УДК 517.925

СВОЙСТВО ПЕНЛЕВЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В.М. Пецевич, Д.Н. Шевченя

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

PAINLEVE'S PROPERTY FOR DIFFERENTIAL SYSTEM OF THE SECOND ORDER

V.M. Petsevich, D.N. Shauchenia

Y. Kupala Grodno State University

Получены необходимые и достаточные условия принадлежности исследуемой системы к системам типа Пенлеве.

Ключевые слова: *система обыкновенных дифференциальных уравнений, свойство Пенлеве, метод малого параметра, метод резонансов, подвижная критическая особая точка.*

Necessary and sufficient conditions of the analysed system belonging to Peinleve type are obtained.

Keywords: *system of the ordinary differential equations, Painleve's property, method of small parameter, method of resonances, mobile critical special point.*

1 Предварительные результаты

В работе, на предмет отсутствия подвижных многозначных особенностей, продолжаем рассматривать систему двух дифференциальных уравнений [3]

$$x'^2 = A_2 \cdot y^2 + A_1 \cdot y + A_0,$$
$$y'^2 = \left(b_{12}y + b_{02}\right)x^2 + \left(b_{11}y + b_{01}\right)x + b_{10}y + b_{00}, \qquad (1.1)$$

где $A_i,\ \ i = \overline{0,2},$ − полиномы по x с аналитическими по t коэффициентами, $b_{jk},\ \ j = \overline{0,1},\ \ k = \overline{0,2}$ − аналитические по t функции,

$$A_2 \neq 0,\ |b_{12}| + |b_{02}| \neq 0, \qquad (1.2)$$

и правые части не являются одновременно полными квадратами. Запись $F \neq 0,$ здесь и далее означает, что коэффициенты полинома F одновременно не обращаются в нуль в некоторой области D.

Согласно [2], для отсутствия многозначных особенностей у решений системы (1.1) при условиях (1.2), необходимо требовать

$$A_1^2 - 4A_2A_0 = 0. \qquad (1.3)$$

Согласно [3], для того, чтобы дифференциальная система (1.1) с аналитическими по t коэффициентами и условиями (1.2) не имела многозначных особенностей, необходимо чтобы она имела вид

$$x'^2 = \left(a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20}\right)y^2 +$$
$$+\left(a_{14}x^4 + a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10}\right)y +$$
$$+a_{04}x^4 + a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00},$$
$$y'^2 = \left(b_{12}y + b_{02}\right)x^2 + \left(b_{11}y + b_{01}\right)x + b_{10}y + b_{00},$$

и выполнялись условия (1.3). Далее, в [3] были найдены необходимые и достаточные условия отсутствия подвижных многозначных особенностей для случая $a_{22} = a_{21} = 0,\ \ a_{20} \neq 0.$

Имеет место следующая лемма.

Лемма. *Для того, чтобы дифференциальная система*

$$x'^2 = C_4\,x^4 + C_3\,x^3 + C_2\,x^2 + C_1\,x + C_0,$$
$$y'^2 = D_2\,x^2 + D_1\,x + D_0, \qquad (1.4)$$

где $C_i = C_i(y,t),\ \ D_j = D_j(y,t),\ \ i = \overline{0,4},\ \ j = \overline{0,2},$ *полиномы по* y *с аналитическими по* t *коэффициентами,* $D_2 \neq 0,$ *не имела многозначных особенностей, необходимо, чтобы: или*

$$D_1^2 - 4D_2D_0 = 0; \qquad (1.5)$$

или

$$\left(D_1\right)_t D_2 - \left(D_2\right)_t D_1 = 0,$$
$$D_2\left(D_1^2 - 4D_2D_0\right)_t -$$
$$-2\left(D_2\right)_t\left(D_1^2 - 4D_2D_0\right) = 0,$$
$$C_1D_2^3 - C_2D_1D_2^2 - C_3D_0D_2^2 +$$
$$+C_3D_1^2D_2 + 2C_4D_0D_1D_2 - C_4D_1^3 = 0, \qquad (1.6)$$
$$2C_0D_2^4 - C_1D_1D_2^3 - 2C_2D_0D_2^3 +$$
$$+C_2D_1^2D_2^2 + 3C_3D_0D_1D_2^2 - C_3D_1^3D_2 +$$
$$+2C_4D_0^2D_2^2 - 4C_4D_0D_1^2D_2 + C_4D_1^4 = 0,$$

при $D_1^2 - 4D_2D_0 \neq 0,$ *где* $\left(D_j\right)_t = \dfrac{\partial D_j}{\partial t},\ \ j = \overline{0,2}.$

Доказательство. Поскольку $D_2 \neq 0,$ то из второго уравнения системы (1.4) будем иметь

$$x = -\frac{1}{2}\cdot\frac{D_1}{D_2} + \frac{\lambda}{2D_2}\cdot\sqrt{D_1^2 - 4D_2D_0 + 4D_2\,y'^2}, \quad (1.7)$$

и

$$x' = -\frac{1}{2D_2^2}\cdot\Big(\Big(\big((D_1)_t + (D_1)_y\,y'\big)D_2 - \big((D_2)_t + (D_2)_y\,y'\big)D_1\Big) -$$
$$-\lambda\frac{(D_2)_t + (D_2)_y\,y'}{2D_2^2}\cdot\sqrt{D_1^2 - 4D_2D_0 + 4D_2\,y'^2} + \quad (1.8)$$
$$+\lambda\cdot\frac{\left(D_1^2 - 4D_2D_0\right)_t + \left(D_1^2 - 4D_2D_0\right)_y y'}{4D_2\cdot\sqrt{D_1^2 - 4D_2D_0 + 4D_2\,y'^2}} +$$
$$+\lambda\cdot\frac{4\big((D_2)_t + (D_2)_y\,y'\big)y'^2 + 8D_2y'y''}{4D_2\cdot\sqrt{D_1^2 - 4D_2D_0 + 4D_2\,y'^2}},$$

где $\lambda^2 = 1,\ \left(D_j\right)_t = \frac{\partial D_j}{\partial t},\ \left(D_j\right)_y = \frac{\partial D_j}{\partial y},\ j = \overline{0,2}.$

Подставляя (1.7) и (1.8) соответственно в правую и левую части первого уравнения системы (1.4), и полагая $y = y_0 + \varepsilon^3 Y,\ t = t_0 + \varepsilon^2\tau,$ при $\varepsilon = 0$ получим упрощенное дифференциальное уравнение

$$\left(\dot Y\ddot Y + \frac{D_2\left(D_1^2 - 4D_2D_0\right)_t - 2(D_2)_t\left(D_1^2 - 4D_2D_0\right)}{8D_2^2} - \lambda\cdot\sqrt{D_1^2 - 4D_2D_0}\cdot\frac{(D_1)_t D_2 - (D_2)_t D_1}{4D_2^2}\right)^2 =$$
$$= \frac{\lambda\left(D_1^2 - 4D_2D_0\right)^{3/2}}{8D_2^4}\times$$
$$\times\left(C_1D_2^3 - C_2D_1D_2^2 - C_3D_0D_2^2 + C_3D_1^2D_2 + 2C_4D_0D_1D_2 - C_4D_1^3\right) +$$
$$+\frac{D_1^2 - 4D_2D_0}{8D_2^4}\left(2C_0D_2^4 - C_1D_1D_2^3 - \right. \quad (1.9)$$
$$-2C_2D_0D_2^3 + C_2D_1^2D_2^2 + 3C_3D_0D_1D_2^2 -$$
$$\left.-C_3D_1^3D_2 + 2C_4D_0^2D_2^2 - 4C_4D_0D_1^2D_2 + C_4D_1^4\right),$$

где $\dot Y = \frac{dY}{d\tau},\ \ddot Y = \frac{d^2Y}{d\tau^2}.$

Учитывая, что $D_2 \neq 0,$ то для отсутствия многозначных особенностей у решений уравнения (1.9), и, соответственно, у решений системы (1.4), согласно [4], необходимо чтобы выполнялось либо условие (1.5), либо (1.6) при

$$D_1^2 - 4D_2D_0 \neq 0.$$

2 Необходимые и достаточные условия свойства Пенлеве для дифференциальной системы второго порядка

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$x'^2 = \left(a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20}\right)y^2 +$$
$$+\left(a_{14}x^4 + a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10}\right)y +$$
$$+a_{04}x^4 + a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00},$$
$$y'^2 = \left(b_{12}y + b_{02}\right)x^2 + \left(b_{11}y + b_{01}\right)x +$$
$$+b_{10}y + b_{00},$$

где

$$a_{22} \neq 0,\ |b_{12}| + |b_{02}| \neq 0.$$

Поскольку $a_{22} \neq 0,$ то с помощью аналитической замены независимой переменной, сохраняя для коэффициентов прежние обозначения, систему запишем в виде

$$x'^2 = \left(x^2 + a_{21}x + a_{20}\right)y^2 +$$
$$+\left(a_{14}x^4 + a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10}\right)y +$$
$$+a_{04}x^4 + a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00}, \quad (2.1)$$
$$y'^2 = \left(b_{12}y + b_{02}\right)x^2 + \left(b_{11}y + b_{01}\right)x +$$
$$+b_{10}y + b_{00},$$

где

$$|b_{12}| + |b_{02}| \neq 0. \quad (2.2)$$

Из (1.3) следует $a_{14} = 0.$ Далее, учитывая (2.2), из (2.1), относительно компоненты y построим уравнение и введем малый параметр по формулам $y = Y,\ t = t_0 + \varepsilon\tau.$ При $\varepsilon = 0$ получим упрощенное дифференциальное уравнение

$$\left(Y'' - \frac{b_{12}}{2\left(b_{12}Y + b_{02}\right)}Y'^2\right)^2 = \frac{a_{04}Y'^4}{b_{12}Y + b_{02}}, \quad (2.3)$$

где $b_{12} = b_{12}(t_0),\ b_{02} = b_{02}(t_0),\ a_{04} = a_{04}(t_0).$

Пусть $b_{12} \neq 0.$ Тогда в упрощенном уравнении (2.3) выполним замену $Y = \frac{u^2 - b_{02}}{b_{12}}.$ Будем иметь

$$u'' = \frac{2\lambda\sqrt{a_{04}}}{b_{12}}u'^2,$$

где $\lambda^2 = 1,$ решения которого имеют многозначные особенности [1], если $a_{04} \neq 0.$ Таким образом, $a_{04} = 0.$ При этом условии из (1.3) получим, что $a_{13} = 0,\ a_{03} = 0.$ С учетом найденных условий в уравнение относительно компоненты y введем малый параметр по формулам $y = \varepsilon^{-1}Y,$ $t = t_0 + \varepsilon^2\tau.$ При $\varepsilon = 0$ получим упрощенное дифференциальное уравнение

$$2YY'' - Y'^2 - 2\lambda Y^2Y' = 0,$$

где $\lambda^2 = 1.$ Используя метод резонансов, найдем, что $r \in \left\{-1;\ 3/2\right\}.$ Следовательно, в случае $b_{12} \neq 0,$ дифференциальная система (2.1) при условиях (2.2) не обладает свойством Пенлеве.

Пусть $b_{12}=0$ (следовательно из (2.2) $b_{02}\neq 0$). Тогда упрощенное уравнение (2.3) примет вид

$$Y''=\lambda\sqrt{\frac{a_{04}}{b_{02}}}Y'^2,$$

где $\lambda^2=1$, решения которого имеют многозначные особенности [1], если $a_{04}\neq 0$. Таким образом, учитывая полученные выше условия и требуя выполнения условия (1.3) получим, что для отсутствия многозначных особенностей у решений системы (2.1) при условиях (2.2) необходимо, чтобы система, с точностью до переобозначения коэффициентов, принимала один из видов

$$\begin{aligned} x'^2 &= \left(xy+a_{12}x+a_{21}y+a_{11}\right)^2, \\ y'^2 &= b_{02}x^2+\left(b_{11}y+b_{01}\right)x+b_{10}y+b_{00}; \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} x'^2 &= \left(x^2+a_{21}x+a_{20}\right)\left(y+a_{12}\right)^2, \\ y'^2 &= b_{02}x^2+\left(b_{11}y+b_{01}\right)x+b_{10}y+b_{00}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

где $b_{02}\neq 0$.

Рассмотрим систему (2.4). Потребовав выполнения условий леммы с учетом, что правые части не должны быть одновременно полными квадратами, получим, что в данном случае нет дифференциальных систем без многозначных особенностей.

Рассмотрим систему (2.5). Потребовав выполнения условий леммы с учетом, что правые части не должны быть одновременно полными квадратами, получим, что рассмотрение системы распадается на два случая:

$$\begin{aligned} x'^2 &= \left(x^2+a_{21}x+a_{20}\right)\left(y+a_{12}\right)^2, \\ y'^2 &= b_{02}\left(x+b_{01}\right)^2, \end{aligned} \tag{2.6}$$

где $b_{02}\neq 0$;

$$\begin{aligned} x'^2 &= \left(x^2+K_1x+K_2\right)\left(y+a_{12}\right)^2, \\ y'^2 &= b_{02}\left(x^2+K_1x+K_2\right), \end{aligned} \tag{2.7}$$

где $b_{02}\neq 0$, $K_1^2-4K_2\neq 0$.

Рассмотрим систему (2.6). Поскольку уравнение относительно компоненты y имеет вид

$$y''=\lambda\left(\frac{y^2}{\sqrt{b_{02}}}+\frac{2a_{12}y}{\sqrt{b_{02}}}+\frac{a_{12}^2}{\sqrt{b_{02}}}\right)y'^2+\beta_1(y)\cdot y'+\beta_0(y),$$

где $\lambda^2=1$, β_1,β_0 – многочлены по y однозначно определяющиеся через коэффициенты системы, а $b_{02}\neq 0$, то решения системы (2.6) не обладают свойством Пенлеве.

Рассмотрим систему (2.7). Уравнение относительно компоненты y имеет вид

$$\begin{aligned} &\left(2b_{02}y''-b_{02}'y'\right)^2= \\ &=b_{02}^2\left(y+a_{12}\right)^2\left(4\left(y'\right)^2+b_{02}\left(K_1^2-4K_2\right)\right). \end{aligned}$$

Согласно методу резонансов, решение уравнения можно представить формальным рядом

$$y=\frac{\alpha_0}{t}+\alpha_1+\alpha_2 t+\alpha_3 t^2+\alpha_4 t^3+\ldots,$$

где α_2 – должно быть произвольной постоянной. Это требование приводит к необходимости выполнения резонансного условия

$$a_{12}=K_3,\ b_{02}=H\,e^{Kt}, \tag{2.8}$$

где K_3, $H\neq 0$, K – некоторые постоянные.

Учитывая полученные условия, и

$$K_1^2-4K_2\neq 0,$$

заключаем, что с помощью линейного преобразования относительно зависимых переменных и, сохраняя для коэффициентов прежние обозначения, система (2.7) примет вид

$$\begin{aligned} x'^2 &= y^2x\left(x-1\right), \\ y'^2 &= H\,e^{Kt}x\left(x-1\right), \end{aligned} \tag{2.9}$$

где $H\neq 0$.

Пусть $K\neq 0$. Из (2.9) относительно компоненты x построим уравнение

$$x''=\frac{2x-1}{2x\left(x-1\right)}x'^2+\lambda\sqrt{H}\,x\left(x-1\right)\exp\left(\frac{Kt}{2}\right),$$

в котором, выполнив замену $x=\dfrac{w}{w-1}$, получим

$$w''=\left(\frac{1}{w-1}+\frac{1}{2w}\right)w'^2-\lambda\sqrt{H}\exp\left(\frac{Kt}{2}\right)w, \tag{2.10}$$

где $\lambda^2=1$. С помощью аналитической замены независимой переменной $\exp\left(\dfrac{Kt}{2}\right)=z$, уравнение (2.10) приводится к виду

$$\ddot{w}=\left(\frac{1}{w-1}+\frac{1}{2w}\right)\dot{w}^2-\frac{\dot{w}}{z}-\frac{4\lambda\sqrt{H}}{K^2}\frac{w}{z}, \tag{2.11}$$

частного случая пятого уравнения Пенлеве. Согласно [1], решения уравнения (2.11), а, следовательно и компонента x системы уравнений (2.9), не имеют многозначных особенностей.

Далее, из (2.9) относительно компоненты y построим уравнение

$$\left(2y''-Ky'\right)^2=y^2\left(4y'^2+He^{Kt}\right),$$

которое, с помощью аналитической замены независимой переменной $z=\dfrac{\sqrt{-H}}{K}\exp\left(\dfrac{Kt}{2}\right)$, примет вид

$$\ddot{y}^2=\frac{4}{K^2z^2}y^2\left(\dot{y}^2-1\right). \tag{2.12}$$

Согласно [4], уравнение (2.12) сводится к частному случаю третьего уравнения Пенлеве. Следовательно, решения уравнения (2.12), а также и компонента y системы уравнений (2.9), не имеют многозначных особенностей.

Пусть $K=0$. Тогда из системы (2.9) можем записать $\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2=\dfrac{y^2}{H}$. Откуда получим, что

$$x = \frac{\lambda y^2}{2\sqrt{H}} + C, \qquad (2.13)$$

где C – постоянная интегрирования, $\lambda^2 = 1$. Подставив (2.13) во второе уравнение системы (2.9), будем иметь

$$y'^2 = H\left(\frac{\lambda y^2}{2\sqrt{H}} + C\right)\left(\frac{\lambda y^2}{2\sqrt{H}} + C - 1\right), \qquad (2.14)$$

которое является уравнением Брио и Буке [1]. Последнее означает, что решения уравнения (2.14) не имеют многозначных особенностей. Учитывая (2.13), получаем, что и компонента y обладает свойством Пенлеве.

Таким образом, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема. *Для того чтобы дифференциальная система* (2.1) *при условии* (2.2) *обладала свойством Пенлеве, необходимо и достаточно, чтобы она дробно-линейным преобразованием* x, y *и аналитической заменой независимой переменной* t *приводилась к виду* (2.9). *Решения данной системы в некоторых случаях выражаются через решения третьего и пятого уравнений Пенлеве.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айнс*, *Э.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э.Л. Айнс. − Харьков: ГНТИУ, 1939. − 719 с.

2. *Детченя*, *Л.В.* Об одной системе двух дифференциальных уравнений второй степени со специальной правой частью со свойством Пенлеве / Л.В. Детченя, В.М. Пецевич, Д.Н. Шевченя // Вестник ГрГУ им. Я. Купалы. Сер. 2. – 2013. – № 3 (159). – С. 48−55.

3. *Пецевич*, *В.М.* Аналитические свойства решений системы двух дифференциальных уравнений второй степени относительно производной / В.М. Пецевич, Д.Н. Шевченя // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. − 2015. − № 1 (186). − С. 35−40.

4. *Cosgrove*, *C.M.* Painleve classification of a class of differential equations of the second order and second degree / C.M. Cosgrove, G. Scoufis // Stud. Appl. Math. 1993. − Vol. 88. − P. 25−87.

Поступила в редакцию 19.01.16.