

О методе решения уравнений кинетики реактора

А. И. КУЛЕШОВ

УДК 621.039.514

Рассмотрим систему уравнений кинетики в обычной записи [1] с шестью группами запаздывающих нейтронов

$$\left. \begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= \frac{k(t)(1-\beta)-1}{l} n + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i, \\ \frac{dc_i}{dt} &= -\lambda_i c_i + \frac{\beta_i k(t)}{l} n \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$\left. \begin{aligned} n|_{t=0} &= n_0, \\ c_i|_{t=0} &= c_{i0}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Требуется найти n и c_i на интервале

$$0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

Если искать решение задачи (1) — (3) на каждом частичном интервале $\Delta t \ll T$ в виде разложений

$$\left. \begin{aligned} n(t) &= A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots, \\ c_i(t) &= B_{i0} + B_{i1} t + B_{i2} t^2 + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

то получение или непосредственное использование выражений (4) для нахождения величин $n(t)$ и $c_i(t)$ затруднительно, так как из-за малых значений характеристического числа l/β коэффициенты A_s и B_{is} на начальных отрезках разложений (4) сильно увеличиваются с ростом индекса s и могут выходить за разрядную сетку слова ЭВМ, кроме того, ряды (4) сходятся медленно.

Известно, что для суммирования плохо сходящихся рядов с успехом применяются непрерывные дроби [2]. В данном случае ряды (4) преобразуем в непрерывные дроби вида

$$n(t) = \frac{A_0}{1 - \frac{a_1 t}{1 - \frac{a_2 t}{1 - \dots}}} \quad c_i(t) = \frac{B_{i0}}{1 - \frac{b_{i1} t}{1 - \frac{b_{i2} t}{1 - \dots}}} \quad (5)$$

где a_s и b_{is} определяются по правилам ромба [2]. Эти правила можно выразить удобной для программирования рекуррентной формулой

$$e_{s+2}^{(v)} \psi_{(-1)} s e_{s+1}^{(v)} = e_{s+1}^{(v+1)} \psi_{(-1)} s e_s^{(v+1)} \quad (6)$$

$$(s, v = 0, 1, \dots),$$

где ψ_1, ψ_{-1} — арифметические операции сложения и умножения соответственно.

Начальными условиями для формулы (6) будут

$$e_0^{(v)} = 0; e_1^{(v)} = \mu_{v+1} \quad (v = 0, 1, \dots).$$

Тогда элементы непрерывной дроби, соответствующей величине $n(t)$, определяются из соотношений

$$a_s = e_s^{(0)} \quad (s = 1, 2, \dots).$$

Аналогично для определения элементов b_{is} применим формулу (6) при начальных условиях

$$e_0^{(v)} = 0; e_1^{(v)} = \theta_{iv+1} \quad (v = 0, 1, \dots).$$

Получим

$$b_{is} = e_s^{(0)} \quad (s = 1, 2, \dots).$$

Величины μ_s, θ_{is} определяются с помощью системы рекуррентных формул, полученных элементарной обработкой системы (1):

$$\mu_{s+1} = \frac{p + p'/\mu_s + \frac{1}{2!} p''/\mu_s/\mu_{s-1} + \dots + \sum \lambda_i \theta_{is}}{s+1},$$

$$\theta_{is+1} = \frac{-\lambda_i \theta_{is} + \beta_i \left(q + q'/\mu_s + \frac{1}{2!} q''/\mu_s/\mu_{s-1} + \dots \right)}{(s+1) \mu_{s+1}}, \quad (7)$$

$$\theta_{is+1} = \mu_{s+1} \frac{\theta_{is+1}}{\theta_{is}} \quad (s = 0, 1, \dots)$$

при начальных условиях

$$\mu_{s \leq 0} = \infty, \quad \theta_{i0} = B_{i0}/A_0, \quad (8)$$

где

$$p = \frac{k(t)(1-\beta)-1}{l}, \quad q = \frac{k(t)}{l}.$$

Таким образом, решение задачи (1) — (3) можно получить в виде системы дробей (5), элементы которых вычисляются с помощью простых рекуррентных формул (6), (7) и начальных условий (8).

Была решена система уравнений кинетики реактора в случае периодического мгновенного изменения мощности источника

$$s^{(j)} = s_0 \delta(t - j\Delta T)$$

с коэффициентом размножения нейтронов, заданным полиномом $k(t) = p_m(t)$, когда формулы (7) имеют особенно простой вид. Эта задача с источником сводится к задаче (1) — (3) на каждом отрезке длиной ΔT .

Задача решалась на ЭВМ с помощью двух программ. Одна из них основана на разновидности схемы интегрального типа [3], другая — на методе непрерывных дробей. Сравнение показало, что решение задачи по второй программе проводится в пять раз быстрее при

сохранении заданной точности счета. В обеих программах используется пошаговый процесс счета с автоматическим выбором шага Δt . Указанный метод позволяет вести расчет с гораздо большим коэффициентом скорости счета, чем указано выше, если длина отрезка непрерывной дроби будет достаточно велика, а элементы дроби достаточно точны.

Очевидно, этот метод можно применять и в тех случаях, когда $k(t)$ задается более сложным аналитическим выражением по сравнению с рассматриваемым в примере. Но тогда, возможно, в программу придется ввести автоматизацию аналитического дифференцирования алгебраических выражений [4].

Поступило в Редакцию 7/XII 1970 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Ж. Герцель. Материалы КАЭ США. Ядерные реакторы. Т. I. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
2. Г. Рутисхаузер. Алгоритм частных и разностей. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
3. Е. Коэн. II Женевская конференция (1958). Т. 3. М., Атомиздат, 1959, стр. 549.
4. А. И. Кулешов. «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», вып. 6, 1137 (1966).

Об одной особенности решения конечно-разностного уравнения Больцмана

УДК 621.039.512

Г. Я. РУМЯНЦЕВ

Аналитические методы теории переноса нейтронов (например, метод элементарных решений Кейса [1]) успешно используются для исследования точного уравнения переноса. Однако различные численные методы, получившие сейчас весьма широкое распространение, основываются на уравнении Больцмана в приближенной, конечно-разностной форме. На наш взгляд, интересно применить аналитический подход и к решению конечно-разностных аналогов уравнения Больцмана. В частности, известный метод дискретных ординат [2, 3] можно привести в качестве примера аналитического решения уравнения Больцмана в плоской геометрии, когда дискретно аппроксимируется зависимость функции распределения от угловой переменной μ при сохранении непрерывной зависимости от пространственной координаты x .

Ниже рассмотрен случай, когда зависимость от x дискретна, а от μ — непрерывна или какая угодно (моноэнергетическая задача при изотропном рассеянии).

Разбив ось x на равные интервалы Δx и обозначив $F(x_i, \mu) \equiv F_i(\mu)$, предположим, что между двумя точками x_{i-1} и x_i функция $F(x, \mu)$ линейна. Тогда уравнение Больцмана, усредненное на каждом интервале, примет вид

$$\left(\mu + \frac{\Delta x}{2}\right) F_i - \left(\mu - \frac{\Delta x}{2}\right) F_{i-1} = \frac{c\Delta x}{4} (F_i + F_{i-1}), \quad (1)$$

где

$$F_i = \int_{-1}^1 F_i(\mu) d\mu.$$

Определим элементарные решения уравнения (1) по Кейсу:

$$F_i(\mu, \nu) = \Psi(\mu, \nu) \Phi_i(\nu) \quad (2)$$

при нормировке

$$\int_{-1}^1 \Psi(\mu, \nu) d\mu = 1.$$

Функцию $\Phi_i(\nu)$ следует искать в виде

$$\Phi_i(\nu) = \left(\frac{\nu - \Delta x/2}{\nu + \Delta x/2}\right)^i, \quad (3)$$

который является конечно-разностным аналогом экспоненты $e^{-x/\nu}$.

Подставив выражения (2) и (3) в уравнение (1), получим

$$\Psi(\mu, \nu) = \begin{cases} \frac{c\nu}{2(\nu - \mu)} + \left(1 - \frac{c\nu}{2} \ln \frac{1+\nu}{1-\nu}\right) \delta(\nu - \mu), \\ \nu \in (-1, 1); \\ \frac{c\nu_0}{2(\nu_0 - \mu)}, \end{cases} \quad (4)$$

где ν_0 — корни уравнения

$$1 - \frac{c\nu_0}{2} \ln \frac{\nu_0 + 1}{\nu_0 - 1} = 0. \quad (5)$$

Таким образом, функция $\Psi(\mu, \nu)$ оказалась точной и независимой от величины Δx .

Общее решение уравнения (1) является суперпозицией всех его элементарных решений:

$$\Phi_i = A \left(\frac{\nu_0 - \Delta x/2}{\nu_0 + \Delta x/2}\right)^i + B \left(\frac{\nu_0 - \Delta x/2}{\nu_0 + \Delta x/2}\right)^{-i} + \int_{-1}^1 C(\nu) \left(\frac{\nu - \Delta x/2}{\nu + \Delta x/2}\right)^i d\nu, \quad (6)$$

где второе слагаемое соответствует корню $-\nu_0$. Формула для $F_i(\mu)$ будет иметь вид

$$F_i(\mu) = A\Psi(\mu, \nu_0) \left(\frac{\nu_0 - \Delta x/2}{\nu_0 + \Delta x/2}\right)^i + B\Psi(\mu, -\nu_0) \left(\frac{\nu_0 - \Delta x/2}{\nu_0 + \Delta x/2}\right)^{-i} + \int_{-1}^1 C(\nu) \Psi(\mu, \nu) \left(\frac{\nu - \Delta x/2}{\nu + \Delta x/2}\right)^i d\nu. \quad (7)$$