Проблемы физики, математики и техники, № 3 (28), 2016

МАТЕМАТИКА

УДК 517.988

МЕТОД ПРИМЕНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Д.С. Шпак, И.В. Трифонова

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

THE METHOD OF APPLICATION OF NONLINEAR EVOLUTION OPERATORS FOR SOLUTION OF DYNAMICAL SYSTEMS

D.S. Shpak, I.V. Trifonova

Y. Kupala Grodno State University

Решение многих технических, физических и математических задач тесно связано с исследованием нелинейных уравнений и их систем. Описание таких процессов способствовало становлению и развитию теории систем, разработке математического аппарата типа «вход-выход» с помощью нелинейных эволюционных операторов. В данной статье рассматриваются нелинейные эволюционные операторы первой и второй кратностей, описывается метод их применения для решения динамических систем с обобщенными характеристиками на основании алгоритма построения асимптотически обратных нелинейных эволюционных операторов.

Ключевые слова: *эволюционный оператор*, *импульсная характеристика*, *спектральная характеристика*, *многополюсник*, *система*, *асимптотически обратный эволюционный оператор.*

The solution of many technical, physical and mathematical problems is closely related to the study of nonlinear equations and systems. A description of these processes contributed to the establishment and development of systems theory, the development of the mathematical apparatus of the “input-output” using the nonlinear evolution operators. The nonlinear evolution operators of the first and the second multiplicities are dealt in this paper. The method of their application for solution of dynamical systems with generalized characteristics is described. This method is based on the algorithm of constructing asymptotically inverse nonlinear evolution operators.

Keywords: *evolution operator*, *impulse response*, *spectral response*, *multipole*, *system*, *asymptotically reverse evolution operator.*

Введение

Эволюционные операторы находят широкое приложение в исследовании динамических систем. Интерес к таким операторам связан с их применением во многих областях математической физики, радиотехники и других технических отраслях науки.

Теория эволюционных операторов занимается исследованием нелинейных эволюционных операторов с импульсными характеристиками, в качестве которых выступают обобщенные функции. Данный факт позволяет применять нелинейные эволюционные операторы для анализа динамических систем, описываемых многополюсниками.

Целью работы является обобщение результатов теории нелинейных эволюционных операторов первой и второй кратностей и исследование методов применения нелинейных эволюционных операторов для решения эволюционных систем с обобщенными характеристиками. Это позволяет разработать эффективные алгоритмы нахождения характеристик сложных динамических систем.

1 Нелинейные эволюционные операторы первой и второй кратности

Обозначим через X_a – пространство всех бесконечно дифференцируемых функций на всей числовой оси с носителем на луче $[a; +\infty)$. Рассмотрим пространство X, которое является объединением пространств X_a $(a \in R)$, – пространство всех финитных слева бесконечно дифференцируемых на числовой оси (снабженное топологией индуктивного предела).

Под эволюционным оператором в таком случае понимают оператор A, действующий из пространства X в пространство X. При этом оператор A такой, что если носитель функции $x(t)$ $(x \in X,\ t \in R)$ содержится на числовой полуоси $[t_0, +\infty)$, то и носитель функции $Ax(t)$ содержится на полуоси $[t_0, +\infty)$, где t_0 – некоторое действительное число.

Эволюционный оператор кратности ν был описан в монографии [1]. На пространстве финитных слева бесконечно дифференцируемых функций на числовой оси X зафиксируем натуральное число ν и построим ν-ую степень пространства X, т. е. X^{ν}. В пространстве X^{ν} определим операцию тензорной степени мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)$ вектор-функции

$$\left(x_1, x_2, \ldots, x_\nu\right) \in X^{\nu}.$$

Тогда эволюционным оператором кратности ν называется оператор A, который задается равенством

$$Ax = \sum_{\alpha \neq 0} S_{|\alpha|}(a_\alpha * x^{\otimes \alpha}),\ \ x \in X^{\nu}.$$

Напомним, что S – оператор, который действует на обобщенную функцию, зависящую от $|\alpha|$ переменных, и переводит ее в функцию от ν переменных.

Заметим, что эволюционные операторы первой кратности называют эволюционными операторами Вольтера – Винера [2] и записывают следующим образом

$$Ax = \sum_{n=1}^{+\infty} S_n\left(a_n * x^{\otimes n}\right).$$

С помощью операторов Вольтера – Винера можно описать нелинейные дифференциальные уравнения и применить для их решения метод нелинейных эволюционных операторов первой кратности. Приведем несколько примеров.

Уравнение осциллятора вида

$$x'' + x + cx^2 = f(t)$$

с нелинейной восстанавливающей силой cx^2 и затуханием, совершающим вынужденные колебания при гармоническом внешнем воздействии $f(t)$ представимо в операторном виде следующим образом $Ax = \left(\delta'' + \delta\right) * x + S_2\left(c\delta^{\otimes 2} * x^{\otimes 2}\right)$.

Частному случаю уравнения Эмдена –Фаулера $x'' - dx' - kx - x^2 = f(t)$ соответствует эволюционный оператор Вольтера – Винера вида

$$Ax = \left(\delta'' - d\delta' - k\delta\right) * x + S_2\left(-\delta^{\otimes 2} * x^{\otimes 2}\right).$$

Под оператором второй кратности понимают оператор A, действующий из пространства X^2 в пространство X^2 вектор-функций на числовой оси так, что если носитель вектор-функции $x\,(t)$ содержится на $[t_0, +\infty)^2$, то и носитель вектор-функции $Ax\,(t)$ содержится на $[t_0, +\infty)^2$.

Нелинейным эволюционным оператором второй кратности, например, можно описать следующую систему (1.1) двух дифференциальных уравнений второго порядка.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} - \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 - \alpha_3 x_1^2 - \alpha_4 x_1 x_2 - \alpha_5 x_2^2 = f_1(t), \\ \dfrac{dx_2}{dt} - \beta_1 x_1 - \beta_2 x_2 - \beta_3 x_1^2 - \beta_4 x_1 x_2 - \beta_5 x_2^2 = f_2(t). \end{cases} \quad (1.1)$$

Утверждение. *Операторный вид системы* (1.1) *может быть записан*

$$Ax = f,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^1 + A_2^1 \\ A_1^2 + A_2^2 \end{pmatrix}; \; f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

$$A_1^1(x_1, x_2) = (\delta' - \alpha_1\delta) * x_1 - \alpha_2\delta * x_2;$$

$$A_2^1(x_1, x_2) = -\alpha_3\delta^{\otimes 2} * x_1^{\otimes 2} - \alpha_4\delta^{\otimes 2} * \left(x_1 \otimes x_2\right) - \\ -\alpha_5\delta^{\otimes 2} * x_2^{\otimes 2};$$

$$A_1^2(x_1, x_2) = -\beta_1\delta * x_1 + (\delta' - \beta_2\delta) * x_2;$$

$$A_2^2(x_1, x_2) = -\beta_3\delta^{\otimes 2} * x_1^{\otimes 2} - \beta_4\delta^{\otimes 2} * \left(x_1 \otimes x_2\right) - \\ -\beta_5\delta^{\otimes 2} * x_2^{\otimes 2}.$$

В частности, системе

$$\begin{cases} x' - y = f_1(t), \\ y' - 3y - 2x - x^2 = f_2(t), \end{cases}$$

соответствует оператор второй кратности, действующий в пространстве двухкомпонентных вектор-функций одной переменной, с компонентами

$$A^1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta' & -\delta \\ -2\delta & \delta' - 3\delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$A^2\begin{pmatrix} x\otimes x \\ x\otimes y \\ y\otimes y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta^{\otimes 2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\otimes x \\ x\otimes y \\ y\otimes y \end{pmatrix}.$$

2 Импульсные и спектральные характеристики эволюционных операторов

Одной из важных характеристик любой системы является переходная импульсная характеристика. Она определяется как реакция системы на единичный импульс при нулевых начальных условиях. Импульсные характеристики системы полностью ее характеризуют и по ним не трудно восстановить дифференциальное уравнение или систему. Использование понятия импульсной характеристики системы позволяет свести расчет реакции системы от действия непериодического сигнала произвольной формы к определению реакции системы на простейшее воздействие типа единичной или δ-функции, с помощью которых аппроксимируется исходный (входной) сигнал.

Для демонстрации построения импульсных характеристик нелинейных эволюционных операторов первой и второй кратности рассмотрим описанные в пункте 1 примеры.

Оператор вида

$$Ax = \left(\delta'' + \delta\right) * x + S_2\left(c\delta^{\otimes 2} * x^{\otimes 2}\right)$$

характеризуется импульсными характеристиками

$$a_1 = \delta'' + \delta, \; a_2 = c\delta^{\otimes 2}.$$

Оператор вида

$$Ax = \left(\delta'' - d\delta' - k\delta\right) * x + S_2\left(-\delta^{\otimes 2} * x^{\otimes 2}\right)$$

характеризуется следующими импульсными характеристиками $a_1 = \delta'' - d\delta' - k\delta, \; a_2 = -\delta^{\otimes 2}$.

Для оператора системы (1.1) импульсные характеристики в матричном представлении имеют вид

$$a_1 = \begin{pmatrix} \delta' & -\delta \\ -2\delta & \delta' - 3\delta \end{pmatrix} \text{ и } a_2 = \begin{pmatrix} -\delta^{\otimes 2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

На основании импульсных характеристик, применяя к ним обобщенное преобразование Лапласа, получаем спектральные характеристики эволюционных операторов.

Напомним, что преобразованием Лапласа обобщенной функции $f(t)$ из пространства всех обобщенных функций экспоненциального роста степени k с компактным носителем является функция $\tilde{f}$, определяемая равенством

$$\tilde f(\lambda) = < f(t), e^{-\lambda t} >,\ \lambda \in \Pi_c^m, \qquad (2.1)$$

где $\lambda t = \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + ... + \lambda_n t_n$,

$$\Pi_k^n = \Big\{ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in C^n \Big| \ \mathrm{Re}\,\lambda_j > k,\ j = 1, 2, ..., n \Big\}.$$

Например, применяя обобщенное преобразование $\tilde a_{n_1,n_2}$ Лапласа к импульсной характеристике a_{n_1,n_2} порядка $n = n_1 + n_2$, имеем спектральную характеристику порядка n эволюционного оператора второй кратности.

Если к матрицам

$$W_1 = \begin{pmatrix} \tilde a_{(1,0),1} & \tilde a_{(0,1),1} \\ \tilde a_{(1,0),2} & \tilde a_{(0,1),2} \end{pmatrix},$$

$$W_2 = \begin{pmatrix} \tilde a_{(2,0),1} & \tilde a_{(1,1),1} & \tilde a_{(0,2),1} \\ \tilde a_{(2,0),2} & \tilde a_{(1,1),2} & \tilde a_{(0,2),2} \end{pmatrix},$$

называемым матрицами первичных параметров нелинейного оператора A, применить обобщенное преобразование Лапласа, то получаем следующую реакцию на входное воздействие:

$$\tilde y_1^2 = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=2} \tilde a_{\alpha_1+\alpha_2,1} * \left(\tilde x_1^{\otimes \alpha_1} \otimes \tilde x_2^{\otimes \alpha_2} \right),$$

$$\tilde y_2^2 = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=2} \tilde a_{\alpha_1+\alpha_2,2} * \left(\tilde x_1^{\otimes \alpha_1} \otimes \tilde x_2^{\otimes \alpha_2} \right).$$

Введя следующее обозначение:

$$\tilde x^2 = \begin{pmatrix} \tilde x_1^{\otimes 2} \\ \tilde x_1 \otimes \tilde x_2 \\ \tilde x_2^{\otimes 2} \end{pmatrix},$$

запишем обобщенные характеристики в матричном виде: $\tilde y^2 = W_2 \tilde x^2$. Пусть $(\tilde u_2)$ – система спектральных характеристик эволюционного оператора второй кратности.

На основании общей теоремы о спектральных характеристиках композиции эволюционных операторов [2] спектральные характеристики можем определить по формуле:

$$\begin{aligned} \tilde v_2(\lambda) &= \tilde a_{(2,0)}(\lambda_1 + \lambda_2)\big(\tilde u_{2,0}(\lambda_1,\lambda_2) + \\ &+ \tilde u_{1,1}(\lambda_1,\lambda_2) + \tilde u_{0,2}(\lambda_1,\lambda_2)\big) + \\ &+ \tilde a_{(1,1)}(\lambda_1 + \lambda_2)\big(\tilde u_{2,0}(\lambda_1,\lambda_2) + \\ &+ \tilde u_{1,1}(\lambda_1,\lambda_2) + \tilde u_{2,0}(\lambda_1,\lambda_2)\big) + \\ &+ \tilde a_{(2,2)}(\lambda_1 + \lambda_2)\big(\tilde u_{2,0}(\lambda_1,\lambda_2) + \\ &+ \tilde u_{1,1}(\lambda_1,\lambda_2) + \tilde u_{0,2}(\lambda_1,\lambda_2)\big) + \varphi^2(\lambda), \end{aligned}$$

где сумма всех остальных слагаемых обозначена через $\varphi^2(\lambda)$.

Тогда система

$$\tilde v_2(\lambda) = W_2(|\lambda|)\tilde u_2(\lambda) + \varphi^2(\lambda),$$

где $\varphi^2(\lambda)$ не содержит спектральных характеристик оператора степени, больше чем два, определяет характеристики.

Исходя из формулы (2.1) и того, что $\tilde\delta' = \lambda$, $\tilde\delta = 1$, спектральные характеристики для импульсных характеристик указанных примеров буду иметь вид:

1. Если $a_1 = \delta'' + \delta,\ a_2 = c\delta^{\otimes 2}$, то

$$\tilde a_1(\lambda_1) = \left\langle a_1, e^{-\lambda t} \right\rangle = \left\langle \delta'' + \delta', e^{-\lambda t} \right\rangle = \lambda_1^2 + \lambda_1;$$

$$\tilde a_2(\lambda_1,\lambda_2) = \left\langle c\delta^{\otimes 2}, e^{-\lambda t} \right\rangle = c;$$

$$\tilde a_n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n) = 0,\ n \ge 3.$$

2. Если $a_1 = \delta'' - d\delta' - k\delta,\ a_2 = -\delta^{\otimes 2}$, то

$$\tilde a_1(\lambda_1) = \left\langle a_1, e^{-\lambda t} \right\rangle = \left\langle \delta'' - d\delta' - k\delta, e^{-\lambda t} \right\rangle = = \lambda_1^2 - d\lambda_1 - k.$$

$$\tilde a_2(\lambda_1,\lambda_2) = \left\langle -\delta^{\otimes 2}, e^{-\lambda t} \right\rangle = -1;$$

$$\tilde a_n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n) = 0,\ n \ge 3.$$

3. Если

$$a_1 = \begin{pmatrix} \delta' & -\delta \\ -2\delta & \delta' - 3\delta \end{pmatrix} \text{ и } a_2 = \begin{pmatrix} -\delta^{\otimes 2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ то}$$

$$\tilde a_1(\lambda_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -1 \\ -2 & \lambda_1 - 3 \end{pmatrix} \text{ и } \tilde a_2(\lambda_1,\lambda_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde a_n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n) = \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 \end{pmatrix},\ n \ge 3.$$

3 Асимптотически обратные эволюционные операторы

Рассмотрим композиции нелинейных эволюционных операторов:

$$Cx = (A \circ B)(x),\ Fx = (B \circ A)(x).$$

Асимптотически обратным эволюционным оператором степени l к эволюционному оператору A степени n будет являться эволюционный оператор B степени l: для первой кратности вида

$$Bx = \sum_{p=1}^{l} S_p\left(b_p * x^{\otimes p}\right),\ x \in X, \qquad (3.1)$$

для второй кратности вида

$$Bx = \sum_{m_1,m_2} S_{m_1+m_2}\left(b_{m_1,m_2} * \left(x_1^{\otimes m_1} \otimes x_2^{\otimes m_2}\right)\right), \quad (3.2)$$

для которого выполняются равенства

$$F = B \circ A = I + \sum_{j=l+1}^{nl} F_j \ \text{ и } \ C = A \circ B = I + \sum_{j=l+1}^{nl} C_j,$$

для оператора (3.1);

$$F = I + \sum_{k_1+k_2 \ge l+1} F_{k_1,k_2} \ \text{ и } \ C = I + \sum_{k_1+k_2 \ge l+1} C_{k_1,k_2}$$

для оператора (3.2); где I – тождественный оператор [3].

Теорема. *Для эволюционного оператора первой кратности второй степени*

$$Ax = a_1 * x + S_2(a_2 * x^{\otimes 2}),$$

порожденного нелинейным дифференциальным уравнением вида

$$L(D)x + dx^2 = f(t),$$

можно построить нелинейный асимптотически обратный эволюционный оператор

$$Bf = b_1 * f + \left(-db_1 * \left(B_1 f\right)^{\otimes 2}\right) +$$
$$+\left(-2db_1 * \left(B_1 f \otimes B_2 f\right)\right) + ... +$$
$$+\left(-db_1 * \sum_{k=1}^{n}\left(B_k f \cdot B_{n-k} f\right)\right),$$

где b_1 *– обобщенная импульсная характеристика первого порядка оператора* Bf; $B_k f$, $k = 1,2, \dots, n$ *– операторные компоненты.*

Доказательство теоремы представлено в монографии [3].

Для уравнения вида

$$x'' + x + cx^2 = f(t)$$

асимптотически обратный эволюционный оператор, при $k = 2$, имеет вид [3]

$$B(t) = \frac{c}{6}\theta(t)\left(-\frac{6}{c}\cos t + \frac{6}{c} - 9 + \right.$$
$$\left. +8\cos t + 6t\sin t + \cos 2t\right).$$

Для построения оператора B второй кратности к оператору A необходимо составить композицию $A \circ B$. Так как операторы A и B – нелинейные эволюционные операторы второй кратности, то композицию можно записать следующим образом $A \circ B = A^1\left(B^1\right) + A^2\left(B^1, B^2\right)$.

Так как оператор B – асимптотически обратный эволюционный оператор, то имеем $A^1\left(B^1\right) = E,\ A^2\left(B^1, B^2\right) = 0,$ где E – единичная матрица.

Рассмотрим первый компонент композиции $A^1\left(B^1\right)$ и представим его в матричном виде. Для системы (1.1) получаем

$$\begin{pmatrix} \delta' & -\delta \\ -2\delta & \delta' - 3\delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \qquad (3.3)$$

где $\begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{pmatrix} = B^1.$

Из матричного уравнения (3.3) составим систему

$$\begin{cases} \delta' b_1^1 - \delta b_2^1 = \delta, \\ \delta' b_1^2 - \delta b_2^2 = 0, \\ -2\delta b_1^1 + \left(\delta' - 3\delta\right) b_2^1 = 0, \\ -2\delta b_1^2 + \left(\delta' - 3\delta\right) b_2^2 = \delta, \end{cases}$$

из которой последовательно можно найти импульсные характеристики первой компоненты B^1 оператора B второй кратности.

Второй компонент композиции можно записать в виде $A^2\left(B^1, B^2\right) = B^2\left(A^1\right)^{\otimes 2} + B^1 A^2 = 0.$

Следовательно, вторая компонента B^2 оператора B может быть найдена из равенства

$$B^2 = -B^1 A^2\left(\left(A^1\right)^{\otimes 2}\right)^{-1}.$$

Таким образом, задача определения асимптотически обратного эволюционного оператора второй кратности сводится к последовательному решению систем линейных уравнений.

Заключение

В теории электрических цепей применяется метод ее приведения к эквивалентному многополюснику, с математической точки зрения который есть нелинейный эволюционный оператор, действующий в пространстве вектор-функций от одной переменной времени.

Таким образом, на основании изложенного материала метод применения нелинейных эволюционных операторов для решения динамических систем с обобщенными характеристиками можно описать с помощью алгоритма.

Алгоритм построения асимптотически обратных нелинейных эволюционных операторов реализуется следующими тремя этапами:

1. Сопоставление динамической системе нелинейного эволюционного оператора с обобщенными импульсными характеристиками.
2. Нахождение импульсных характеристик соответствующего порядка асимптотически обратного нелинейного эволюционного оператора.
3. Последовательное построение операторных компонент асимптотически обратного нелинейного эволюционного оператора к нелинейному эволюционному оператору, сумма которых и будет являться искомым оператором.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вувуникян, Ю.М.* Обобщенные функции и нелинейные эволюционные операторы: моногр. / Ю.М. Вувуникян. – Гродно: ГрГУ, 2014. – 302 с.
2. *Вувуникян, Ю.М.* Эволюционные операторы с обобщенными импульсными и спектральными характеристиками: моногр. / Ю.М. Вувуникян. – Гродно: ГрГУ, 2007. – 224 с.
3. *Вувуникян, Ю.М.* Полиномиальные эволюционные операторы: моногр. / Ю.М. Вувуникян, Д.С. Шпак. – Гродно: ГрГУ, 2015. – 277 с.

Поступила в редакцию 27.06.16.