

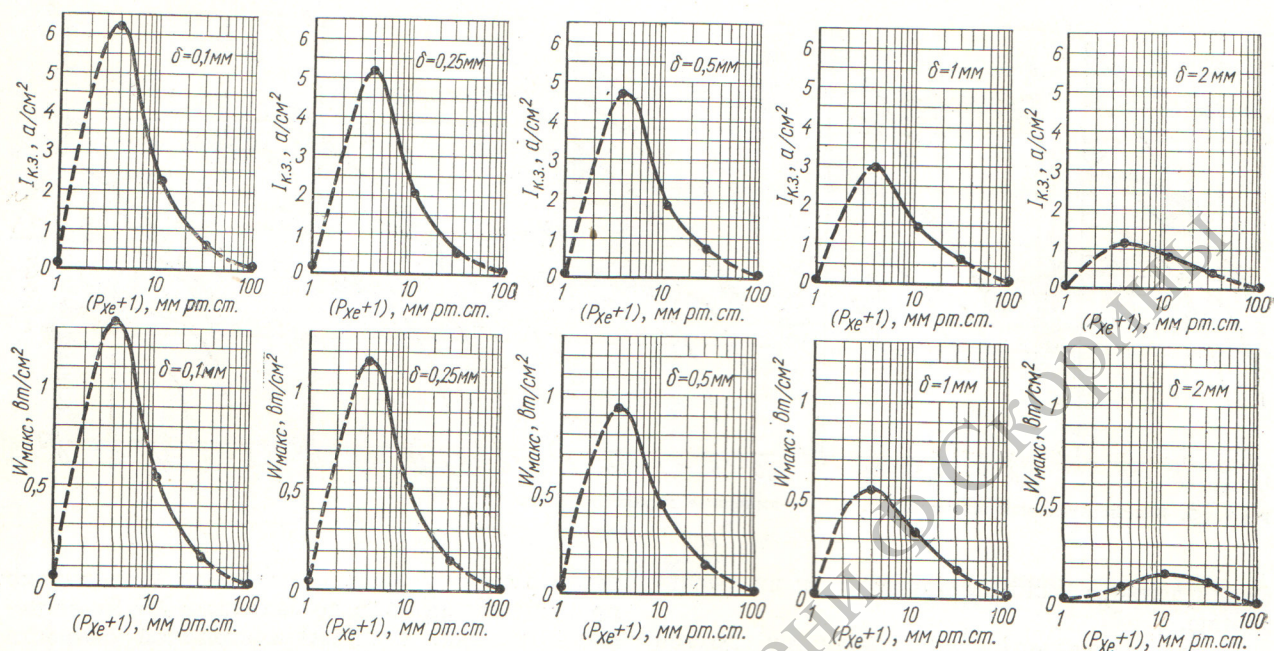


Рис. 6. Вспомогательный эксперимент. Зависимость выходных параметров ТЭП от давления ксенона ($t_K = 1300^\circ \text{C}$; $t_a = 500^\circ \text{C}$; $t_{CS} = 320^\circ \text{C}$).

Одновременное влияние этих двух конкурирующих процессов объясняет наличие максимумов на кривых зависимости выходных параметров преобразователя от давления ксенона. Однако описанный механизм влияния ксенона нуждается в дальнейшей экспериментальной и теоретической проверке.

В заключение авторы выражают благодарность К. А. Самойловой и В. И. Родину, принимавшим участие в подготовке и проведении экспериментов и обработке полученных результатов.

Поступила в Редакцию 23/VI 1966 г.
В окончательной редакции 10/IV 1967 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. В. Кондратьев, Г. В. Синютин, В. Ф. Тихонов. «Атомная энергия», 23, 208 (1967).
2. R. Forman, J. Reiss. J. Appl. Phys., 35, 2885 (1964).
3. Е. С. Бекмухамбетов и др. Препринт ФЭИ-15 (1965).
4. J. Fendley, Jr. Report on the Thermionic Conversion Specialist Conference. Gatlinburg, 1963, p. 129.
5. E. Badareu, J. Popescu, O. Zamfir. J. Electr. and Control, I ser., 16, 653 (1964).
6. C. Kaplan, J. Merzenich. Report on the Thermionic Conversion Specialist Conference. Cleveland, 1964, p. 333.

О максимальной мощности реактора с газовым охлаждением

Т. С. ЗАРИЦКАЯ, А. П. РУДИК

УДК 621.039.50

Постановка задачи. Принцип максимума Л. С. Понтрягина [1] уже использовался в работах [2, 3] для нахождения оптимальных компоновок, обеспечивающих максимум мощности реактора. Очевидно, что специфика задачи определяется в каждом конкретном случае видом теплотехнического ограничения. В настоящей работе рассматривается задача о нахождении оптимальной компоновки, обеспечивающей

максимум мощности энергетического ядерного реактора с газовым охлаждением [4]. Рассмотрим в одноразмерном приближении радиальную задачу для цилиндрического реактора с правильной квадратной решеткой, в узлах которой обязательно помещаются технологические каналы, диаметр которых может варьироваться. Зависимость материального параметра такой решетки от конструкции кана-

ла была изучена экспериментально в работе [5], из которой следует, что зависимость радиального параметра α_r^2 от управления U , пропорционального квадрату радиуса технологического канала, с хорошей точностью может быть представлена в следующем виде *:

$$\tilde{\alpha}^2 = \frac{\alpha_r^2}{\alpha_{r_0}^2} = 5,63 - 4,53U \equiv a + bU. \quad (1)$$

В формуле (1) α_r^2 нормировано на геометрический радиальный параметр системы $\alpha_{r_0}^2$, а U на U_0 , так что $\alpha_r^2(U_0) = \alpha_{r_0}^2$. В дальнейшем переменная r будет нормирована на α_{r_0} . Тогда исходное одностороннее уравнение можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx^{(1)}}{dr} &= x^{(2)} \equiv f^{(1)}; \\ \frac{dx^{(2)}}{dr} &= -\frac{1}{r} x^{(2)} - \tilde{\alpha}^2 x^{(1)} \equiv f^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

($x^{(1)} = N(r)$ — плотность нейтронов). Требуется найти максимум мощности реактора, т. е. минимум следующего функционала J :

$$J = - \int_0^{2,405} U x^{(1)} r dr. \quad (3)$$

К системе уравнений (2) должно быть добавлено следующее уравнение для $x^{(0)}$:

$$\frac{dx^{(0)}}{dr} = -U x^{(1)} r \equiv f^{(0)}. \quad (4)$$

Конструкция технологических каналов такова, что теплотехническое ограничение имеет вид

$$x^{(1)}(r) \leq N_0 \quad (0 \leq r \leq 2,405), \quad (5)$$

где N_0 — заданная постоянная. Отметим, что теплотехническое ограничение (5) не регулярно, так как

$$\begin{aligned} g(x) &= x^{(1)} - N_0; \\ p &\equiv \sum_{i=0}^2 \frac{\partial g}{\partial x^{(i)}} f^{(i)} = x^{(2)}; \quad \frac{\partial p}{\partial U} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $g(x)$ — граница допустимой области в фазовом пространстве; p — вспомогательная функция, определяемая согласно работе [1]. Поэтому, строго говоря, не ясно, должна ли оптимальная компоновка включать зону $g(x) = 0$. Покажем, что можно найти компоновку без этой зоны, удовлетворяющую принципу максимума Л. С. Понтрягина.

* В дальнейших качественных рассуждениях будет использовано то обстоятельство, что $a > 0$, $b < 0$.

Предположим, что ограничения на U таковы, что при

$$U_{\min} \leq U \leq U_{\max} \quad (7)$$

величина $\alpha_r^2 > 0$. Тогда максимальное значение плотности нейтронов будет в центре реактора и теплотехническое условие (5) превратится в условие нормировки плотности нейтронов $x^{(1)}(0) = N_0$.

Гамильтониан системы уравнений (2), (4) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{H} &= \chi + U\varphi; \\ \chi &= \psi_1 x^{(2)} - \frac{1}{r} \psi_2 x^{(2)} - a\psi_2 x^{(1)}; \\ \varphi &= -x^{(1)}(r\psi_0 + b\psi_2), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

причем вспомогательные функции ψ_i ($i = 0, 1, 2$) удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi_0}{dr} &= 0; \\ \frac{d\psi_1}{dr} &= U r \psi_0 + \tilde{\alpha} \psi_2; \\ \frac{d\psi_2}{dr} &= -\psi_1 + \frac{1}{r} \psi_2. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Заметим, что рассматриваемая задача является неавтономной, ибо коэффициенты в системах (2), (4) и (9) зависят от r . Это означает, что для оптимальной компоновки необходимо выполнение условия $\mathcal{H} > 0$.

Вместо функции ψ_2 удобно ввести функцию $\tilde{\psi}_2 \equiv \frac{1}{r} \psi_2$. Тогда выражение для φ принимает вид $\varphi = -x^{(1)}(r\psi_0 + b\tilde{\psi}_2)$, а функция $\tilde{\psi}_2$ удовлетворяет [в соответствии с системой (9)] уравнению

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\tilde{\psi}_2}{dr} \right) + \alpha_r^2 \tilde{\psi}_2 = -U \psi_0. \quad (10)$$

Очевидно, что решениями однородного уравнения (10) являются функции Бесселя. Наконец, отметим, что из требования непрерывности функций ψ_1 и ψ_2 следует непрерывность функций $\tilde{\psi}_2$ и $\frac{d\tilde{\psi}_2}{dr}$.

Системы уравнений (2), (4) и (9) должны быть дополнены граничными условиями: $x^{(1)}(0) = N_0$, $x^{(2)}(0) = 0$, $x^{(1)}(R) = 0$, $\tilde{\psi}_2(R) = 0$, где R — радиус реактора. Последнее соотношение получено из условий трансверсальности.

Допустимые типы зон. В силу линейной зависимости (8) гамильтониана от управления

очевидно, что допустимы следующие типы управления:

$$U(r) = U_{\min} \quad \text{при } \varphi < 0;$$

$$U(r) = U_{\max} \quad \text{при } \varphi > 0,$$

так как при этом гамильтониан как функция аргумента U достигает максимума. Далее, поскольку функция φ — произведение $x^{(1)}$ на функцию от $\tilde{\psi}_2$, постольку $\tilde{\psi}_2 = -\frac{\psi_0}{b} = \text{const}$ при $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial U} = \varphi = 0$, и из выражения (10) $U = 0$.

Таким образом, если и существует зона классического вариационного исчисления, то в ней $U = 0$.

Используя граничное условие $\tilde{\psi}_2(R) = 0$ и учитывая, что $\psi_0 < 0$, приходим к выводу, что $\varphi(R) > 0$. Таким образом, при $r \rightarrow R$ должно быть $U(r) = U_{\max}$, т. е. $\alpha_r^2 = \alpha_{r_{\max}}^2$. Это значит, что при рассмотрении двухзонной компоновки с границей зон $r = \rho$ возможно лишь

$$U(r) = U_{\min} \quad (\alpha_r^2 = \alpha_{r_{\max}}^2) \quad \text{при } 0 \leq r \leq \rho;$$

$$U(r) = U_{\max} \quad (\alpha_r^2 = \alpha_{r_{\min}}^2) \quad \text{при } \rho \leq r \leq R.$$

Легко убедиться, что такого рода компоновка не удовлетворяет принципу максимума Л. С. Понтрягина (к этому выводу и приводят физические аргументы, ибо подобная двухзонная компоновка дает «антивыравнивание» плотности нейтронов: в центральной зоне α_r^2 больше, чем в периферийной). Таким образом, оказывается, что двухзонные компоновки не обеспечивают максимума мощности реактора.

Трехзонная оптимальная компоновка. При $r \rightarrow R$ значение $U(r) = U_{\max}$, поэтому имеем

$$\frac{\left[J_0(\alpha_3 r_2) - \frac{J_0(\alpha_3 R)}{N_0(\alpha_3 R)} N_0(\alpha_3 r_2) \right] N_1(\alpha_2 r_2) - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \left[J_1(\alpha_3 r_2) - \frac{J_0(\alpha_3 R)}{N_0(\alpha_3 R)} N_1(\alpha_3 r_2) \right] N_0(\alpha_2 r_2)}{\left[J_0(\alpha_3 r_2) - \frac{J_0(\alpha_3 R)}{N_0(\alpha_3 R)} N_0(\alpha_3 r_2) \right] J_1(\alpha_2 r_2) - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \left[J_1(\alpha_3 r_2) - \frac{J_0(\alpha_3 R)}{N_0(\alpha_3 R)} N_1(\alpha_3 r_2) \right] J_0(\alpha_2 r_2)} =$$

$$= \frac{J_0(\alpha_1 r_1) N_1(\alpha_2 r_1) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} J_1(\alpha_1 r_1) N_0(\alpha_2 r_1)}{J_0(\alpha_1 r_1) J_1(\alpha_2 r_1) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} J_1(\alpha_1 r_1) J_0(\alpha_2 r_1)}.$$

только одну возможную трехзонную компоновку:

$$U(r) = U_{\max}, \quad 0 \leq r \leq r_1;$$

$$U(r) = U_{\min}, \quad r_1 \leq r \leq r_2;$$

$$U(r) = U_{\max}, \quad r_2 \leq r \leq R,$$

где r_1 и r_2 — границы зон. Проверим, является ли эта трехзонная компоновка оптимальной.

Принимая $N_0 \equiv 1$ и решая систему уравнений (2) при сформулированных выше граничных условиях, находим

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq r \leq r_1; \quad x^{(1)}(r) &= J_0(\alpha_1 r); \\ r_1 \leq r \leq r_2; \quad x^{(1)}(r) &= A_2 J_0(\alpha_2 r) + \\ &\quad + B_2 N_0(\alpha_2 r); \\ r_2 \leq r \leq R; \quad x^{(1)}(r) &= A_3 \left[J_0(\alpha_3 r) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{J_0(\alpha_3 R)}{N_0(\alpha_3 R)} N_0(\alpha_3 r) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Здесь α_1^2 и α_2^2 — материалы параметры в первой и второй зонах соответственно ($\alpha_1^2 = a + bU_{\max}$; $\alpha_2^2 = a + bU_{\min}$; $\alpha_3^2 \equiv \alpha_1^2$), а постоянные A_2 , B_2 и A_3 выражаются следующим образом через функции от r_1 и r_2 (здесь и ниже использовано известное соотношение между функциями Бесселя

$$N_{p-1}(x) J_p(x) - N_p(x) J_{p-1}(x) = \frac{2}{\pi x} :$$

$$A_2 = -\frac{2}{\pi \alpha_2 r_1} \left\{ J_0(\alpha_1 r_1) N_1(\alpha_2 r_1) - \right.$$

$$\left. - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} J_1(\alpha_1 r_1) N_0(\alpha_2 r_1) \right\};$$

$$B_2 = \frac{2}{\pi \alpha_2 r_1} \left\{ J_0(\alpha_1 r_1) J_1(\alpha_2 r_1) - \right.$$

$$\left. - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} J_1(\alpha_1 r_1) J_0(\alpha_2 r_1) \right\};$$

$$A_3 = \frac{A_2 J_0(\alpha_2 r_2) + B_2 N_0(\alpha_2 r_2)}{J_0(\alpha_3 r_2) - \frac{J_0(\alpha_3 R)}{N_0(\alpha_3 R)} N_0(\alpha_3 r_2)}.$$

Система уравнений (2) приводит к первому соотношению между r_1 и r_2 :

Второе соотношение между r_1 и r_2 , полностью определяющее компоновку реактора, получается из рассмотрения уравнения (10) для $\tilde{\psi}_i$. Решение этого уравнения при условии $\tilde{\psi}_2(R) = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} 0 \leq r \leq r_1, \quad \tilde{\psi}_2 &= A_1 J_0(\alpha_1 r) + \\ &+ \Sigma_1 N_0(\alpha_1 r) - \frac{U_1 \psi_0}{\alpha_1^2}, \quad U_1 = U_{\max}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
 r_1 \leq r \leq r_2, \quad \tilde{\psi}_2 &= \Lambda_2 J_0(\alpha_2 r) + \\
 &+ \Sigma_2 N_0(\alpha_2 r) - \frac{U_2 \psi_0}{\alpha_2^2}, \quad U_2 = U_{\min}; \\
 r_2 \leq r \leq R, \quad \tilde{\psi}_2 &= \Lambda_3 \left[J_0(\alpha_3 r) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{J_0(\alpha_3 R)}{N_0(\alpha_3 R)} N_0(\alpha_3 r) \right] + \\
 &+ \frac{U_3 \psi_0}{\alpha_3^2} \left[\frac{N_0(\alpha_3 r)}{N_0(\alpha_3 R)} - 1 \right], \quad U_3 = U_{\max}.
 \end{aligned}$$

Зависимость постоянных $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Sigma_1, \Sigma_2$ от r_1 и r_2 определяется из условий «сшивки» функций $\tilde{\psi}_2$ и $d\tilde{\psi}_2/dr$ на границах $r = r_1$ и $r = r_2$ и условий переключения при $r = r_1$ и $r = r_2$: $\varphi(r_1) = \varphi(r_2) = 0$, т. е.

$$\tilde{\psi}_2(r_1) = \tilde{\psi}_2(r_2) = -\frac{\psi_0}{b};$$

$$\Lambda_3 = \psi_0 \frac{\frac{U_3}{\alpha_3^2} \left[1 - \frac{N_0(\alpha_3 r_2)}{N_0(\alpha_3 R)} \right] - \frac{1}{b}}{J_0(\alpha_3 r_2) - \frac{J_0(\alpha_3 R)}{N_0(\alpha_3 R)} N_0(\alpha_3 r_2)};$$

$$\Sigma_3 = \frac{-\Lambda_3 J_0(\alpha_3 R) + \frac{U_3 \psi_0}{\alpha_3^2}}{N_0(\alpha_3 R)};$$

$$\Lambda_2 = -\frac{2}{\pi \alpha_2 r_2} \left\{ \left(-\frac{\psi_0}{b} + \frac{U_2 \psi_0}{\alpha_2^2} \right) N_1(\alpha_2 r_2) - \right. \\ \left. - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} [\Lambda_3 J_1(\alpha_3 r_2) + \Sigma_3 N_1(\alpha_3 r_2)] N_0(\alpha_2 r_2) \right\};$$

$$\Sigma_2 = \frac{2}{\pi \alpha_2 r_2} \left\{ \left(-\frac{\psi_0}{b} + \frac{U_2 \psi_0}{\alpha_2^2} \right) J_1(\alpha_2 r_2) - \right. \\ \left. - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} [\Lambda_3 J_1(\alpha_3 r_2) + \Sigma_3 N_1(\alpha_3 r_2)] J_0(\alpha_2 r_2) \right\};$$

$$\Lambda_1 = -\frac{2}{\pi \alpha_1 r_1} \left\{ \left(\frac{U_1 \psi_0}{\alpha_1^2} - \frac{U_2 \psi_0}{\alpha_2^2} \right) N_1(\alpha_1 r_1) + \right. \\ \left. + [\Lambda_2 J_0(\alpha_2 r_1) + \Sigma_2 N_0(\alpha_2 r_1)] N_1(\alpha_1 r_1) - \right. \\ \left. - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} [\Lambda_2 J_1(\alpha_2 r_1) + \Sigma_2 N_1(\alpha_2 r_1)] N_0(\alpha_1 r_1) \right\};$$

$$\Sigma = \frac{2}{\pi \alpha_1 r_1} \left\{ \left(\frac{U_1 \psi_0}{\alpha_1^2} - \frac{U_2 \psi_0}{\alpha_2^2} \right) J_1(\alpha_1 r_1) + \right. \\ \left. + [\Lambda_2 J_0(\alpha_2 r_1) + \Sigma_2 N_0(\alpha_2 r_1)] J_1(\alpha_1 r_1) - \right. \\ \left. - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} [\Lambda_2 J_1(\alpha_2 r_1) + \Sigma_2 N_1(\alpha_2 r_1)] J_0(\alpha_1 r_1) \right\}.$$

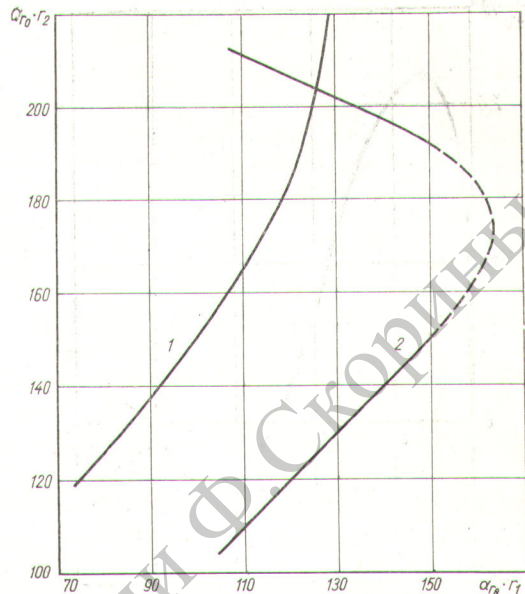


Рис. 1. Зависимость $r_2 = r_2(r_1)$:

1 — уравнение (12); 2 — уравнение (14).

Полученное соотношение между r_1 и r_2 имеет вид

$$\Lambda_1 J_0(\alpha_1 r_1) + \Sigma_1 N_0(\alpha_1 r_1) = -\frac{\psi_0}{b} + \frac{U_1 \psi_0}{\alpha_1^2}. \quad (14)$$

В качестве примера рассмотрим расчет при $\frac{U_{\max}}{U_0} = 1,118$ и $\frac{U_{\min}}{U_0} = 0,776$. На рис. 1 приведены зависимости $r_2 = r_2(r_1)$, определяемые уравнениями (12) и (14). Для конкретного расчета существенно, что функция $r_2 = r_2(r_1)$, найденная из уравнения (14), двужанна. Совместное решение уравнений (12) и (14) приводит к $r_1 = 1,26$ и $r_2 = 2,04$. Ниже даны значения постоянных, входящих в решения выражений (11) и (13):

A_2	B_2	A_3	$\frac{\Lambda_3}{10^5 \psi_0}$	$\frac{\Sigma_3}{10^5 \psi_0}$	$\frac{\Lambda_2}{10^5 \psi_0}$	$\frac{\Sigma_2}{10^5 \psi_0}$	$\frac{\Lambda_1}{10^5 \psi_0}$	$\frac{\Sigma_1}{10^5 \psi_0}$
0,828	1,083	1,307	8,3237	5,973	-0,2848	3,945	8,201	6,368

Протабулированные значения функции φ :

r	0,33	0,65	0,98	1,26	1,48	1,69	2,04	2,19	2,30	2,405
$-\frac{\varphi}{rx^{(1)}\psi_0}$	7,401	3,161	1,000	0	-0,366	-0,439	0	0,337	0,644	1,000

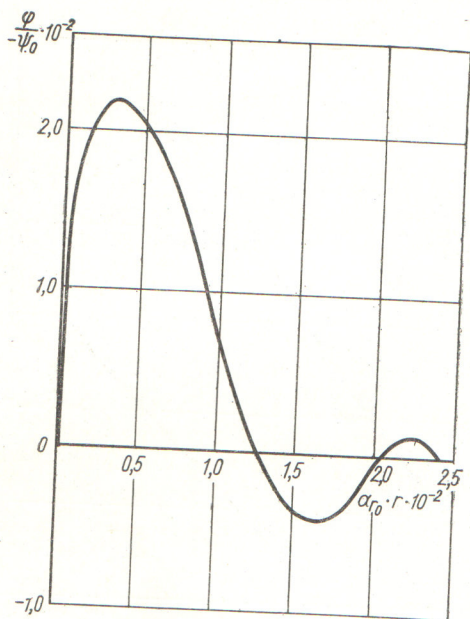


Рис. 2. График функции $\varphi(r)$.

На рис. 2 приведена функция $\varphi = \varphi(r)$, причем ясно, что вид этой функции обеспечивает максимум гамильтониана как функции U . Таким образом, выбранная выше компоновка оказывается оптимальной. Конкретный расчет показывает, что мощность при оптимальной компоновке выше, чем при равномерном распределении топлива по радиусу реактора $[\alpha_r^2(r) \equiv \alpha_{r0}^2; 0 \leq r \leq R]$, на 21%.

Замечание о роли бокового отражателя. Пусть реактор радиусом R окружен отражателем толщиной Δ ($R_1 \equiv R + \Delta$). Тогда при $r = R$ изменяются граничные условия: функции $x^{(2)}(R)$ и $x^{(1)}(R)$ связываются следующим образом [6]:

$$x^{(2)}(R) = \Psi x^{(1)}(R), \quad (15)$$

где

$$\Psi = \frac{\xi \left[K_1(\xi R) + \frac{K_0(\xi R_1)}{I_0(\xi R_1)} I_1(\xi R) \right]}{K_0(\xi R) - \frac{K_0(\xi R_1)}{I_0(\xi R_1)} I_0(\xi R)};$$

$$\xi = \sqrt{\frac{1}{L^2} + \alpha_z^2}$$

(L^2 — квадрат длины диффузии в отражателе).

Таким образом, в пространстве $x^{(1)}, x^{(2)}$ при $r = R$ многообразие S_1 задано параметрическим образом (с параметром $x^{(1)}$):

$$S_1 = \{x^{(1)}, \Psi x^{(1)}\}. \quad (16)$$

Вектор θ , лежащий в плоскости T_1 , касательной к многообразию S_1 , равен

$$\theta = \{1, \Psi\}, \quad (17)$$

а условие трансверсальности имеет вид

$$\theta \Psi = \Psi_1 + \Psi \Psi_2 = 0. \quad (18)$$

Таким образом, граничные условия при $r = R$ задаются соотношениями (15) и (18). Эти соотношения таковы, что, вообще говоря, при $\Psi > 0$ не требуется, чтобы $\varphi(R) > 0$, т. е. при $r \rightarrow R$ возможна и зона с $U(r) = U_{\min}$ и оптимальная компоновка реактора имеет вид $U(r) = U_{\max}$ при $0 \leq r \leq \rho$; $U(r) = U_{\min}$ при $\rho \leq r \leq R$. Имеются только две активные зоны (с $\alpha_r^2 > 0$), а роль третьей играет отражатель.

Таким образом, рассмотрение одногрупповой задачи на максимум мощности энергетического реактора с газовым охлаждением с помощью принципа максимума Л. С. Понтрягина, показывает следующее:

1. Реактор может состоять только из зон с максимальным и минимальным значениями управления, т. е. минимальным и максимальным значениями материальных параметров.
2. Двухзонный реактор без отражателя не является оптимальным. Оптимальным в этом случае является трехзонный реактор с компоновкой $U = U_{\max}$ при $0 \leq r \leq r_1$; $U = U_{\min}$ при $r_1 \leq r \leq r_2$ и $U = U_{\max}$ при $r_2 \leq r \leq R$. В рассмотренном примере выигрыш в мощности (по сравнению с равномерной загрузкой реактора) составляет 21%.
3. Для реактора с отражателем при $\Psi > 0$ оптимальной может оказаться двухзонная компоновка: центральная зона с $U = U_{\max}$; периферийная с $U = U_{\min}$.

Поступила в Редакцию 29/X 1966 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Понтрягин и др. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.
2. Т. С. Зарицкая, А. П. Рудик. «Атомная энергия», 22, 6 (1967).
3. Б. П. Рочуров, А. П. Рудик. «Атомная энергия», 22, 40 (1967).
4. А. И. Алиханов и др. «Атомная энергия», № 1, 5 (1956).
5. Ю. Г. Абов, В. Ф. Белкин, П. А. Крупчицкий. «Атомная энергия», 12, 156 (1962).
6. А. Д. Галанин. Теория ядерных реакторов на тепловых нейтронах. М., Атомиздат, 1957, стр. 56.