Проблемы физики, математики и техники, № 3 (44), 2020

МАТЕМАТИКА

УДК 517.162

$\mathfrak{H}_p\mathfrak{H}_q$-ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ И ОБОБЩЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ ГЁЛЬДЕРА, МИНКОВСКОГО И МЮРХЕДА

С.М. Горский[1], **В.И. Мурашко**[2]

[1]*Санкт-Петербургский Академический университет*
[2]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*

$\mathfrak{H}_p\mathfrak{H}_q$-CONVEX FUNCTIONS AND GENERALIZATION OF THE HÖLDER, MINKOWSKI, AND MUIRHEAD INEQUALITIES

S.M. Gorsky[1], **V.I. Murashka**[2]

[1]*Saint Petersburg Academic University*
[2]*F. Scorina Gomel State University*

Через $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ будем обозначать произвольные средние величины, а через $\mathfrak{H}_p$ – среднее степенное степени *p*. Функция *f* называется $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$-выпуклой, если для любых *x* и *y* из области определения функции *f* выполняется неравенство $f(\mathfrak{M}(x,y)) \leqslant \mathfrak{N}(f(x), f(y))$. В работе предложен метод построения $\mathfrak{H}_p\mathfrak{H}_q$-выпуклых функций. Также получены обобщения неравенств Коши – Буняковского, Гёльдера, Минковского, Малера и Мюрхеда.

***Ключевые слова**: $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$-выпуклая функция, неравенство Коши – Буняковского, неравенство Гёльдера, неравенство Минковского, неравенство Малера, неравенство Мюрхеда, среднее Гёльдера.*

Let $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ be any means. Let $\mathfrak{H}_p$ be a power mean with exponent *p*. A function *f* is called $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$-convex if for any *x* and *y* from the domain of *f* the inequality $f(\mathfrak{M}(x,y)) \leqslant \mathfrak{N}(f(x), f(y))$ holds. In this paper the method of constructing $\mathfrak{H}_p\mathfrak{H}_q$-convex functions is proposed. For such functions generalizations of Cauchy-Schwarz, Hölder, Minkowski, Mahler, and Muirhead inequalities are obtained.

***Keywords**: $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$-convex function, Cauchy-Schwarz inequality, Hölder inequality, Minkowski inequality, Mahler inequality, Muirhead inequality, Hölder mean.*

Введение

Данная работа по сути продолжает работу [1], в которой были получены аналоги неравенств Эрмита – Адамара, Поповичу, Чебышева и перестановочного неравенства для $\mathfrak{K}_\varphi\mathfrak{K}_\psi$-выпуклых функций. Напомним основные определения и используемые результаты.

***Определение* 0.1.** Средней величиной $\mathfrak{M}$ набора $a_1, \ldots, a_n$ называется величина, для которой выполнено условие

$$\min\{a_1, \ldots, a_n\} \leqslant \mathfrak{M}(a_1, \ldots, a_n) \leqslant \max\{a_1, \ldots, a_n\}.$$

Часто рассматриваются средние с дополнительным условием симметричности

$$\mathfrak{M}(a_1, \ldots, a_n) = \mathfrak{M}(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}),$$

где σ – произвольная перестановка чисел от 1 до *n*.

Наиболее употребляемым средними являются среднее Гёльдера (среднее степенное)

$$\mathfrak{H}_p(a_1, \ldots, a_n) = \begin{cases} \left(\dfrac{a_1^p + \ldots + a_n^p}{n}\right)^{1/p}, & p \neq 0; \\ \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}, & p = 0; \end{cases}$$

и среднее Колмогорова (квази-арифметическое среднее)

$$\mathfrak{K}_\varphi(a_1, \ldots, a_n) = \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(a_1) + \ldots + \varphi(a_n)}{n}\right),$$

где φ – монотонная функция.

***Определение* 0.2** [2]. Функция *f* называется $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$-выпуклой функцией, если для любых *x* и *y* из области определения функции *f* выполняется неравенство

$$f(\mathfrak{M}(x,y)) \leqslant \mathfrak{N}(f(x), f(y)),$$

где $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ – средние величины.

В случае, если предыдущее неравенство выполняется с обратным знаком, то функция *f* называется $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$-вогнутой функцией.

Очевидно, что выпуклая функция является $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_1$-выпуклой функцией. С другой стороны, нетрудно показать, что непрерывная $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_1$-выпуклая функция является выпуклой.

Целью данной работы является описание в явном виде $\mathfrak{H}_p\mathfrak{H}_q$-выпуклых функций, а также обобщение неравенств Мюрхеда, Гёльдера, Минковского, Малера и Коши – Буняковского.

Замечание. В силу неравенства о средних любая $\mathfrak{M}\mathfrak{H}_q$-выпуклая функция является

$\mathfrak{M}\mathfrak{H}_s$-выпуклой функцией при $s > q$. Обратное неверно. Например, $f(x) = e^x$ является $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_0$-выпуклой функцией, но не является $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_{-1}$-выпуклой функцией.

1 Получение $\mathfrak{H}_p\mathfrak{H}_q$-выпуклых функций в явном виде

Хорошо известен следующий общий критерий для $\mathfrak{K}_\varphi\mathfrak{K}_\psi$-выпуклости (см., например, [1]):

***Лемма* 1.1.** *Пусть* ψ *и* φ *– строго монотонные функции, определенные на интервалах* J *и* I *соответственно,* ψ *– возрастающая (убывающая) и* $f : I \to J$ *– непрерывная функция. Тогда и только тогда* f *есть* $\mathfrak{K}_\varphi\mathfrak{K}_\psi$*-выпуклая функция, когда* $\psi(f(\varphi^{-1}(t)))$ *выпукла (вогнута) на* $\varphi(I)$.

Из леммы 1.1 следует следующий критерий $\mathfrak{H}_p\mathfrak{H}_q$-выпуклости.

***Лемма* 1.2** [3]. *Дифференцируемая функция* $f : (0;+\infty) \to (0;+\infty)$ *есть* $\mathfrak{H}_p\mathfrak{H}_q$*-выпуклая тогда и только тогда, когда* $x^{1-p} f'(x) f^{q-1}(x)$ *есть возрастающая функция.*

***Теорема* 1.1.** *Пусть* $f : I \to J$ $(I, J \subseteq (0;+\infty))$ *– дифференцируемая* $\mathfrak{H}_p\mathfrak{H}_q$*-выпуклая функция, тогда f представима в следующем виде*

$$f(x) = \begin{cases} \left(q \int\limits_{x_0}^{x} s^{p-1} C_1(s)ds + C_2 \right)^{\frac{1}{q}}, & q \neq 0; \\ C_2 \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} s^{p-1} C_1(s)ds \right), & q = 0; \end{cases} \tag{1.1}$$

где $C_1(s)$ *– произвольная подходящая непрерывная возрастающая функция, а* C_2 *– константа.*

Обратно, пусть $C_1(s)$ *– непрерывная возрастающая функция, а* C_2 *– константа. Если функция f, заданная формулой* (1.1) *определена на некотором интервале* $(x_0; x_1)$, *то она является* $\mathfrak{H}_p\mathfrak{H}_q$*-выпуклой на нём.*

Доказательство. По лемме 1.2

$$C_1(x) = x^{1-p} f'(x) f^{q-1}(x) \tag{1.2}$$

есть возрастающая функция. Будем считать, что функция $C_1(x)$ известна и рассмотрим (1.2) как дифференциальное уравнение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными:

$$x^{p-1} C_1(x)dx = f^{q-1}df.$$

Решив которое и получим (1.1). □

***Пример* 1.1.** Полагая в предыдущей теореме $x_0 = 1$, $C_1(s) = r > 0$ и $C_2 > 0$ получим, что функция $f(x) = C_2 x^r$ является $\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_0$-выпуклой. Если же положить $x_0 = 0$, $C_1(s) = s \cdot \operatorname{arctg} s$ и $C_2 > 0$, то получим, что функция $f(x) = \dfrac{e^{x \cdot \operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}}$ также является $\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_0$-выпуклой.

***Пример* 1.2.** Полагая в предыдущей теореме $x_0 = 0$, $C_2 = 0$, $C_1(s) = rx^{r-1}$ и $r \geqslant 1$, получим, что функция $f(x) = x^r$ является $\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_1$-выпуклой. Второй пример $\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_1$-выпуклой функции $f(x) = x^2 + \sin x$ можно получить взяв $C_1(s) = 2s + \cos s$ и $x_0 = 0$, $C_2 = 0$.

***Пример* 1.3.** Из леммы 1.1 следует, что если ψ, φ и f – дифференцируемые функции, то

$$C_1(x) = \psi'(f(\varphi^{-1}(x))) f'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x) \tag{1.3}$$

есть возрастающая (убывающая) функция, если ψ есть строго возрастающая (строго убывающая). Положим, что $\varphi(x) = x$. Тогда решив (1.3) как дифференциальное уравнение относительно функции f получим, что

$$f(x) = \psi^{-1}\left(\int\limits_{x_0}^{x} C_1(s)ds + C_2 \right)$$

есть $\mathfrak{H}_1\mathfrak{K}_\psi$-выпуклая функция.

Выбрав конкретные строго монотонные дифференцируемые функции ψ и φ и решив уравнение (1.3) получим $\mathfrak{K}_\varphi\mathfrak{K}_\psi$-выпуклую функцию.

***Замечание* 1.1**. Лемма 1.1 предлагает следующий способ построения $\mathfrak{K}_\varphi\mathfrak{K}_\psi$-выпуклой функции f. Если взять строго возрастающую функцию ψ, выбрать произвольную выпуклую функцию C и в равенстве $\psi(f(\varphi^{-1}(t))) = C(t)$ произвести замену $t = \varphi(x)$, а затем и к обеим частям неравенства применить функцию ψ^{-1}, тогда получим, что $f(x) = \psi^{-1}(C(\varphi(x)))$.

2 Обобщение некоторых классических неравенств

2.1. Обобщение неравенств Гёльдера и Коши – Буняковского

***Теорема* 2.1.** *Пусть* $f : [0;+\infty) \to (0;+\infty)$ *является непрерывной* $\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_0$*-выпуклой функцией,* a_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$ *– положительные числа, а числа* $p_j > 1$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ *такие, что* $\sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{1}{p_j} = 1.$

Тогда для функции f справедливо неравенство:

$$\prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} f(a_{ij}) \right)^{\frac{1}{p_j}} \geqslant \sum_{i=1}^{n} f\left(\prod_{j=1}^{m} a_{ij}^{\frac{1}{p_j}} \right).$$

Доказательство. Из леммы 1.1 напрямую следует, что $g(x) = \ln f(e^x)$ есть выпуклая функция, а, значит для неё справедливо неравенство Йенсена, откуда следует справедливость следующего неравенства для положительных x_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$

$$\prod_{j=1}^{m} f^{\frac{1}{p_j}}(x_j) \geqslant f\left(\prod_{j=1}^{m} x_j^{\frac{1}{p_j}}\right). \qquad (2.1)$$

Пусть $A_j = \left(\sum_{i=1}^{n} f(a_{ij})\right)^{\frac{1}{p_j}}$. К сумме $\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{p_j}\cdot\frac{f(a_{ij})}{A_j^{p_j}}\right)$ применим неравенство Юнга и получим:

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{p_j}\cdot\frac{f(a_{ij})}{A_j^{p_j}}\right) \geqslant \frac{\prod_{j=1}^{m} f^{\frac{1}{p_j}}(a_{ij})}{\prod_{j=1}^{m} A_j}.$$

К числителю дроби из правой части предыдущего неравенства применим неравенство (2.1) и получим

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{p_j}\cdot\frac{f(a_{ij})}{A_j^{p_j}}\right) \geqslant \frac{f\left(\prod_{j=1}^{m} a_{ij}^{\frac{1}{p_j}}\right)}{\prod_{j=1}^{m} A_j}.$$

Суммируя последнее неравенство по $1 \leqslant i \leqslant n$ получаем требуемое неравенство. □

***Замечание* 2.1.** Так как $f(x) = x^2$ является $\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_0$-выпуклой функцией, то при $m = 2$, $p_1 = p_2 = 2$ в качестве следствия мы получаем неравенство Коши – Буняковского. Поэтому при $m = 2$ и $p_1 = p_2 = 2$ неравенство из теоремы (2.1) является обобщением неравенства Коши – Буняковского:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f(a_i)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n} f(b_i)\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \sum_{i=1}^{n} f(\sqrt{a_i b_i}), \qquad (2.2)$$

а при $m = 2$ является обобщением классического неравенства Гёльдера для сумм:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f(a_i)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} f(b_i)\right)^{\frac{1}{q}} \geqslant \sum_{i=1}^{n} f(a_i^{\frac{1}{p}} b_i^{\frac{1}{q}}).$$

***Замечание* 2.2.** Если в тождестве Лагранжа:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}(x_i y_j - x_j y_i)^2$$

положить $x_i = \sqrt{f(a_i)}$, $y_i = \sqrt{f(b_i)}$, где f – $\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_0$-выпуклая функция, то получим уточнение неравенства (2.2):

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f(a_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{n} f(b_i)\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} f(\sqrt{a_i b_i})\right)^2 +$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\left(\sqrt{f(a_i)f(b_j)} - \sqrt{f(a_j)f(b_i)}\right)^2.$$

Нам потребуется следующее хорошо известное определение.

***Определение* 2.1.** Функция $f: I \to J$ называется полуаддитивной (супераддитивной), если для любых x, $y \in I$ выполняется

$$f(x+y) \leqslant (\geqslant)\ f(x) + f(y).$$

***Лемма* 2.1.** *Пусть* $q \geqslant 1$ *и* $g:[0;+\infty) \to [0;+\infty)$ – *непрерывная* $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_q$*-вогнутая функция, для которой* $g(0) \geqslant 0$. *Тогда функция* g *является полуаддитивной.*

Доказательство. Будем считать, что $0^q = 0$. Рассмотрим произвольное $\lambda \in [0;1]$. Тогда в силу леммы 1.1, непрерывности и $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_q$-вогнутости функции g имеем

$$g(\lambda x) = g(\lambda x + (1-\lambda)0) \geqslant$$
$$\geqslant \left(\lambda g^q(x) + (1-\lambda)g^q(0)\right)^{\frac{1}{q}} \geqslant$$
$$\geqslant \left(\lambda g^q(x) + (1-\lambda)0\right)^{\frac{1}{q}} = \lambda^{\frac{1}{q}} g(x).$$

Рассмотрим сумму

$$g(x) + g(y) = g\left(\frac{x}{x+y}(x+y)\right) + g\left(\frac{y}{x+y}(x+y)\right) \geqslant$$
$$\geqslant \left(\frac{x}{x+y}\right)^{\frac{1}{q}} g(x+y) + \left(\frac{y}{x+y}\right)^{\frac{1}{q}} g(x+y) =$$
$$= g(x+y)\left(\left(\frac{x}{x+y}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{y}{x+y}\right)^{\frac{1}{q}}\right) \geqslant$$

[по классическому неравенству Минковского]

$$\geqslant g(x+y)\left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y}\right)^{\frac{1}{q}} = g(x+y),$$

что и доказывает полуаддитивность. □

Аналогично доказывается следующая лемма.

***Лемма* 2.2.** *Пусть* $0 < q \leqslant 1$ *и* $g:[0;+\infty) \to [0;+\infty)$ – *непрерывная* $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_q$*-выпуклая функция, для которой* $g(0) = 0$. *Тогда функция g является супераддитивной.*

Как известно, из неравенства Гёльдера можно получить следующее неравенство.

***Теорема* 2.2.** *Для положительных* b_i, *неотрицательных* a_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *и* $m > 0$, $r \geqslant 1$ *справедливо неравенство*

$$\frac{a_1^{m+r}}{b_1^m} + \ldots + \frac{a_n^{m+r}}{b_n^m} \geqslant \frac{(a_1 + \ldots + a_n)^{m+r}}{n^{r-1}(b_1 + \ldots + b_n)^m}. \qquad (2.3)$$

Следующие две теоремы обобщают предыдущую теорему.

***Теорема* 2.3.** *Пусть* $m > 0$, $r \geqslant 1$ *и* $f, g: \mathbb{R} \to (0;+\infty)$ *такие, что* $f^{\frac{1}{m+r}}$ – *полуаддитивная и* $g^{\frac{1}{m}}$ – *супераддитивная функции. Тогда для наборов* a_i *и* b_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *верно неравенство*:

$$\frac{f(a_1)}{g(b_1)}+\ldots+\frac{f(a_n)}{g(b_n)}\geqslant\frac{f(a_1+\ldots+a_n)}{n^{r-1}g(b_1+\ldots+b_n)}.$$

Доказательство. Пусть $F(x)=f^{\frac{1}{m+r}}(x)$, и $G(x)=g^{\frac{1}{m}}(x)$. В силу неравенства (2.3) верно

$$\begin{aligned}&\frac{F^{m+r}(a_1)}{G^m(b_1)}+\ldots+\frac{F^{m+r}(a_n)}{G^m(b_n)}\geqslant\\&\geqslant\frac{(F(a_1)+\ldots+F(a_n))^{m+r}}{n^{r-1}(G(b_1)+\ldots+G(b_n))^m}.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Так как F – полуаддитивная, а G – супераддитивная:

$$\begin{aligned}&\frac{(F(a_1)+\ldots+F(a_n))^{m+r}}{n^{r-1}(G(b_1)+\ldots+G(b_n))^m}\geqslant\\&\geqslant\frac{F^{m+r}(a_1+\ldots+a_n)}{n^{r-1}G^m(b_1+\ldots+b_n)}=\frac{f(a_1+\ldots+a_n)}{n^{r-1}g(b_1+\ldots+b_n)}.\ \square\end{aligned}$$

***Теорема* 2.4.** *Пусть* $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ *– произвольные средние величины. Пусть* $f:\mathbb{R}\to(0;+\infty)$ *есть* $\mathfrak{H}_{\frac{1}{m+r}}\mathfrak{Q}$*-выпуклая и* $g:\mathbb{R}\to(0;+\infty)$ $\mathfrak{H}_{\frac{1}{m}}\mathfrak{R}$*-вогнутая и* $m>0$, $r\geqslant 1$. *Тогда для наборов* a_i *и* b_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ *верно неравенство*:

$$\frac{1}{n}\left(\frac{f(a_1)}{g(b_1)}+\ldots+\frac{f(a_n)}{g(b_n)}\right)\geqslant\frac{f(\mathfrak{Q}(a_1,\ldots,a_n))}{g(\mathfrak{R}(b_1,\ldots,b_n))}.$$

Доказательство. Числитель и знаменатель дроби из правой части неравенства (2.4) умножим на $n^{-(m+r)}$, получим

$$\begin{aligned}&\frac{n^{-(m+r)}(F(a_1)+\ldots+F(a_n))^{m+r}}{n^{-(m+r)}n^{r-1}(G(b_1)+\ldots+G(b_n))^m}=\\&=\frac{\left(\dfrac{F(a_1)+\ldots+F(a_n)}{n}\right)^{m+r}}{n^{-1}\left(\dfrac{G(b_1)+\ldots+G(b_n)}{n}\right)^m}=\\&=n\cdot\frac{\mathfrak{H}_{\frac{1}{m+r}}(f(a_1),\ldots,f(a_n))}{\mathfrak{H}_{\frac{1}{m}}(g(b_1),\ldots,g(b_n))}.\end{aligned}$$

Разделив на n обе части неравенства (2.4) и применив свойства функций f и g, получим требуемое. $\square$

2.2 Обобщение неравенств Минковского и Малера

***Теорема* 2.5.** *Пусть* $p\geqslant 1$ *и* $f:[0;+\infty)\to(0;+\infty)$ *есть полуаддитивная* $\mathfrak{H}_p\mathfrak{M}$*-вогнутая функция и пусть* a_{ij} $(1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m)$ *– положительные числа. Тогда для функции f справедливо неравенство*

$$\mathfrak{H}_p\left(f\left(\sum_{j=1}^m a_{1j}\right),\ldots,f\left(\sum_{j=1}^m a_{nj}\right)\right)\leqslant\sum_{i=1}^n f(\mathfrak{M}(a_{i1},\ldots,a_{im})).$$

Доказательство. Воспользуемся доказательством классического неравенства Минковского для сумм. Рассмотрим сумму

$$\sum_{i=1}^n f^p\left(\sum_{j=1}^m a_{ij}\right)=\sum_{i=1}^n f\left(\sum_{j=1}^m a_{ij}\right)f^{p-1}\left(\sum_{j=1}^m a_{ij}\right)\leqslant$$

[применим полуаддитивность]

$$\leqslant\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m f(a_{ij})f^{p-1}\left(\sum_{j=1}^m a_{ij}\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^n f(a_{ij})f^{p-1}\left(\sum_{j=1}^m a_{ij}\right)\leqslant$$

[правую часть этого неравенства оценим с помощью классического неравенства Гёльдера]

$$\leqslant\sum_{j=1}^m\left(\left(\sum_{i=1}^n f^p\left(a_{ij}\right)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n f^p\left(\sum_{j=1}^m a_{ij}\right)\right)^{\frac{p-1}{p}}\right).$$

Сокращаем обе части неравенства на

$$n^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n f^p\left(\sum_{j=1}^m a_{ij}\right)\right)^{\frac{p-1}{p}},$$

имеем

$$\begin{aligned}&\mathfrak{H}_p\left(f\left(\sum_{j=1}^m a_{1j}\right),\ldots,f\left(\sum_{j=1}^m a_{nj}\right)\right)\leqslant\\&\leqslant\sum_{j=1}^m\mathfrak{H}_p(f(a_{1j}),\ldots,f(a_{nj})).\end{aligned}$$

Осталось воспользоваться $\mathfrak{H}_p\mathfrak{M}$-вогнутостью и получим требуемое неравенство. $\square$

***Следствие* 2.1.** *Пусть* $f:[0;+\infty)\to(0;+\infty)$ *и* $q\geqslant 1$ *есть непрерывная* $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_q$*-вогнутая функция и пусть* a_{ij} $(1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m)$ *– положительные числа. Тогда для функции f справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^n f\left(\sum_{j=1}^m a_{ij}\right)\leqslant n\cdot\sum_{i=1}^n f(\mathfrak{H}_q(a_{i1},\ldots,a_{im})).$$

***Следствие* 2.2.** *Пусть* $f:[0;+\infty)\to(0;+\infty)$ *–* $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_q$*-вогнутая функция* $(q\geqslant 1)$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\begin{aligned}&2^{1-\frac{1}{q}}\left(f^q\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i\right)+f^q\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n b_i\right)\right)^{\frac{1}{q}}\geqslant\\&\geqslant f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i\right)+f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n b_i\right)\geqslant\\&\geqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f^q(a_i)\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f^q(b_i)\right)^{\frac{1}{q}}\geqslant\\&\geqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f^q(a_i+b_i)\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Доказательство. Третье неравенство верно в силу леммы 2.1 и теоремы 2.5.

Второе неравенство верно в силу определения $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_q$ -вогнутой функции.

Первое неравенство верно в силу неравенства о средних. □

***Теорема* 2.6.** *Пусть* $f:[0;+\infty)\to[0;+\infty)$ *есть непрерывная супераддитивная функция, и пусть* a_{ij} $(1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m)$ *– положительные числа. Тогда для функции f справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}f^{\frac{1}{m}}(a_{ij})\leqslant\prod_{j=1}^{m}f^{\frac{1}{m}}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\right).$$

Доказательство. По неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом имеем

$$\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{f(a_{ij})}{\sum\limits_{i=1}^{n}f(a_{ij})}\right)^{\frac{1}{m}}\leqslant\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{f(a_{ij})}{\sum\limits_{i=1}^{n}f(a_{ij})}.$$

Просуммировав предыдущее неравенство по i и умножив обе части неравенства на

$$\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}f(a_{ij})\right)^{\frac{1}{m}}$$

получим

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}f^{\frac{1}{m}}(a_{ij})\leqslant\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}f(a_{ij})\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Осталось воспользоваться супераддитивностью функции *f*. □

***Замечание* 2.3.** Если в предыдущей теореме положить, что $f(x)=x$ и $n=2$, то получится неравенство Малера:

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}+\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}y_i}\leqslant\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(x_i+y_i)}.$$

2.3 Обобщение неравенства Мюрхеда

Напомним некоторые определения и теоремы.

***Определение* 2.2.** Будем говорить, что набор $a(a_1,\ldots,a_n)$ мажорирует набор $b(b_1,\ldots,b_n)$ и записывать $a\succ b$, если

1. $a_1\geqslant\ldots\geqslant a_n\geqslant 0,\ b_1\geqslant\ldots\geqslant b_n\geqslant 0;$
2. $\forall k\ \ (1\leqslant k\leqslant n-1)\ \ \sum\limits_{i=1}^{k}a_i\geqslant\sum\limits_{i=1}^{k}b_i;$
3. $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i.$

Пусть $x\succ y$, тогда для выпуклой функции *f* справедливо неравенство Караматы [6, теорема 2.9]

$$\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\geqslant\sum_{i=1}^{n}f(y_i).$$

Из леммы 1.1 непосредственно следует следующее утверждение.

***Утверждение* 2.1.** *Если f – непрерывная* $\mathfrak{K}_\varphi\mathfrak{K}_\psi$ *-выпуклая функция и*

$$(\varphi(a_1),\ldots,\varphi(a_n))\succ(\varphi(b_1),\ldots,\varphi(b_n)),$$

то $\mathfrak{K}_\psi(f(a_1),\ldots,f(a_n))\geqslant\mathfrak{K}_\psi(f(b_1),\ldots,f(b_n)).$

Доказательство. По лемме 1.1 функция $\psi(f(\varphi^{-1}(x)))$ является выпуклой (вогнутой). Положим, $x_i=\varphi(a_i)$, $y_i=\varphi(b_i)$. Если $x\succ y$, то по неравенству Караматы имеем

$$\sum_{i=1}^{n}\psi(f(a_i))\geqslant(\leqslant)\sum_{i=1}^{n}\psi(f(b_i)).$$

Разделив обе части неравенства на n и применив к обеим частям ψ^{-1}, получим требуемое. □

***Пример* 2.1.** Так как $f(x)=x$ является $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_q$ -выпуклой функцией при $q\geqslant 1$, то для наборов положительных чисел $x\succ y$ справедливо неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

что доказывает, что $\mathfrak{H}_q$ $(q>1)$ является выпуклой по Шуру функцией.

***Теорема* 2.7.** *Пусть* $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ *– непрерывная* $\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_1$ *-выпуклая функция, и пусть*

$$(a_1,\ldots,a_n)\succ(b_1,\ldots,b_n).$$

Тогда для положительных x_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ *выполняется неравенство*

$$\sum_{\pi}f\left(\prod_{i=1}^{n}x_{\pi(i)}^{a_i}\right)\geqslant\sum_{\pi}f\left(\prod_{i=1}^{n}x_{\pi(i)}^{b_i}\right),\qquad(2.5)$$

где суммирование ведется по всем возможным перестановкам π *степени n.*

Доказательство. Как известно [6, с. 11], если $a\succ b$, то за конечное число операций вида: пару (a_i,a_j) $(a_j<a_i)$ заменить на пару $(a_i-\varepsilon,a_j+\varepsilon)$ для какого-то $\varepsilon\in(0;a_i-a_j)$ из a можно получить b.

Понятно, что теми же операциями из которых из $a(a_1,\ldots,a_n)$ можно получить $b(b_1,\ldots,b_n)$ $(a\succ b)$ для положительных $y_1,\ldots,y_n$ из

$$\{a_1y_{\pi(1)}+\ldots+a_ny_{\pi(n)}\}\qquad(2.6)$$

можно получить

$$\{b_1y_{\pi(1)}+\ldots+b_ny_{\pi(n)}\},\qquad(2.7)$$

где последовательности построены по всевозможным перестановкам π чисел от 1 до *n*. То есть в наборах (2.6) и (2.7) можно переставить элементы так, чтобы $(2.6)\succ(2.7)$. Положим, что $y_i=\ln x_i$ и применим к (2.6) и (2.7) для функции *g* неравенство Караматы, что и доказывает неравенство (2.5). □

Неравенство (2.5) является обобщением неравенства Мюрхеда, когда $f(x)=x$.

***Следствие* 2.3.** *Пусть* $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ – *возрастающая непрерывная* $\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_1$*-выпуклая функция, числа* $\alpha_i \geqslant 0$ *такие, что* $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1.$ *Тогда для положительных* x_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ *справедливо неравенство*

$$\mathfrak{K}_f(x_1,\ldots,x_n)\geqslant f^{-1}\left(\frac{1}{n!}\sum_{\pi} f(x_{\pi(1)}^{\alpha_1}\ldots x_{\pi(n)}^{\alpha_n})\right)\geqslant \geqslant \sqrt[n]{x_1\ldots x_n},$$

где π *– перестановка чисел от* 1 *до n.*

Доказательство. К наборам

$$(1,0,\ldots,0)\succ(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\succ\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}\right)$$

применим теорему 2.7. Все части неравенства разделим на *n*! и ко всем частям неравенства применим функцию f^{-1}. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мурашко*, *В.И.* $\mathfrak{K}_\varphi\mathfrak{K}_\psi$-выпуклые функции и обобщения классических неравенств / В.И. Мурашко, С.М. Горский, Я.И. Сандрыгайло // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4 (37). – С. 98–102.

2. *Niculescu*, *C.P.* Convexity according to means / C.P. Niculescu // J. Math. Ineq. Appl. – 2003. – Vol. 6, № 4. – P. 571–579.

3. *Baricz*, *Á*. Geometrically concave univariate distributions / Á. Baricz // J. Math. Ineq. Appl. – 2010. – № 363. – P. 182–196.

4. *Anderson*, *G.D*. Generalized convexity and inequalities / M.K. Vamanamurthy, M. Vuorinen // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – Vol. 335. – P. 1294–1308.

5. *Li*, *Y*. A note of proofs of generalized Radon inequality / Y. Li, X.-M. Gu, J. Xiao // arXiv: 1504.05874v3.

6. *Arnold*, *B.C*. Majorization and the Lorenz Order: A Brief Introduction / B.C. Arnold // Springer-Verlag Lecture Notes in Statistics. – 1987. – Vol. 43.

Поступила в редакцию 11.02.2020.