$

где $P_0$ есть проектор, заданный в (2.3); а при $\tau<0$ совпадает с выражением для координат вектора $\sum_{-\infty}^{-1}\lambda^k B^{-k-1}P_0 f.$

В частности, первое слагаемое задаёт последовательность, принадлежащую $l_2(\mathbb{Z})$.

Второе слагаемое имеет вид $\omega_\lambda(\tau)u(0)$. Поэтому получаем следующее выражение для построенного правого обратного

$$R_\eta(B;\lambda)f=\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^k B^{-k-1}(I-P_0)f-\right.\\ \left.-\sum_{-\infty}^{-1}\lambda^k B^{-k-1}P_0 f\right]+\frac{\Phi_\lambda(f)}{Q_\eta(\lambda)}\omega_\lambda. \quad (3.4)$$

Заметим, что при фиксированном $\lambda$ последнее слагаемое

$$\frac{\Phi_\lambda(f)}{Q_\eta(\lambda)}\omega_\lambda$$

в (3.4) есть оператор ранга 1, а само это слагаемое есть семейство операторов ранга 1, аналитически зависящее от $\lambda$. Таким образом, построенное семейство правых обратных аналитически зависит от $\lambda$, т. е. задаёт правостороннюю резольвенту для оператора $B$. Заметим, что полученное выражение не есть представление резольвенты в виде ряда Лорана, так как последнее слагаемое не представлено в виде ряда по степеням $\lambda$.

## 4 Правосторонняя гиперболичность и представление резольвенты в стандартной форме

Пусть $Q_\eta(\lambda)\neq 0$ при $|\lambda|=1$. Тогда построенная резольвента (3.4) определена в окрестности единичной окружности и, согласно лемме 1, она может быть представлена в стандартной форме – в виде ряда Лорана (1.3), где $P$ – некоторый оператор. Если резольвенту (3.4) разложить в ряд Лорана, то этот оператор есть коэффициент при $\frac{1}{\lambda}$. Первые два слагаемые в (3.4) образуют некоторый ряд Лорана. Но последнее слагаемое

$$\frac{\Phi_\lambda(f)}{Q_\eta(\lambda)}\omega_\lambda,$$

в (3.4) представлено в другом виде и требуется построить его разложение по степеням $\lambda$. Это слагаемое является произведением аналитических функций, поэтому вычисление коэффициентов разложения по степеням $\lambda$ в общем случае приводит к громоздким выражениям.

Выделим случай, для которого соответствующий оператор $P$ строится в явном виде. Пусть подпространство $L_\eta$ задано с помощью соотношения, связывающего только две координаты $u(0)$ и $u(1)$:

$$L_\eta=\{u\in l_2(\mathbb{Z}):u(0)-\eta_1 u(1)=0\}.$$

В этом случае

$$Q_1(\lambda)=1-\frac{\eta_1\lambda}{a(0)},$$

резольвента краевой задачи задается формулой

$$R_\eta(B;\lambda)f=\\ =\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^k B^{-k-1}(I-P_0)f-\sum_{-\infty}^{-1}\lambda^k B^{-k-1}P_0 f\right]+\\ +\frac{\eta_1 f(0)}{a(0)-\eta_1\lambda}\omega_\lambda.$$

Она определена во всех точках кольца

$$|a(-\infty)|<|\lambda|<|a(+\infty)|,$$

кроме точки

$$\lambda_0=\frac{a(0)}{\eta_1},$$

если $|a(-\infty)|<|\lambda_0|<|a(+\infty)|$.

Если $|\lambda_0|\neq 1$, то резольвента определена в окрестности единичной окружности и представляется в виде (1.3). Чтобы найти выражение для оператора $P$, рассмотрим разложение последнего слагаемого в степенной ряд. Такое разложение имеет разный вид при $|\lambda_0|<1$ и при $|\lambda_0|>1$. Имеем

$$\frac{\eta_1}{a(0)-\eta_1\lambda}=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda_0\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)}=\sum_{j=0}^{+\infty}\dfrac{\lambda^j}{\lambda_0^{j+1}}, & \text{при } |\lambda_0|>1;\\[2ex] \dfrac{-1}{\lambda\left(1-\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)}=-\sum_{j=-1}^{-\infty}\dfrac{\lambda^j}{\lambda_0^{j+1}}, & \text{при } |\lambda_0|<1.\end{cases}$$

Поэтому при $|\lambda_0|>1$ получаем

$$\frac{\eta_1 f(0)}{a(0)-\eta_1\lambda}\omega_\lambda=f(0)\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^j}{\lambda_0^{j+1}}\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\lambda^k B^{-k}e_0\right), \quad (4.1)$$

при $|\lambda_0|<1$

$$\frac{\eta_1 f(0)}{a(0)-\eta_1\lambda}\omega_\lambda=f(0)\left(-\sum_{j=-1}^{-\infty}\frac{\lambda^j}{\lambda_0^{j+1}}\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\lambda^k B^{-k}e_0\right). \quad (4.2)$$

Теперь мы можем найти в явном виде оператор, являющийся коэффициентом при $\dfrac{1}{\lambda}$, который обозначим $\Psi$. В случае $|\lambda_0|>1$ этот коэффициент задается выражением

$$\Psi(f)=f(0)\sum_{j+k=-1}^{+\infty}\frac{1}{\lambda_0^{j+1}}B^{-k}e_0=f(0)\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{\lambda_0^{j}}B^{j}e_0.$$

Здесь сумма

$$\omega^{-}_{\lambda_0}=\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{\lambda_0^{j}}B^{j}e_0$$

есть фиксированая последовательность из пространства $l_p(\mathbb{Z})$, которая задается формулой (3.1) в случае $\tau\le 0$, и $\omega^{-}_{\lambda_0}(\tau)=0$, при $\tau>0$.

В случае $|\lambda_0|<1$

$$\Psi(f)=-f(0)\sum_{j+k=-1}^{-\infty}\frac{1}{\lambda_0^{j+1}}B^{-k}e_0=-f(0)\sum_{j=-\infty}^{0}\frac{1}{\lambda_0^{j}}B^{j}e_0.$$

Тогда сумма

$$\omega^{+}_{\lambda_0}=\sum_{j=-\infty}^{0}\frac{1}{\lambda_0^{j}}B^{j}e_0,$$

также есть фиксированая последовательность из пространства $l_p(\mathbb{Z})$, которая задается формулой (3.1) в случае $\tau>0$, и $\omega^{+}_{\lambda_0}(\tau)=0$, при $\tau\le 0$.

Таким образом, в рассматриваемом случае искомый коэффициент $\Psi$ при $\frac{1}{\lambda}$ есть оператор ранга 1, действующий по формуле

$$\Psi(f)=\begin{cases} f(0)\omega^{-}_{\lambda_0}, & |\lambda_0|>1,\\ -f(0)\omega^{+}_{\lambda_0}, & |\lambda_0|<1.\end{cases}$$

Теперь мы можем записать резольвенту $R_\eta(B;\lambda)$ в стандартной форме:

$$R_\eta(B;\lambda)f=\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^k B^{-k-1}(I-P)f-\sum_{-\infty}^{-1}\lambda^k B^{-k-1}Pf,$$

где $P=P_0+\Psi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Antonevich*, *A.B.* Right-side Hyperbolic operators/ A.B. Antonevich, E.V. Panteleeva // Ser. A: Appl. Math. Inform. and Mech. – 2014. – Vol. 6, № 1. – P. 1–9.

2. *Антоневич*, *А.Б.* Правосторонние резольвенты дискретных операторов взвешенного сдвига с матричными весами / А.Б. Антоневич, Е.В. Пантелеева // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – Т. 16, № 3. – С. 45–53.

3. *Антоневич*, *А.Б.* Спектральные свойства дискретного оператора взвешенного сдвига / А.Б. Антоневич, А.А. Ахматова // Труды института математики. – 2012. – Т. 2, № 1. – С. 14–21.

4. *Каток*, *А.Б.* Введение в современную теорию динамических систем / А.Б. Каток, Б. Хассельблат. – М.: Факториал, 1999. – 775 с.

5. *Садовничий*, *В. А.* Теория операторов / В.А. Садовничий. – М., 1999. – 368 с.

6. *Рисс*, *Ф.* Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секефальви Надь. – М., 1954. – 500 с.

*Поступила в редакцию* 22.04.16.