# О динамике столкновения заряженных сгустков в связи с ударным механизмом ускорения

А. Г. БОНЧ-ОСМОЛОВСКИЙ

УДК 621.384.01

В 1956 г. В. И. Векслером [1] был предложен ударный механизм ускорения сгустков заряженных частиц, являющийся одной из разновидностей общего когерентного метода, рассмотренного им тогда же. На Женевскую конференцию по ускорителям (1959 г.) В. И. Векслер и В. Н. Цытович [2] представили краткий анализ ударного ускорения, в том числе рассмотрели случай столкновения заряженных сгустков.

В последнее время значительно возрос интерес к коллективному методу ускорения [3], с одной стороны, и к вопросу получения больших электронных токов [4] — с другой. Есть основания полагать, что успехи в этой области могут значительно приблизить осуществление ударного ускорения, так как становится, видимо, реальной проблема создания тяжелого сгустка с требуемыми параметрами.

В настоящей работе основное внимание уделено рассмотрению некоторых вопросов динамики столкновения заряженных сгустков и установлению принципиальных характеристик ударного ускорения, в том числе основных параметров самих заряженных сгустков. Проблемы создания и предварительного ускорения таких сгустков в данной работе не затрагиваются.

## Кинематика упругого соударения двух сгустков

Введем обозначения. Все величины, относящиеся к тяжелому сгустку, обозначим цифрой 1, к легкому — цифрой 2. Так, например, $M_1$, $v_1^0$, $\gamma_1^0$ — масса, скорость и энергия (в единицах $Mc^2$) до столкновения тяжелого сгустка; $N_2^e$, $\nu_2$, $\varepsilon_{2\perp}$ — число частиц (электронов), «погонный электрон» и поперечная энергия электронов в легком сгустке соответственно. Погонный электрон определяется обычно: $\nu = r_0 n$ ($r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$, $n$ — линейная плотность числа частиц, для тонкого кольца радиуса $R$ равная $\frac{N}{2\pi R}$). Величины до столкновения обозначим индексом 0, после столкновения — без индекса.

Предположим, что выполнены условия упругости соударения двух сгустков и что столкновение является лобовым (прицельный параметр гораздо меньше размера сгустков). Первое предположение будет обсуждено ниже.

Пусть в общем случае до столкновения тяжелый сгусток имел скорость $v_1^0$, а легкий $v_2^0$, причем направления векторов скорости одинаковы, а $v_1^0 > v_2^0$. Тогда с помощью релятивистских формул преобразования скоростей легко показать, что энергия легкого сгустка после столкновения (точный смысл слова «после» поясняется ниже) будет равна

$$E_2 = M_2 c^2 \gamma_2^0 \frac{1 - 2\frac{V v_2^0}{c^2} + V^2/c^2}{1 - V^2/c^2}, \tag{1}$$

где $V$ — скорость системы центра тяжести (ц-системы):

$$V = \frac{M_1 \gamma_1^0 v_1^0 + M_2 \gamma_2^0 v_2^0}{M_1 \gamma_1^0 + M_2 \gamma_2^0}. \tag{2}$$

Если выполнено условие

$$M_1 \gamma_1^0 \gg M_2 \gamma_2^0, \tag{3}$$

то $V \approx v_1^0$; ц-система при этом практически совпадает с системой покоя тяжелого сгустка. Тогда

$$E_2 \approx 2 M_2 c^2 \gamma_1^0 \frac{\gamma_{отн} + \frac{M_2}{M_1}}{1 + 2\frac{M_2}{M_1}\gamma_{отн}} \tag{4}$$

и

$$\gamma_{отн} = \gamma_1^0 \gamma_2^0 \left(1 - \frac{v_1^0 v_2^0}{c^2}\right). \tag{5}$$

Величина $\gamma_{отн}$ имеет смысл энергии легкого сгустка на бесконечности в ц-системе при выполнении условия (3). Приведем более простую формулу для $\gamma_{отн}$ в практически важном случае, когда

$$\gamma_1^{0^2} \gg 1; \quad \gamma_2^{0^2} \gg 1; \quad \gamma_1^{0^2} \gg \gamma_2^{0^2}: \tag{6}$$

$$\gamma_{отн} \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma_1^0}{\gamma_2^0}. \tag{7}$$

Теперь видно, что если выполнено более жесткое условие, чем (3), а именно:

$$M_1 \gg 2 M_2 \gamma_{отн} \tag{8}$$

(при этом тяжелый сгусток практически не меняет свою энергию в процессе столкновения), то:

$$E_2 \approx 2M_2c^2\gamma_1^0\gamma_{\text{отн}}. \tag{9}$$

В частном случае $v_2^0 = 0$, $\gamma_{\text{отн}} = \gamma_1^0$ и

$$E_2 \approx 2M_2c^2\gamma_1^{0\,2}. \tag{10}$$

Последняя формула была указана В. И. Векслером [1] и определяет известный эффект $\gamma^2$ при упругом столкновении релятивистских частиц.

При представленных выше условиях увеличение энергии легкого сгустка в $\gamma^2$ раз в лабораторной системе в процессе столкновения означает в ц-системе упругое отражение легкого сгустка от центра сил (тяжелого сгустка) с энергией $\gamma$ на бесконечности.

### Условия упругого характера соударения

Описанная кинематика столкновения предполагает, что заряженные сгустки движутся и взаимодействуют по закону, схожему с поведением упругих шаров с массой $M_1$ и $M_2$. Необходимо выяснить, при каких условиях такая модель будет близка к действительной картине столкновения заряженных сгустков.

В более ранних работах по ударному ускорению в основном рассматривались нейтральные сгустки с интенсивным азимутальным током, взаимодействие между которыми осуществлялось магнитными силами отталкивания (для противоположно направленных токов в сгустках). Но такие токи невозможно удержать однородным в пространстве магнитным полем, и, кроме того, магнитное взаимодействие в этом случае относительно слабое, что неудобно со многих точек зрения. Поэтому в настоящей работе внимание в основном уделено взаимодействию заряженных сгустков.

Рассмотрим легкий сгусток в виде тонкого электронного кольца с большим радиусом $R$ и малым $a$ с небольшой примесью ионов, причем в азимутальном направлении электроны вращаются с энергией $\gamma_{\perp 2}^0$ (до столкновения). Относительно тяжелого сгустка предположим только, что характерный геометрический размер его не превышает $R$, а энергия вращательного движения электронов равна $\gamma_{\perp 1}^0$. Будем также считать, что он целиком состоит из электронов и масса его удовлетворяет соотношению (8). Последнее означает, что тяжелый сгусток покоится в ц-системе, и в дальнейшем его движение рассматриваться не будет.

Большие размеры обоих сгустков удерживаются однородным продольным магнитным полем, так что токи в сгустках имеют одинаковые направления.

Главное предположение, которое делается при рассмотрении ударного ускорения, состоит в том, что наименьшее расстояние, на которое сближаются сгустки в процессе столкновения (в ц-системе), значительно больше характерных геометрических размеров сгустков $R$. Тогда энергию взаимодействия двух сгустков можно приближенно представить в виде

$$W \approx \frac{e^2N_1N_2}{z} - \frac{e^2N_1N_2}{2z}\left(\frac{R}{z}\right)^2. \tag{11}$$

При написании формулы (11) предполагалось, что токи в сгустках релятивистские в течение всего времени столкновения. Число ионов в легком сгустке мало, так что $N_2 \approx N_2^e$. Будем пренебрегать вторым членом в выражении (11), считая, что $R \ll z_{\text{мин}}$.

Выясним теперь, при каких условиях можно считать малыми изменения параметров легкого сгустка — большого радиуса и энергии вращательного движения $\gamma_{\perp 2}$ в процессе столкновения.

Отношение добавочной радиальной кулоновской силы, создаваемой тяжелым сгустком, к центробежной силе электронов в легком сгустке определяет в первую очередь изменение радиуса легкого сгустка по мере его сближения с тяжелым. Это изменение мало, если

$$\frac{eE_r}{F_{\text{центр}}} = 2\pi\frac{\nu_1}{\gamma_{\perp 2}}\cdot\frac{R^3}{z_0^3} \ll 1. \tag{12}$$

Здесь $\nu_1$ — погонный электрон тяжелого сгустка; $z_0$ — наименьшее расстояние между сгустками.

Изменение радиуса $R$ связано также с изменением $\gamma_{\perp 2}$ из-за магнитного взаимодействия сгустков, которое нетрудно оценить, исходя из закона сохранения обобщенного азимутального импульса электронов легкого кольца.

Считая, что изменение радиуса в соответствии с выражением (12) невелико, можно получить следующее условие малости изменения $\gamma_{\perp 2}$:

$$\frac{\Delta\gamma_{\perp 2}}{\gamma_{\perp 2}} \approx \pi\frac{\nu_2}{\gamma_{\perp 2}}\left(\frac{R}{z_0}\right)^3 \ll 1. \tag{13}$$

Таким образом, если условие (12) выполнено, что и будет предполагаться в дальнейшем, то в процессе столкновения параметры легкого сгустка можно считать неизменными ($\nu_1 \gg \nu_2$).

Легко показать, что изменение соответствующих параметров тяжелого сгустка при выполнении условия (12) пренебрежимо мало.

Собственно упругим столкновение будет тогда, когда легкий сгусток в процессе рассеяния на тяжелом в ц-системе потеряет на излучение пренебрежимо малую долю своей первоначальной энергии. Очевидно, при сделанных предположениях основную роль может играть известное излучение при кулоновском рассеянии заряда $eN_2$.

Предполагая малость потерь на излучение, определим динамику движения легкого сгустка и установим критерий малости потерь на излучение.

Уравнение движения легкого сгустка в поле тяжелого с учетом выражений (10) и (11) имеет вид

$$M_2 \frac{\ddot{z}}{(1-\dot{z}/c)^{3/2}} = \frac{e^2 N_1 N_2}{z^2}. \qquad (14)$$

Здесь $M_2$ содержит как обычную, так и электромагнитную массу легкого сгустка. С учетом перенормировки масса легкого сгустка такова:

$$M_2 = m_e \gamma_{\perp 2} N_2^e \left[1 + \frac{\nu_2}{\gamma_{\perp 2}} \left(\ln \frac{8R}{a} - \frac{7}{4}\right)\right] + m_i N_i. \qquad (15)$$

Здесь $\nu_2$ — погонный электрон легкого сгустка; $m_i$ и $N_i$ — масса и число ионов, содержащихся в нем.

Первый интеграл уравнения (14) дает с учетом условий на бесконечности (полная энергия легкого сгустка равна $M_2 c^2 \gamma_{\text{отн}}$) закон сохранения энергии:

$$\frac{M_2 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = M_2 c^2 \gamma_{\text{отн}} - \frac{e^2 N_1 N_2}{z} \qquad (16)$$

и

$$\frac{\dot{z}}{c} = \beta = \frac{\sqrt{\left(M_2 c^2 \gamma_{\text{отн}} - \frac{e^2 N_1 N_2}{z}\right)^2 - M_2^2 c^4}}{M_2 c^2 \gamma_{\text{отн}} - \frac{e^2 N_1 N_2}{z}}. \qquad (17)$$

Теперь легко определить расстояние наибольшего сближения сгустков в ц-системе:

$$z_0 = \frac{e^2 N_1 N_2}{M_2 c^2 (\gamma_{\text{отн}} - 1)}. \qquad (18)$$

Дальнейшее интегрирование выражения (17) приводит к зависимости $z(t)$.

Наибольший интерес представляет возможность найти «время соударения» $\tau_c$, которое определяется как удвоенное время прохождения легким сгустком расстояния от $z_0$ до точки, где практически можно пренебречь взаимодействием сгустков, т. е. когда легкий сгусток имеет энергию, равную $\varkappa \gamma_{\text{отн}} M_2 c^2$ ($\varkappa \leqslant 1$). Из выражения (16) нетрудно получить

$$\varkappa = 1 - \frac{\gamma_{\text{отн}} - 1}{\gamma_{\text{отн}}} \cdot \frac{z_0}{z}; \quad \frac{1}{\gamma_{\text{отн}}} \leqslant \varkappa \leqslant 1. \qquad (19)$$

На расстояниях $z > 10 z_0$ после отражения энергия легкого сгустка превышает 90% максимальной.

Согласно определению

$$\tau_c = 2 \int\limits_{z_0}^{z(\varkappa)} \frac{dz}{\dot{z}} \qquad (20)$$

или [с использованием формул (17), (18) и (19)]

$$\tau_c = \frac{2 z_0 (\gamma_{\text{отн}} - 1)}{c} \int\limits_{1/\gamma_{\text{отн}}}^{\varkappa} \frac{x\, dx}{(1-x)^2 \sqrt{\gamma_{\text{отн}}^2 x - 1}}. \qquad (21)$$

Этот интеграл вычисляется, и $\tau_c$ равно

$$\tau_c = \frac{2 z_0}{c(1+\gamma_{\text{отн}})} \left[\frac{\sqrt{\gamma_{\text{отн}}^2 \varkappa^2 - 1}}{1-\varkappa} + \frac{1}{\sqrt{\gamma_{\text{отн}}^2 - 1}} \ln \frac{\sqrt{\gamma_{\text{отн}}^2 - 1}\sqrt{\gamma_{\text{отн}}^2 \varkappa^2 - 1} + \gamma_{\text{отн}}^2 \varkappa - 1}{\gamma_{\text{отн}}(1-\varkappa)}\right]. \qquad (22)$$

В большинстве практически интересных случаев $\gamma_{\text{отн}}^2 - 1 \gg 1$; тогда в выражении (22) можно пренебречь членом, содержащим ln, и

$$\tau_c \approx \frac{2 z_0}{c} \cdot \frac{\sqrt{\gamma_{\text{отн}}^2 \varkappa^2 - 1}}{(1-\varkappa)(1+\gamma_{\text{отн}})}; \qquad (23)$$

при $\varkappa = 0{,}1$ $\tau_c \approx 20\ z_0/c$.

Определим еще одну характеристику ударного ускорения: назовем «длиной взаимодействия» расстояние, которое пройдет тяжелый сгусток за время столкновения $\tau_c \gamma_1^0$ (в лабораторной системе):

$$L = c \tau_c \gamma_2^0 \approx \frac{2 e^2 N_1 N_2 \gamma_1^0}{M_2 c^2 (\gamma_{\text{отн}}^2 - 1)} \cdot \frac{\sqrt{\gamma_{\text{отн}}^2 \varkappa^2 - 1}}{1 - \varkappa}. \qquad (24)$$

Величина $L$ характеризует длину пути, на котором легкий сгусток ускоряется электрическим полем тяжелого сгустка.

Оценим теперь долю энергии, которую заряд легкого сгустка теряет на излучение. Известно, [5], что потеря энергии на излучение одного заряда равна

$$\Delta E = \frac{2 e^4}{3 m^2 \gamma_{\perp 2}^2 c^3} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_r^2(z)\, dt = \frac{4 e^4 N_1^2}{3 m^2 \gamma_{\perp 2}^2 c^3} \int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{z^4(t)}. \qquad (25)$$

Основная часть спектра излучения сосредоточена в области частот $\omega\tau_c \sim 1$; соответствующие длины волн значительно превосходят геометрические размеры сгустка $R$: $\lambda \approx 20\pi z_0 \gg R$. Несколько завысив результат, будем считать, что излучение легкого сгустка полностью когерентно, тогда

$$\Delta E \approx \frac{4e^6 N_2^2 N_1^2}{3m^2\gamma_{\perp 2}^2 c^3} \int\limits_0^\infty \frac{dt}{z^4(t)}. \qquad (26)$$

Можно показать, что основная доля потерь падает на область релятивистских значений скорости вдали от точки остановки; потери вблизи последней в $\gamma_{отн}$ раз меньше потерь в релятивистской области. Тогда приближенно в интеграле можно заменить $z = z_0 + ct$, и вычисления дают

$$\frac{\Delta E}{E} \approx \frac{4}{9}\cdot\frac{N_2}{N_1}(\gamma_{отн}-1)^2 \times$$
$$\times\left[1+\frac{\nu_2}{\gamma_{\perp 2}}\left(\ln\frac{8R}{a}-\frac{7}{4}\right)+\frac{m_i}{m_e\gamma_{\perp 2}}\cdot\frac{N_i}{N_2}\right]^2. \qquad (27)$$

В обычных условиях $\frac{\nu_2}{\gamma_{\perp 2}} \ll 1$ и $\frac{m_i}{m_e\gamma_{\perp 2}}\cdot\frac{N_i}{N_2} \sim 1$. Тогда критерий упругости соударения сводится к условию

$$\frac{N_1}{N_2} \gg (\gamma_{отн}-1)^2. \qquad (28)$$

### Совместное ускорение ионов и электронов легкого сгустка при ударном ускорении

Как видно из предыдущего раздела, расстояние наибольшего сближения сгустков в ц-системе $z_0$ определяет все важнейшие характеристики ударного ускорения. Условия кулоновского характера взаимодействия, неизменность геометрических размеров и упругого характера столкновения ограничивают $z_0$ со стороны малых значений.

Для коллективного механизма ускорения необходимо, чтобы в процессе ускорения ионы, содержащиеся в легком сгустке, ускорялись бы совместно с электронами. Это требование также накладывает ограничение на величину наибольшего сближения сгустков; соответствующие условия оказываются наиболее жесткими.

Предположим, что за время соударения малые размеры поперечного сечения легкого сгустка (кольца) $a$ остаются неизменными в мгновенно сопутствующей легкому сгустку системе координат. Тогда частота колебаний ионов в этой системе координат — также величина неизменная; она равна:

$$\Omega_i^2 = \frac{e^2 N_2 Z}{\pi R a^2 m_i}. \qquad (29)$$

Процесс столкновения является адиабатическим по отношению к колебаниям ионов, если за время столкновения $\tau_c$ ионы успевают совершить много колебаний около положения равновесия, т. е. выполняется условие:

$$\frac{\Omega i \tau_c}{\gamma_{отн}} \gg 1. \qquad (30)$$

Для параметров, представляющих практический интерес, условие (30) выполняется, и задача, таким образом, сводится к колебаниям ионов в потенциальной яме легкого сгустка под действием внешней вынуждающей силы, медленно изменяющейся со временем.

Задачи такого типа удобно решать с помощью методики перехода в собственную (неинерциальную) систему координат, связанную с легким сгустком. Соответствующий математический аппарат описан в работе [6]. Задача об удержании ионов в легком сгустке близка к ускоренному релятивистскому осциллятору [6] с тем отличием, что ускорение в мгновенно сопутствующей системе координат — величина переменная. Если выполнены условия нерелятивистского движения ионов в собственной системе координат $\nu_2\frac{m_e}{m_i} \ll 1$ и малости отклонения метрики собственной системы от галилеевой $\frac{e^2 N_1 N_2 a}{M_2 c^2 z_0^2} \ll 1$, то уравнения движения ионов в этой системе будут иметь вид [6]:

$$\frac{d^2 z'}{dt^2} + \Omega_c^2 z' = -\frac{e^2 N_1}{z^2(t)}\left(\frac{Z}{m_i}+\frac{1}{m_e\gamma_{\perp 2}}\right) \qquad (31)$$

С учетом условия (30) решение этого уравнения представляет собой сумму колебательного члена и вынужденного — отклонение центра колебаний иона от центра потенциальной ямы из-за влияния сил инерции. Требуя, чтобы это отклонение не превышало, например, половины малого радиуса легкого сгустка $a$, и полагая для простоты $\frac{Z}{m_i} \ll \frac{1}{m_e\gamma_{\perp 2}}$ и $\frac{N_i}{N_{e2}}\cdot\frac{m_i}{m_e\gamma_{12}} \ll 1$, получаем условие удержания ионов в виде:

$$\frac{N_1}{N_2} > \frac{m_i}{m_e}\cdot\frac{a\gamma_{\perp 2}}{2\pi R}\left(\frac{\gamma_{отн}-1}{\nu_2}\right)^2. \qquad (32)$$

* * *

На основании изложенного выше можно сделать следующие выводы.

Установлены условия, которые, с одной стороны, обеспечивают максимальную эффективность данного метода ускорения и, с другой стороны, позволяют провести весьма простой математический анализ процесса ускорения. Условия (8) и (28) связывают отношения числа частиц в сгустках и $\gamma_{\text{отн}}$ и показывают, что $N_1$ и $N_2$ должны различаться по крайней мере на два порядка. Наиболее сильные ограничения, связывающие также и другие параметры сгустков, накладывают условия (12) и особенно (32).

Легкий сгусток можно представить в виде тонкого кольца при $R/a \gg 1$, $\gamma_{\perp 2} \geqslant 10$ и $\nu_2 \approx \approx 1$, что соответствует числу электронов $N_{e2} \approx \approx 10^{14}$. Если принять $\nu_1 = 10$, что соответствует $N_1 \approx 10^{16}$, то условия (8), (12) и (28) будут выполняться при $\gamma_{\text{отн}} \leqslant 5$.

При выбранных параметрах из выражения (32) получим, что отношение большого и малого радиуса легкого сгустка должно быть $\sim 10^2$. Таким образом, в результате ускорения тяжелого сгустка электронов с ионами на длине $\sim 100$ *м* ионы приобретают энергию $\sim 300$ *Гэв*, если принять, например, $\gamma_2^0 = 3$ и $\gamma_1^0 = 30$.

Дальнейшее повышение энергии легкого сгустка (или ослабление ограничений на параметры ударного ускорения) возможно в случае получения компактных заряженных сгустков с числом электронов более $10^{16}$.

В заключение автор хотел бы подчеркнуть решающую роль В. И. Векслера в постановке задачи в изложенной здесь форме, а также поблагодарить М. Л. Иовновича, К. А. Решетникову и В. П. Саранцева за полезные дискуссии в связи с затронутыми в данной работе вопросами.

Поступила в Редакцию 10/VII 1970 г.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. В. И. Векслер. «Атомная энергия», 2, 427 (1957).
2. V. Veksler, V. Tsytovich. In «Proc. Conf. on Accelerators (Geneva, 1959»). Vol. 1. Geneva, CERN, 1959, p. 160.
3. В. И. Векслер и др. «Атомная энергия», 24, 317 (1968).
4. W. Link. IEEE Trans. Sci., 14, 777 (1967); F. Ford et al. Bull. Amer. Phys. Soc., 12, 961 (1967).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля. М., Физматгиз, 1962.
6. А. Г. Бонч-Осмоловский и др. Препринт ОИЯИ № 2649-2 (Дубна, 1966).

## ВТОРАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ЭНЕРГОХОЗЯЙСТВУ ВЫСШЕЙ ИНЖЕНЕРНОЙ ШКОЛЫ В ЦИТТАУ (ГДР)

**Конференция состоится 8-9 ноября 1972 г. в городе Циттау (Германская Демократическая республика). Как и первая конференция, состоявшаяся в ноябре 1970 г., она будет проводиться при участии отечественных и иностранных специалистов.**

**Основная тема 2-й конференции «Пути повышения эффективности в энергохозяйстве».**

**Основные темы дискуссии:**

1) системная автоматизация в производственном процессе выработки электроэнергии;
2) подготовительные работы по сооружению электростанций и электрических сетей (в частности, организация науки, проектирование);
3) сооружение электростанций и электрических сетей (в частности, строительная и монтажная технология);
4) эксплуатация и техническое обслуживание электростанций и электрических сетей;
5) рациональное применение энергии и выравнивание графиков нагрузки;
6) проблемы подготовки кадров для энергохозяйства.

**Заинтересованные отечественные и иностранные специалисты могут сообщить до сентября 1971 г. темы своих докладов и дискуссионных статей проректору проф. д-ру Шуману по адресу:**

**Ingenieurhochschule Zittau**
**DDR 88 Zittau**
**Strasse der Jungen Pioniere 2**

**По этому же адресу можно получить справки, связанные с проведением конференции.**

ВЫСШАЯ ИНЖЕНЕРНАЯ ШКОЛА В ЦИТТАУ