Проблемы физики, математики и техники, № 1 (26), 2016

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С $\mathbb{P}$-СУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

В.Н. Тютянов[1], Т.В. Тихоненко[2]

[1]*Международный университет «МИТСО», Гомель*
[2]*Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого*

FINITE GROUPS WITH $\mathbb{P}$-SUBNORMAL SUBGROUPS

V.N. Tyutyanov[1], T.V. Tihonenko[2]

[1]*Gomel Branch of International University «MITSO», Gomel*
[2]*P.O. Sukhoi Gomel State Technical University*

Установлено строение конечной группы G, у которой единичная подгруппа не является $\mathbb{P}$-субнормальной в G, но $\mathbb{P}$-субнормальна во всякой собственной подгруппе группы G.

Ключевые слова: *конечная группа*, *композиционные факторы*, *простая неаблева группа*, $\mathbb{P}$*-субнормальная подгруппа*.

The structure of finite group G, in which single subgroup is not $\mathbb{P}$-subnormal in G, but $\mathbb{P}$-subnormal in any proper subgroup of G, was established.

Keywords: *finite group*, *composition factors*, *simple non-abelian group*, $\mathbb{P}$*-subnormal subgroup*.

Введение

В работе [1] Л.С. Казарин определил композиционные факторы конечной группы, которая имеет цепь подгрупп с простыми индексами, начинающуюся с единичной подгруппы. Данная работа послужила источником появления целой серии публикаций по данной тематике, в которых исследовалось строение конечной группы с заданными системами подгрупп, обладающих цепями с простыми индексами. Для исследования данной ситуации в работе [2] было введено следующее важное определение, которое в дальнейшем неоднократно обобщалось в различных направлениях.

Определение. *Подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$-субнормальной в G (обозначается через H $\mathbb{P}$-sn G), если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ – простое число для любого $i = 1,\ldots,n$.*

В [2] показано, что группа G, у которой всякая силовская подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна в G, дисперсивна по Оре. Строение конечных групп, у которых любая примарная циклическая подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна, получено в [3].

В настоящей работе установлено строение конечной группы G, у которой единичная подгруппа не является $\mathbb{P}$-субнормальной в G, но $\mathbb{P}$-субнормальна во всякой собственной подгруппе группы G.

1 Обозначения и предварительные результаты

Определения и обозначения стандартны, их можно найти в [4]. Приведем некоторые из них для удобства чтения.

$\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G;

$Syl_p(G)$ – множество всех силовских p-подгрупп группы G;

H $\mathbb{P}$-sn G – подгруппа H $\mathbb{P}$-субнормальна в G;

R^n – прямое произведение n экземпляров групп, изоморфных R.

В работе Л.С. Казарина [1] установлено, что если в конечной группе G 1 $\mathbb{P}$-sn G, тогда G имеет простые неабелевы композиционные факторы из следующего списка: $PSL_3(3)$, $PSL_3(5)$, $PSL_2(q)$, $q > 3$. В следующей лемме приводится уточнение результата Л.С. Казарина.

***Лемма* 1.1** [5]. *Пусть G – простая неабелева группа и 1 $\mathbb{P}$-sn G, тогда $G \in \{SL_3(3); SL_3(5); PSL_2(7); PSL_2(11); SL_2(2^n)$, где $2^n + 1$ – простое число Ферма$\}$.*

Из леммы 3.1 [5] и леммы 1 следует, что если 1 $\mathbb{P}$-sn G, то композиционные факторы группы G либо принадлежат списку групп леммы 1.1, либо изоморфны Z_r, где r – простое число. Класс групп с единичной $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппой будем обозначать $\mathfrak{R}$. Обозначим $\mathfrak{T}$ – множество всех конечных групп G, у которых единичная подгруппа не $\mathbb{P}$-субнормальна в G, но $\mathbb{P}$-субнормальна в любой собственной подгруппе группы G.

2 Доказательство основного результата

***Лемма* 2.1.** *Пусть G – простая неабелева группа и $G \in \mathfrak{T}$. Тогда $G \in \{A_6$; J_1; $Sz(2^r)$, где r – нечетное простое число; $PSL_2(r)$, где $3 < r$ – простое число; $PSL_2(11^r)$, $PSL_2(7^r)$, $PSL_2(5^r)$, $PSL_2(2^r)$, $PSL_2(3^r)$, где r – простое число; $PSL_2(2^{32})$; $PSU_3(3)$; $PSU_3(7)$; $PSU_3(q)$, где $q + 1$ – простое число Ферма; $PSL_3(5)$; $PSL_3(7)$; $PSL_3(11)\}$.*

Доказательство. Рассмотрим все возможные случаи.

1. $G \cong A_n$, $n \geq 5$. Группа $A_5 \cong PSL_2(2^2) \in \mathfrak{R}$ и, следовательно, $A_5 \notin \mathfrak{T}$. Подгруппы в A_6 либо разрешимы, либо изоморфны $A_5 \in \mathfrak{R}$. Так как $A_6 \notin \mathfrak{R}$, то $A_6 \in \mathfrak{T}$. При $n \geq 7$ группа G содержит простую знакопеременную подгруппу $A_{n-1} \in \mathfrak{R}$. Следовательно, $G \notin \mathfrak{T}$.

2. G – спорадическая группа или группа Титса ${}^2F_4(2)'$. Информация о данных группах приведена в [6]. У группы J_1 все собственные подгруппы либо разрешимы, либо изоморфны $PSL_2(11) \in \mathfrak{R}$, поэтому $J_1 \in \mathfrak{T}$. Для оставшихся групп укажем подгруппы, которые не содержатся в $\mathfrak{R}$, а значит сами группы не содержатся в $\mathfrak{T}$: $\{M_{11}; A_6{}^{\cdot}2\}$, $\{M_{11}; M_{12}\}$, $\{M_{22}; A_7\}$, $\{M_{23}; M_{22}\}$, $\{M_{24}; M_{23}\}$, $\{J_2; PSU_3(3)\}$, $\{HS; M_{22}\}$, $\{J_3; PSL_2(19)\}$, $\{M^cL; M_{22}\}$, $\{He; 3{}^{\cdot}S_7\}$, $\{Ru; A_8\}$, $\{Suz; A_7\}$, $\{O'N; J_1\}$, $\{Co_3; HS\}$, $\{Co_2; M^cL\}$, $\{Fi_{22}; M_{12}\}$, $\{HN; A_{12}\}$, $\{Ly; 2{}^{\cdot}A_{11}\}$, $\{Th; PSL_2(19){:}2\}$, $\{Fi_{23}; PSL_2(17){:}2\}$, $\{Co_1; Co_2\}$, $\{J_4; 2^{11}{:}M_{24}\}$, $\{Fi_{24}'; Fi_{23}\}$, $\{B; {}^2F_4(2)\}$, $\{M; 2{}^{\cdot}B\}$, $\{{}^2F_4(2)'; PSL_2(25)\}$.

3. G – группа лиевского типа. Максимальные параболические подгруппы группы G получаются вычеркиванием вершины в диаграмме Дынкина. Поэтому если лиевский ранг группы G равен l, то имеется максимальная параболическая подгруппа группы G с композиционным фактором, имеющим лиевский ранг l-1. Так как лиевский ранг у групп из $\mathfrak{R}$ не выше 2, то лиевский ранг у групп из $\mathfrak{T}$ не выше 3.

Пусть сначала лиевский ранг группы G равен 1. Рассмотрим все возможные случаи.

(1) $G \cong Sz(q)$, где $q = 2^{2n+1} > 2$. Из [7] следует, что все подгруппы группы G либо разрешимы, либо изоморфны $Sz(s)$, где q есть степень числа s. Так как группы Судзуки не содержатся в $\mathfrak{R}$, то $2n+1$ является простым числом. Таким образом, $Sz(q) \in \mathfrak{T}$, если $q = 2^p$, где p – нечетное простое число.

(2) $G \cong {}^2G_2(q)$, где $q = 3^{2n+1} > 3$. Из [8] следует, что централизатор инволюции группы Ри изоморфен $Z_2 \times PSL_2(q)$. Так как $q = 3^{2n+1} > 3$, то $PSL_2(q) \notin \mathfrak{R}$, а значит $G \notin \mathfrak{T}$.

(3) $G \cong PSL_2(q)$, где $q = p^f$. Из теоремы II.8.27 [9] следует, что в G существует собственная подгруппа изоморфная $PSL_2(p^m)$ для всех $1 \leq m \leq f$ и m делящего f. Если $G \in \mathfrak{T}$, то $PSL_2(p^m) \in \mathfrak{R}$. Если $f = 1$, то $G \cong PSL_2(p) \in \mathfrak{T}$. Если f – простое число, то подгруппа $PSL_2(p) \in \mathfrak{R}$. Таким образом, в этом случае $G \in \{PSL_2(11^f), PSL_2(7^f), PSL_2(5^f), PSL_2(2^f), PSL_2(3^f)$, где f – простое число$\} \subset \mathfrak{T}$.

Пусть $f = lt$, где $l \geq 2$, $t \geq 2$. В этом случае подгруппы $PSL_2(p^l)$ и $PSL_2(p^t)$ содержатся в $\mathfrak{R}$. Это возможно когда $p = 2$ и 2^l+1, 2^t+1 – простые числа Ферма. Следовательно, $l = 2^a \geq 2$, $t = 2^b \geq 2$ и $f = lt = 2^{a+b}$. Если $f < 2^5$, то $f \in \{4, 8, 16\}$. Так как $2^4 + 1$, $2^8 + 1$, $2^{16} + 1$ – простые числа, то $G \in \mathfrak{R}$, что невозможно. Поэтому $f \geq 32$. Если $f = 32$, то $2^f + 1$ делится на 641. Поэтому $G \cong PSL_2(2^{32}) \notin \mathfrak{R}$, а все ее подгруппы содержатся в $\mathfrak{R}$. Следовательно, $PSL_2(2^{32}) \in \mathfrak{T}$. Пусть $f > 32$. Тогда $f = 32k$, где $2 \leq k$ – степень числа 2 и G содержит подгруппу изоморфную $PSL_2(2^{32}) \notin \mathfrak{R}$, что невозможно.

(4) $G \cong PSU_3(q)$. Пусть сначала q – нечетное число. Из [10] следует, что G содержит подгруппу $H \cong PSL_2(q)$. Если $G \in \mathfrak{T}$, то $H \in \mathfrak{R}$. Это возможно, когда $H \in \{PSL_2(3), PSL_2(5), PSL_2(7), PSL_2(11)\}$. Из [6] следует, что все подгруппы в $PSU_3(3)$ и $PSU_3(7)$ лежат в $\mathfrak{R}$. Значит, $PSU_3(3)$, $PSU_3(7) \in \mathfrak{T}$. Группы $PSU_3(5)$ и $PSU_3(11)$ содержат подгруппы $A_7 \notin \mathfrak{R}$ и $A_6 \notin \mathfrak{R}$ соответственно [6]. Поэтому $PSU_3(5), PSU_3(11) \notin \mathfrak{T}$.

Пусть q – четное число. Из [11] следует, что G содержит подгруппу изоморфную $PSL_2(q)$. Если $G \in \mathfrak{T}$, то $PSL_2(q) \in \mathfrak{R}$. Это возможно когда $q + 1 = r$ – простое число Ферма. Пусть $q + 1 = 2^a k$, где k – нечетное число. В нашем случае $k = r$ – простое число. Группа G содержит подгруппу $PSU_3(2^m)$, если $k / m > 3$ – нечетное простое число [11]. Так как k простое число, то $m = 1$ и разрешимая группа $PSU_3(2) \in \mathfrak{R}$. Так как $k \neq 3m$, то G не содержит подгрупп $PSU_3(2^m).3$ [11]. Как следует из [11], остальные подгруппы группы G разрешимы. Таким образом, $PSU_3(q) \in \mathfrak{T}$, если $q + 1$ – простое число Ферма.

Пусть G – группа лиевского ранга 2. Рассмотрим все возможные случаи.

(1) $G \cong {}^3D_4(q)$. Из [12] следует, что G содержит подгруппу $G_2(q) \notin \mathfrak{R}$. Таким образом, $G \notin \mathfrak{T}$.

(2) $G \cong {}^2F_4(q)$, где $q = 2^n > 2$. Из [12] следует, что G содержит подгруппу $Sz(q) \notin \mathfrak{R}$, поэтому $G \notin \mathfrak{T}$.

(3) $G \cong G_2(q)$. Группа G содержит подгруппу $A_2(q)$. Если $q \neq 2$, то $A_2(q) \notin \mathfrak{R}$ и $G \notin \mathfrak{T}$. При $q = 2$ $G \cong G_2(q)$ не является простой неабелевой группой $(G_2(2)' \cong PSU_3(3))$.

(4) $G \cong \Omega_5(q) \cong PSp_4(q)$, где $q = p^n$. Группа содержит максимальную параболическую подгруппу с композиционными факторами $PSL_2(q)$. Если $G \in \mathfrak{R}$, то $PSL_2(q) \in \mathfrak{R}$. Тогда $PSL_2(q) \in \{PSL_2(3)$ – разрешимая группа; $PSL_2(5)$, $PSL_2(7)$, $PSL_2(11)$, $PSL_2(2^n)$, где $2^n + 1$ – простое число$\}$.

Установим когда $G \in \mathfrak{T}$. Группа $PSp_4(3) \cong$ $\cong PSU_4(2)$ содержит подгруппу $S_6 \notin \mathfrak{R}$, поэтому $PSp_4(3) \notin \mathfrak{T}$. Группа $PSp_4(5)$ содержит подгруппу $A_6 \notin \mathfrak{R}$, поэтому $PSp_4(5) \notin \mathfrak{T}$. Пусть $G \cong PSp_4(7)$. Так как $q = 7$, то из [10] следует, что G содержит подгруппу $A_7 \notin \mathfrak{R}$ и $PSp_4(7) \notin \mathfrak{T}$. Если $G \cong PSp_4(11)$, то $11 \equiv -1 (mod\ 12)$ и G содержит подгруппу $A_6{}^{\cdot}2 \notin \mathfrak{R}$. Значит $PSp_4(11) \notin \mathfrak{T}$. Пусть

$G \cong PSp_4(2^n)$, где $2^n + 1$ – простое число и $n = 2^k > 1$. В этом случае, очевидно, группа G содержит подгруппу $H \cong PSp_4(2)$ и $H' \cong A_6 \notin \mathfrak{R}$. Поэтому $G \notin \mathfrak{T}$.

(5) $G \cong PSL_3(q)$, где $q = p^n$. Группа G содержит максимальную параболическую подгруппу с композиционными факторами $PSL_2(q)$. Если $G \in \mathfrak{T}$, то $PSL_2(q) \in \mathfrak{R}$. Таким образом, $G \in \{PSL_3(3)$, $PSL_3(5)$, $PSL_3(7)$, $PSL_3(11)$, $PSL_3(2^n)$, где $2^n + 1$ – простое число Ферма$\}$. Группа $PSL_3(3) \in \mathfrak{R}$, а значит $PSL_3(3) \notin \mathfrak{T}$. Из [6] следует, что все подгруппы групп $PSL_3(5)$, $PSL_3(7)$, $PSL_3(11)$ содержатся в $\mathfrak{R}$. Поэтому эти группы принадлежат $\mathfrak{T}$. Пусть $G \cong PSL_3(2^n)$, где $2^n + 1 \geq 5$ является простым числом. В этом случае $n = 2m \geq 2$, так как $PSL_3(2) \in \mathfrak{R}$. Если $m = 1$, то $G \cong PSL_3(4)$. Из [6] следует, что G содержит подгруппу изоморфную $A_6 \notin \mathfrak{R}$. Поэтому $PSL_3(4) \notin \mathfrak{T}$. Следовательно, $m \geq 2$ и $n \geq 4$. Тогда $n = 2t$, где $t \geq 2$ и группа G содержит подгруппу $PSL_3(2^t)$ [11]. Значит, $G \notin \mathfrak{T}$.

(6) $G \cong PSU_4(q)$. Из [12] следует, что G содержит подгруппу $PSp_4(q)$ $G \notin \mathfrak{T}$.

(7) $G \cong PSU_5(q)$. Группа G содержит максимальную параболическую подгруппу с композиционными факторами $PSU_3(q)$. Если $PSU_3(q) \in \mathfrak{R}$, то $G \cong PSL_5(2)$. Из [6] следует, что G содержит подгруппу $PSU_4(2) \notin \mathfrak{R}$, поэтому $G \notin \mathfrak{T}$.

Пусть лиевский ранг группы G равен 3. В этом случае $G \in \{PSp_6(q), P\Omega_7(q), PSU_6(q), PSL_7(q), PSL_4(q), F_4(q), P\Omega_8^-(q)\}$. Группы $PSp_6(q)$ и $P\Omega_7(q)$ содержат максимальную параболическую подгруппу с композиционным факторам $PSp_4(q) \notin \mathfrak{R}$, и, следовательно, не содержится в $\mathfrak{T}$. Аналогично, группа $PSU_7(q)$ исключается наличием композиционного фактора $PSU_5(q) \notin \mathfrak{R}$. В группе $G \cong PSL_4(q)$ имеется параболическая подгруппа с композиционным фактором $PSL_3(q)$, поэтому $G \cong PSL_4(2) \cong A_8$ и содержит подгруппу $A_7 \notin \mathfrak{R}$. Значит, $PSL_4(2) \notin \mathfrak{T}$. Группа $P\Omega_8^-(q)$ содержит параболическую подгруппу с композиционным фактором $PSU_4(q) \notin \mathfrak{R}$ и $P\Omega_8^-(q) \notin \mathfrak{T}$. Лемма доказана.

Обозначим Ω – множество простых групп из леммы 2.1.

Теорема 2.2. *Пусть конечная группа $G \in \mathfrak{T}$. Тогда $G / \Phi(G) \in \Omega$.*

Доказательство. Если G – простая неабелева группа, то теорема верна. Пусть N – нормальная подгруппа в G, а M – максимальная подгруппа группы G. Предположим, что $N \nsubseteq M$. Тогда $G = NM$, где $N \in \mathfrak{R}$ и $M \in \mathfrak{R}$. Отсюда следует, что 1 $\mathbb{P}$-sn G. Последнее невозможно. Следовательно, $N \subseteq M$. Так как M – произвольная максимальная подгруппа группы G, то $N \subseteq \Phi(G)$. Отсюда легко заключить, что $G / \Phi(G) \in \Omega$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Казарин*, *Л.С.* О группах с факторизацией / Л.С. Казарин // ДАН СССР. – 1981. – Т. 256, № 1. – С. 26–29.

2. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журнал. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

3. *Kniahina*, *V.N.* Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal primary cyclic subgroups / V.N. Kniahina, V.S. Monakhov // arXiv: 1110. 4720 v1 [math. GR] 210 ct. – 2011. – P. 15.

4. *Горенстейн*, *Д.* Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенстейн. – М.: Мир. – 1985. – 352 с.

5. *Васильев*, *А.Ф.* О произведениях $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп в конечных группах / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журнал. – 2012. – Т. 53, № 1. – С. 59–67.

6. *Atlas of finite groups* / J.H. Conway [et al.] // Oxford, 1985. – 252 p.

7. *Suzuki*, *M.* On a class double transitive groups / M. Suzuki // Ann. Math. – 1962. Vol. 75, № 1. – P. 105–145.

8. *Kleidman*, *P.* The maximal subgroups of the Chevalley groups $G_2(q)$ with q odd, Ree groups ${}^2G_2(q)$ and their automorphism groups / P. Kleidman // J. Algebra. – 1988. – Vol. 117. – P. 30–71.

9. *Huppert*, *B.* Endliche Gruppen / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 1967. – 793 s.

10. *Mitchell*, *H.H.* Determination of the ordinary and modular ternary linear groups / H.H. Mitchell // Trans. Amer. Math. Soc. – 1911. – Vol. 12. – P. 207–242.

11. *Hartley*, *R.W.* Determination of the ternary collineation groups whose coefficients lie in the $GF(2^n)$ / R.W. Hartley // Ann. Math. – 1925. – Vol. 27. – P. 140–158.

12. *Stensholt*, *E.* Certain embedding finite group of Lie type / E. Stensholt // J. Algebra. – 1978. – Vol. 53. – P. 136–187.

Поступила в редакцию 11.11.15.