Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (96), 2016

УДК 512.548

Центроиды многоугольников и самосовмещение элементов *n*-арных групп

Д.И. Кирилюк

Исследуются многоугольники *n*-арной группы. Устанавливаются связи между понятием центроида и самосовмещения произвольной точки *n*-арной группы относительно элементов последовательности вершин многоугольника *G*.
Ключевые слова: *n*-арная группа, треугольник *G*, шестиугольник *G*, вектор *G*, центроид.

The polygons of *n*-ary groups are investigated. Connection between the concept of centroid and self-returing of any point of *n*-ary group concerning elements of sequence of tops of a polygon *G* is established.
Keywords: *n*-ary group, triangle *G*, hexagon *G*, vector *G*, centroid.

Введение. В начале XXI-го века активизировалось развитие полиадических алгебраических систем, об этом свидетельствует возросшее число работ (см., например, [1–7]). Такое положение связано, на наш взгляд, с тем, что теория *n*-арных групп находит приложения в различных областях знаний, в частности в аффинной геометрии. Впервые элементы аффинной геометрии на тернарной группе были построены Д. Вакареловым [8]. Отметим, что для произвольного $n \geq 2$ С.А. Русаков в [9] построил аффинное пространство *W(G)* методом фундаментальных последовательностей векторов полуабелевой *n*-арной *rs*-группы *G* и доказал изоморфное вложение всякой абелевой *n*-арной *rs*-группы *G* в абелеву *n*-арную группу, построенную на множестве *W(G)*. Эти исследования были углублены и развиты в работах Ю.И. Кулаженко [10]. Также им было предложено новое направление исследований полиадических операций – самосовмещение элементов *n*-арных групп.

Представляемая статья примыкает к указанной области исследований *n*-арных групп, в частности установлены связи между центроидом двух треугольников *G* и самосовмещением произвольной точка $p \in G$ относительно элементов последовательности вершин шестиугольника *G* (теорема 1), в теоремах 3 получены условия нахождения центроида шестиугольника *G*.

Предварительные понятия и результаты. В теоретической механике центроидом однородного *n*-угольника называют точку *M*, для которой справедливо равенство

$$\overrightarrow{MR_1} + \overrightarrow{MR_2} + \ldots + \overrightarrow{MR_n} = \vec{0},$$

где $R_1, R_2, \ldots, R_n$ – вершины *n*-угольника.

По аналогии вводится следующее определение.

Определение 1. *Центроидом k-угольника* $< a_1, a_2, \ldots, a_k >$ *n-арной группы G назовем точку x из G, которая удовлетворяет следующему равенству*

$$\overrightarrow{xa_1} + \overrightarrow{xa_2} + \ldots + \overrightarrow{xa_k} = \vec{0}.$$

Определения и обозначения, принятые в теории *n*-арных групп, можно найти в [9], [10]. Напомним некоторые из них.

Определение 2 [9]. *Упорядоченная пара* $< a, b >$ *точек* $a, b \in G$ *называется направленным отрезком* G *и обозначается через* $\overline{ab}$.

Определение 3 [9]. *Пишут* $\overline{ab} = \overline{cd}$ *и говорят, что направленные отрезки* $\overline{ab}$ *и* $\overline{cd}$ *G равны, если четырехугольник* $< a, c, d, b >$ *является параллелограммом G.*

Пусть *V* – множество всех направленных отрезков *G.*

Это отношение «=» разбивает множество *V* на классы эквивалентности (см. [2]).

Определение 4 [9]. *Если* $\overline{ab} \in V$, *то множество* $\{ \overline{uv} \mid \overline{uv} \in V, \overline{uv} = \overline{ab} \}$ *называют вектором* G *и обозначают через* $\overrightarrow{ab}$, *или одной малой буквой латинского алфавита; например,* $\overrightarrow{ab} = \vec{p}$. *Через* $V(G)$ *обозначают множество всех векторов* G.

Определение 5 [9]. *Два вектора* $\vec{p}=\overrightarrow{ab}$ *и* $\vec{q}=\overrightarrow{cd}$ *из* $V(G)$ *называют равными и пишут* $\vec{p}=\vec{q}$, *если их представители* $\overline{ab}$ *и* $\overline{cd}$ *равны.*

Определение 6 [9]. *Пусть* G *– n-арная группа,* $\vec{p}$ *и* $\vec{q}\in V(G)$ *и* $a\in G$. *Если* $\overrightarrow{ab}$ *и* $\overrightarrow{bc}$ *такие векторы, что* $\vec{p}=\overrightarrow{ab}$ *и* $\vec{q}=\overrightarrow{bc}$, *то суммой векторов* $\vec{p}$ *и* $\vec{q}$ *называют вектор из* $V(G)$, *обозначаемый через* $\vec{p}+\vec{q}$ *и определяемый так:* $\vec{p}+\vec{q}=\overrightarrow{ac}$ *или* $\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{bc}=\overrightarrow{ac}$.

Определение 7 [9]. *Пусть* G *– n-арная группа. Последовательность* $e_1^{k(n-1)}\in G^{k(n-1)}$, *где* $k\geq 1$ *называют нейтральной k(n–1)-последовательностью G, если* $[e_1^{k(n-1)}u]=u=[ue_1^{k(n-1)}]$ *для любого элемента* $u\in G$.

Определение 8 [10]. *Говорят, что точка* p *самосовмещается относительно элементов последовательности* $<a_1,\ldots,a_k>$, *если*

$$S_{a_k}(\ldots(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))\ldots)=p,$$

где $p\in A$, $a_1^k\in A^k$.

Определение 9 [10]. *n-Арную группу G называют полуабелевой, если для любой последовательности* $x_1,x_2,\ldots,x_n\in G$ *справедливо равенство*

$$[x_1x_2\ldots x_{n-1}x_n]=[x_nx_2\ldots x_{n-1}x_1].$$

Лемма 1. [10] *Пусть* G *– произвольная n-арная группа.* G *будет полуабелевой тогда и только тогда, когда для любых точек* a,b,c,d *из* G *справедливо равенство*

$$\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{cd}=\overrightarrow{ad}+\overrightarrow{cb}.$$

Установим справедливость следующей леммы.

Лемма 2. *Пусть* G *– полуабелева n-арная группа,* $a_1,a_2,\ldots,a_6$ *– произвольные точки из* G $(k\in N)$. *Произвольная точка* $p\in G$ *самосовмещается относительно элементов последовательности вершин шестиугольника* $<a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6>$, *тогда и только тогда, когда справедливо равенство*

$$a_6=[[a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\,a_3]a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\,a_5].$$

Доказательство. 1. Пусть произвольная точка $p\in G$ самосовмещается относительно элементов последовательности вершин шестиугольника $G<a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6>$, , т. е. справедливо равенство

$$S_{a_1}(S_{a_2}(S_{a_3}(S_{a_4}(S_{a_5}(S_{a_6}(p))))))=p,$$

которое в силу определения симметричных точек справедливо следующему

$$[a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\,a_3a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\,a_5a_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\,pa_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\,a_5a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\,a_3a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\,a_1]=p. \tag{1}$$

С учетом определений 4 и 5, перепишем (1) в следующем виде

$$\overrightarrow{p[a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\,a_3a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\,a_5a_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\,pa_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\,a_5a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\,a_3a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\,a_1]}=\vec{0}.$$

С учетом определения 6 имеем

$$\overrightarrow{pa_1}+\overrightarrow{a_2[a_3a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\,a_5a_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\,pa_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\,a_5a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\,a_3a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\,a_1]}=\vec{0},$$

$$\overrightarrow{pa_1}+\overrightarrow{a_2a_3}+\overrightarrow{a_4[a_5a_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\,pa_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\,a_5a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\,a_3a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\,a_1]}=\vec{0},$$

$$\ldots$$

$$\overrightarrow{pa_1}+\overrightarrow{a_2a_3}+\overrightarrow{a_4a_5}+\overrightarrow{a_6p}+\overrightarrow{a_6a_5}+\overrightarrow{a_4a_3}+\overrightarrow{a_2a_1}=\vec{0}.$$

Так как G – полуабелева, то, учитывая определение 6, получаем

$$\overrightarrow{a_6p}+\overrightarrow{pa_1}+\overrightarrow{a_2a_3}+\overrightarrow{a_4a_5}+\overrightarrow{a_6a_5}+\overrightarrow{a_4a_3}+\overrightarrow{a_2a_1}=\vec{0},$$

$$\overrightarrow{a_6a_1}+\overrightarrow{a_2a_3}+\overrightarrow{a_4a_5}+\overrightarrow{a_6a_5}+\overrightarrow{a_4a_3}+\overrightarrow{a_2a_1}=\vec{0},$$

$$\overrightarrow{a_6a_1}+\overrightarrow{a_6a_5}+\overrightarrow{a_2a_1}+\overrightarrow{a_2a_3}+\overrightarrow{a_4a_5}+\overrightarrow{a_4a_3}=\vec{0}.$$

Применяя лемму 1 к полученному равенству, имеем

$$\overrightarrow{a_6a_1} + \ \overrightarrow{a_6a_1} + \overrightarrow{a_2a_5} \ + \ \overrightarrow{a_2a_5} + \overrightarrow{a_4a_3} \ + \overrightarrow{a_4a_3} = \vec{0},$$

$$\overrightarrow{a_6a_1} + \overrightarrow{a_6a_1} + \overrightarrow{a_2a_5} + \overrightarrow{a_2a_5} + \overrightarrow{a_4a_3} + \overrightarrow{a_4a_3} = \vec{0},$$

$$2\overrightarrow{a_6a_1} + 2\overrightarrow{a_2a_5} + 2\overrightarrow{a_4a_3} = \vec{0},$$

$$2 \ \ \overrightarrow{a_6a_1} + \overrightarrow{a_2a_5} + \overrightarrow{a_4a_3} \ \ = \vec{0}.$$

Разделим левую и правую части полученного равенства на 2. Получим

$$\overrightarrow{a_6a_1} + \overrightarrow{a_2a_5} + \overrightarrow{a_4a_3} = \vec{0},$$

что равносильно следующим

$$\overrightarrow{a_6[a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\ a_5]} + \overrightarrow{a_4a_3} = \vec{0},$$

$$\overrightarrow{a_6[a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\ a_5a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\ a_3]} = \vec{0}.$$

Из полученного равенства, с учетом определения 5, вытекает справедливость равенства

$$a_6 = [a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\ a_5a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\ a_3].$$

2. Пусть теперь справедливо равенство

$$a_6 = [[a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\ a_3]a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\ a_5]. \qquad (2)$$

Умножим левую и правую части равенства (2) справа на $a_5^{[-2]}\overset{2n-4}{a_5}\ a_4a_3^{[-2]}\overset{2n-4}{a_3}\ a_2$. С учетом нейтральности последовательностей $g^{[-2]}\overset{2n-4}{g}\ g$ для любого $g \in G$, имеем

$$[a_6a_5^{[-2]}\overset{2n-4}{a_5}\ a_4a_3^{[-2]}\overset{2n-4}{a_3}\ a_2] = [a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\ a_3a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\ [a_5a_5^{[-2]}\overset{2n-4}{a_5}\ a_4]a_3^{[-2]}\overset{2n-4}{a_3}\ a_2],$$

$$[a_6a_5^{[-2]}\overset{2n-4}{a_5}\ a_4a_3^{[-2]}\overset{2n-4}{a_3}\ a_2] = [a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\ [a_3a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\ a_4]a_3^{[-2]}\overset{2n-4}{a_3}\ a_2],$$

$$[a_6a_5^{[-2]}\overset{2n-4}{a_5}\ a_4a_3^{[-2]}\overset{2n-4}{a_3}\ a_2] = [a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\ [a_3a_3^{[-2]}\overset{2n-4}{a_3}\ a_2]],$$

$$[a_6a_5^{[-2]}\overset{2n-4}{a_5}\ a_4a_3^{[-2]}\overset{2n-4}{a_3}\ a_2] = a_1.$$

С учетом определения симметричных точек, рассмотрим выражение

$$S_{a_1}(S_{a_2}(S_{a_3}(S_{a_4}(S_{a_5}(S_{a_6}(p)))))) =$$
$$= [a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\ a_3a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\ a_5a_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\ pa_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\ a_5a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\ a_3a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\ a_1] \qquad (3)$$

Подставим (2) в (3). С учетом полуабелевости и нейтральности последовательностей, получим

$$[[a_6a_5^{[-2]}\overset{2n-4}{a_5}\ a_4a_3^{[-2]}\overset{2n-4}{a_3}\ a_2]a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\ a_3a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\ a_5a_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\ pa_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\ a_5a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\ a_3a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\ a_1] =$$

$$= [a_6a_5^{[-2]}\overset{2n-4}{a_5}\ a_4a_3^{[-2]}\overset{2n-4}{a_3}\ [a_2a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\ a_3]a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\ a_5a_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\ pa_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\ a_5a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\ a_3a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\ a_1] =$$

$$= [a_6a_5^{[-2]}\overset{2n-4}{a_5}\ [a_4a_3^{[-2]}\overset{2n-4}{a_3}\ a_3]a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\ a_5a_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\ pa_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\ a_5a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\ a_3a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\ a_1] =$$

$$= [a_6a_5^{[-2]}\overset{2n-4}{a_5}\ [a_4a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\ a_5]a_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\ pa_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\ a_5a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\ a_3a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\ a_1] =$$

$$= [[[a_6a_5^{[-2]}\overset{2n-4}{a_5}\ a_5]a_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\ p]a_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\ a_5a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\ a_3a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\ a_1] =$$

$$= [pa_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\ a_5a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\ a_3a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\ a_1] =$$

$$= [pa_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\ a_5a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\ a_3a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\ [a_6a_5^{[-2]}\overset{2n-4}{a_5}\ a_4a_3^{[-2]}\overset{2n-4}{a_3}\ a_2]] =$$

$$= [pa_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\ a_5a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\ a_3a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\ [a_2a_5^{[-2]}\overset{2n-4}{a_5}\ a_4a_3^{[-2]}\overset{2n-4}{a_3}\ a_6]] =$$

$$= [pa_6^{[-2]}\overset{2n-4}{a_6}\ a_5a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\ [a_3a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\ a_2a_5^{[-2]}\overset{2n-4}{a_5}\ a_4]a_3^{[-2]}\overset{2n-4}{a_3}\ a_6] =$$

$$= [pa_6^{[-2]} \overset{2n-4}{a_6}\, a_5 a_4^{[-2]} \overset{2n-4}{a_4}\, [a_4 a_2^{[-2]} \overset{2n-4}{a_2}\, a_2 a_5^{[-2]} \overset{2n-4}{a_5}\, a_3] a_3^{[-2]} \overset{2n-4}{a_3}\, a_6] =$$

$$= [pa_6^{[-2]} \overset{2n-4}{a_6}\, [a_5 a_4^{[-2]} \overset{2n-4}{a_4}\, [a_4 a_2^{[-2]} \overset{2n-4}{a_2}\, a_2]] a_5^{[-2]} \overset{2n-4}{a_5}\, a_3 a_3^{[-2]} \overset{2n-4}{a_3}\, a_6] =$$

$$= [pa_6^{[-2]} \overset{2n-4}{a_6}\, [a_5 a_5^{[-2]} \overset{2n-4}{a_5}\, a_3] a_3^{[-2]} \overset{2n-4}{a_3}\, a_6] =$$

$$= [pa_6^{[-2]} \overset{2n-4}{a_6}\, [a_3 a_3^{[-2]} \overset{2n-4}{a_3}\, a_6]] = [pa_6^{[-2]} \overset{2n-4}{a_6}\, a_6] = p. \qquad (4)$$

Из преобразований (2)–(4) следует, что произвольная точка $p \in G$ самосовмещается относительно элементов последовательности вершин шестиугольника $< a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 >$.

Лемма доказана.

Основные результаты.

Теорема 1. *Пусть* G *полуабелева n-арная группа,* $a_1, a_2, \ldots, a_6$ *– произвольные точки из* G. *Если точка* x *– центроид треугольников* $< a_1, a_3, a_5 >$ и $< a_2, a_4, a_6 >$, *то произвольная точка* $p \in G$ *самосовмещается относительно элементов последовательности вершин шестиугольника* $< a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 >$, *т. е. справедливо равенство*

$$S_{a_1}(S_{a_2}(S_{a_3}(S_{a_4}(S_{a_5}(S_{a_6}(p)))))) = p.$$

Доказательство. Так как x – центроид треугольника $< a_1, a_3, a_5 >$, то по определению 1 справедливо равенство

$$\overrightarrow{xa_1} + \overrightarrow{xa_3} + \overrightarrow{xa_5} = \vec{0}. \qquad (5)$$

А так как x является центроидом треугольника $< a_2, a_4, a_6 >$, то по определению 1 имеем

$$\overrightarrow{xa_2} + \overrightarrow{xa_4} + \overrightarrow{xa_6} = \vec{0}. \qquad (6)$$

Умножим левую и правую части равенства (5) на (–1), получаем

$$-\overrightarrow{xa_1} - \overrightarrow{xa_3} - \overrightarrow{xa_5} = \vec{0},$$

$$\overrightarrow{a_1x} + \overrightarrow{a_3x} + \overrightarrow{a_5x} = \vec{0}.$$

Из полученного равенства на основании определения 6 вытекает

$$\overrightarrow{a_1[xa_3^{[-2]} \overset{2n-4}{a_3}\, xa_5^{[-2]} \overset{2n-4}{a_5}\, x]} = \vec{0},$$

что по определению 5 равносильно следующему равенству

$$a_1 = [xa_3^{[-2]} \overset{2n-4}{a_3}\, xa_5^{[-2]} \overset{2n-4}{a_5}\, x]. \qquad (7)$$

Аналогично из (6) следует

$$a_2 = [xa_4^{[-2]} \overset{2n-4}{a_4}\, xa_6^{[-2]} \overset{2n-4}{a_6}\, x]. \qquad (8)$$

Рассмотрим выражение вида

$$[a_1 a_2^{[-2]} \overset{2n-4}{a_2}\, a_3 a_4^{[-2]} \overset{2n-4}{a_4}\, a_5]. \qquad (9)$$

Подставим значения a_1 из (7) в (9). С учетом полуабелевости G и нейтральности последовательностей $g^{[-2]} \overset{2n-4}{g}\, g$ для любого $g \in G$, получим

$$[a_1 a_2^{[-2]} \overset{2n-4}{a_2}\, a_3 a_4^{[-2]} \overset{2n-4}{a_4}\, a_5] = [[xa_3^{[-2]} \overset{2n-4}{a_3}\, xa_5^{[-2]} \overset{2n-4}{a_5}\, x] a_2^{[-2]} \overset{2n-4}{a_2}\, a_3 a_4^{[-2]} \overset{2n-4}{a_4}\, a_5] =$$

$$= [xa_3^{[-2]} \overset{2n-4}{a_3}\, xa_5^{[-2]} \overset{2n-4}{a_5}\, [a_3 a_2^{[-2]} \overset{2n-4}{a_2}\, x] a_4^{[-2]} \overset{2n-4}{a_4}\, a_5] = [xa_3^{[-2]} \overset{2n-4}{a_3}\, [xa_5^{[-2]} \overset{2n-4}{a_5}\, a_3] a_2^{[-2]} \overset{2n-4}{a_2}\, [xa_4^{[-2]} \overset{2n-4}{a_4}\, a_5]] =$$

$$= [[xa_3^{[-2]} \overset{2n-4}{a_3}\, a_3] a_5^{[-2]} \overset{2n-4}{a_5}\, [xa_2^{[-2]} \overset{2n-4}{a_2}\, a_5] a_4^{[-2]} \overset{2n-4}{a_4}\, x] = [[xa_5^{[-2]} \overset{2n-4}{a_5}\, a_5] a_2^{[-2]} \overset{2n-4}{a_2}\, xa_4^{[-2]} \overset{2n-4}{a_4}\, x] =$$

$$= [xa_2^{[-2]} \overset{2n-4}{a_2}\, xa_4^{[-2]} \overset{2n-4}{a_4}\, x]. \qquad (10)$$

Подставим значения a_2 из (8) в выражение (10). С учетом полуабелевости G и нейтральности последовательностей, имеем

$$[xa_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\,xa_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\,x]=[[xx^{[-2]}\overset{2n-4}{x}\,a_6]x^{[-2]}\overset{2n-4}{x}\,[a_4x^{[-2]}\overset{2n-4}{x}\,x]a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\,x]=$$
$$=[a_6x^{[-2]}\overset{2n-4}{x}\,[a_4a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\,x]]=[a_6x^{[-2]}\overset{2n-4}{x}\,x]=a_6. \qquad (11)$$

Из преобразований (10)–(11) следует справедливость равенства

$$[a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\,a_3a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\,a_5]=a_6.$$

Из полученного равенства на основании леммы 2 следует, что произвольная точка $p\in G$ самосовмещается относительно элементов последовательности вершин шестиугольника $<a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6>$, т.е. справедливо равенство

$$S_{a_1}(S_{a_2}(S_{a_3}(S_{a_4}(S_{a_5}(S_{a_6}(p))))))=p.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть G полуабелева n-арная группа, $a_1,a_2,\ldots,a_6$ – произвольные точки из G. Если произвольная точка $p\in G$ самосовмещается относительно элементов последовательности вершин шестиугольника $<a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6>$, и точка x является центроидом одного из треугольников G: $<a_1,a_3,a_5>$ или $<a_2,a_4,a_6>$, то x – центроид шестиугольника $<a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6>$.*

*Доказательство.*1. Пусть x – центроид треугольника $<a_1,a_3,a_5>$, то по определению 1 справедливо равенство

$$\overrightarrow{xa_1}+\overrightarrow{xa_3}+\overrightarrow{xa_5}=\vec{0}. \qquad (12)$$

Рассмотрим следующее выражение

$$\overrightarrow{xa_1}+\overrightarrow{xa_2}+\overrightarrow{xa_3}+\overrightarrow{xa_4}+\overrightarrow{xa_5}+\overrightarrow{xa_6}. \qquad (13)$$

С учетом равенства (12), полуабелевости G, перепишем (13) следующим образом

$$\overrightarrow{xa_1}+\overrightarrow{xa_2}+\overrightarrow{xa_3}+\overrightarrow{xa_4}+\overrightarrow{xa_5}+\overrightarrow{xa_6}=\left(\overrightarrow{xa_1}+\overrightarrow{xa_3}+\overrightarrow{xa_5}\right)+\overrightarrow{xa_2}+\overrightarrow{xa_4}+\overrightarrow{xa_6}=$$
$$=\overrightarrow{xa_2}+\overrightarrow{xa_4}+\overrightarrow{xa_6}. \qquad (14)$$

Так как произвольная точка $p\in G$ самосовмещается относительно элементов последовательности вершин шестиугольника $<a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6>$, то согласно лемме 2 справедливо равенство

$$a_6=[a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\,a_3a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\,a_5]. \qquad (15)$$

Подставим (15) в выражение (14), с учетом определения 5, полуабелевости G, леммы 1 и равенства (12), получим

$$\overrightarrow{xa_2}+\overrightarrow{xa_4}+\overrightarrow{xa_6}=\overrightarrow{xa_2}+\overrightarrow{xa_4}+\overrightarrow{x[a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\,a_3a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\,a_5]}=$$
$$=\overrightarrow{xa_2}+\overrightarrow{xa_4}+\overrightarrow{xa_1}+\overrightarrow{a_2[a_3a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\,a_5]}=\overrightarrow{xa_2}+\overrightarrow{xa_4}+\overrightarrow{xa_1}+\overrightarrow{a_2a_3}+\overrightarrow{a_4a_5}=$$
$$=\left(\overrightarrow{xa_2}+\overrightarrow{a_2a_3}\right)+\left(\overrightarrow{xa_4}+\overrightarrow{a_4a_5}\right)+\overrightarrow{xa_1}=\left(\overrightarrow{xa_3}+\overrightarrow{a_2a_2}\right)+\left(\overrightarrow{xa_5}+\overrightarrow{a_4a_4}\right)+\overrightarrow{xa_1}=$$
$$\overrightarrow{xa_3}+\overrightarrow{xa_5}+\overrightarrow{xa_1}=\vec{0}. \qquad (16)$$

Из (13)–(16) следует, что x – центроид шестиугольника $<a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6>$.

2. Пусть x – центроид треугольника $<a_2,a_4,a_6>$, то по определению 1 имеем

$$\overrightarrow{xa_2}+\overrightarrow{xa_4}+\overrightarrow{xa_6}=\vec{0}. \qquad (17)$$

Так как произвольная точка $p\in G$ самосовмещается относительно элементов последовательности вершин шестиугольника $<a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6>$, то согласно лемме 2 справедливо равенство

$$a_6=[a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\,a_3a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\,a_5]. \qquad (18)$$

Подставим (18) в левую часть равенства (17). Учитывая определений 5 и 6 получаем

$$\overrightarrow{xa_2}+\overrightarrow{xa_4}+\overrightarrow{x[a_1a_2^{[-2]}\overset{2n-4}{a_2}\,a_3a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\,a_5]}=\vec{0},$$

$$\overrightarrow{xa_2}+\overrightarrow{xa_4}+\overrightarrow{xa_1}+\overrightarrow{a_2[a_3a_4^{[-2]}\overset{2n-4}{a_4}\,a_5]}=\vec{0},$$

$$\overrightarrow{xa_2}+\overrightarrow{xa_4}+\overrightarrow{xa_1}+\overrightarrow{a_2a_3}+\overrightarrow{a_4a_5}=\vec{0}. \qquad (19)$$

На основании леммы 1 равенство (19) равносильно следующему

$$\overrightarrow{xa_2}+\overrightarrow{a_2a_3}\ +\ \overrightarrow{xa_4}+\overrightarrow{a_4a_5}\ +\overrightarrow{xa_1}=\vec{0},$$

$$\overrightarrow{xa_3}+\overrightarrow{a_2a_2}\ +\ \overrightarrow{xa_5}+\overrightarrow{a_4a_4}\ +\overrightarrow{xa_1}=\vec{0},$$

$$\overrightarrow{xa_3}+\overrightarrow{xa_5}+\overrightarrow{xa_1}=\vec{0}.$$

Из полученного равенства вытекает, что x – центроид треугольника $< a_1, a_3, a_5 >$. А значит, согласно первой части доказательства теоремы, x является центроидом шестиугольника $< a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 >$.

Теорема доказана.

Литература

1. Гальмак, А.М. n-арные группы / А.М. Гальмак. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – Ч. 1. – 196 с.

2. Гальмак, А.М. n-арные группы / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. Центр БГУ, 2007. – Ч. 2 – 323 с.

3. Дудек, В. Алгебры Менгера многоместных функций / В. Дудек, В.С. Трохименко. – Кишенёв: Гос. университет Молдовы, 2006. – 237 с.

4. Гальмак, А.М. Единицы и их аналоги в n-арных группах / А.М. Гальмак // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2015. – № 4. – С. 46–55.

5. Гальмак, А.М. Полиадические операции на множествах функций / А.М. Гальмак, Ю.И. Кулаженко. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2013. – 192 с.

6. Щучкин, Н.А. Строение конечных полуабелевых n-арных групп / Н.А. Щучкин // Чебышевский сб. – 2016. – Т. 17, № 1. – С. 254–269.

7. Аль-Шейхахмад, А.О сверхразрешимости одного класса конечных групп / А. Аль-Шейхахмад // Известия Гомельского гос. университета им. Ф. Скорины. – 2004. – № 4 (25) – С. 121–123.

8. Вакарелов, Д. Тернарни групи / Д. Вакарелов // Годищник Софийского ун-та. Матфак. – 1966–1968. – Т. 61.– С. 71–105.

9. Русаков, С.А. Некоторые приложения теории n-арных групп / С.А. Русаков. – Минск : Беларуская навука, 1998. – 167 с.

10. Кулаженко, Ю.И. Полиадические операции и их приложения / Ю.И. Кулаженко. – Минск : Изд. Центр БГУ, 2014. – 311 с.

Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники

Поступила в редакцию 18.04.2016