

# Захват частиц без потерь в режим высокочастотного ускорения в протонном синхротроне

Э. А. МЯЭ, П. Т. ПАШКОВ

УДК 621.384.634.5

Возможность практически 100%-ного захвата частиц в режим резонансного ускорения установлена сравнительно давно (так называемый адиабатический захват [1—3]). При этом предполагается, что время установления ускоряющего напряжения существенно больше периода фазовых колебаний частиц. Реализация такого захвата в протонном синхротроне затруднена из-за недопустимо большой величины сворачивания пучка к внутренней стенке камеры ускорителя [2], так как энергия частиц увеличивается недостаточно быстро, чтобы компенсировать растущее магнитное поле. В работе [4] показано, что эффективность захвата, близкая к 100%, может быть получена и при более быстром росте амплитуды ускоряющего напряжения, если так модулировать радиочастоту, чтобы частицы в среднем не ускорялись. Однако в этой работе не обсуждались вопросы, связанные с переходом от режима захвата к режиму ускорения.

В настоящей статье рассмотрены основные особенности синхротронного захвата и переход к режиму ускорения на постоянном радиусе. При этом амплитуда ускоряющего напряжения нарастает за время, сравнимое с периодом синхротронных колебаний, а магнитное поле изменяется во времени. Высокая частота программируется таким образом, что при захвате прирост энергии синхронной частицы отсутствует, а на участке перехода к стационарному ускорению площадь сепаратрисы постоянна. Как следствие этого, равновесный радиус пучка изменяется, однако это изменение может не выходить из допустимых пределов.

## Особенности процесса захвата

Уравнение фазовых колебаний при ускоряющем напряжении  $V = V(t)$ , зависящем от времени, можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Delta p &= \frac{eV(t)}{2\pi mcR_0} \cos \varphi - \frac{dp}{dt}; \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{qc}{R_0} \frac{\alpha\gamma^2 - 1}{\gamma^3} \Delta p, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\gamma$  — энергия синхронной частицы в единицах энергии покоя;  $\varphi$  — фаза частицы по отношению к высокочастотному полю;  $R_0$  — средний

радиус ускорителя;  $\alpha$  — коэффициент расширения орбит;  $m$  — масса покоя частицы;  $c$  — скорость света;  $p$  — синхронный импульс в единицах  $mc$ ;  $\Delta p$  — отклонение импульса частицы от синхронного значения;  $q$  — кратность ускорения.

В уравнении (1) предполагается, что влияние бетатронной э.д.с. на процесс ускорения незначительно, а сворачивание пучка в процессе захвата мало по сравнению со средним радиусом ускорителя. Введем

$$\tau = t\Omega_0, \quad (2)$$

где  $\Omega_0$  — частота малых синхротронных колебаний в момент окончания захвата (при  $t = t_0$ ,  $V(t_0) = V_0$ ):

$$\Omega_0^2 = \frac{qeV_0 |1 - \alpha\gamma_0^2|}{2\pi m\gamma_0^3 R_0^2}. \quad (3)$$

Преобразуем (1):

$$\begin{aligned} y' &= f(\tau) \cos \varphi - \kappa p'; \\ \varphi' &= \frac{\alpha(p^2 + 1) - 1}{|\alpha(p_0^2 + 1) - 1|} \left( \frac{p_0^2 + 1}{p^2 + 1} \right)^{3/2} y; \end{aligned} \quad (4)$$

здесь  $p_0 - p$  в момент инжекции (штрихом обозначено дифференцирование по  $\tau$ ;  $f(\tau) = \frac{V(\tau)}{V_0}$ ),

$$y = \kappa \Delta p, \quad (5)$$

где

$$\kappa = \sqrt{\frac{2\pi q mc^2 |1 - \alpha\gamma_0^2|}{eV_0\gamma_0^3}}. \quad (6)$$

Находим прирост энергии синхронной частицы:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma(\gamma^2 - 1)}{\alpha\gamma^2 - 1} \left( \frac{\alpha}{H} \cdot \frac{dH}{dt} - \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{d\omega_0}{dt} \right), \quad (7)$$

где  $H$  — магнитное поле ускорителя,  $\omega_0$  — радиочастота. В [4] показано, что для осуществления  $\sim 100\%$ -ного захвата необходимо, чтобы при  $0 \leq t \leq t_0$  импульс синхронной частицы оставался постоянным ( $p = p_0$ ), поэтому радиочастота должна изменяться по закону

$$\frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{d\omega_0}{dt} = \frac{\alpha}{H} \cdot \frac{dH}{dt}. \quad (8)$$

В последнем случае фазовое уравнение упрощается, и выражение (4) можно представить как

$$\varphi'' = \pm f(\tau) \cos \varphi, \quad (9)$$

где знаки «плюс» и «минус» относятся соответственно к закритической и докритической зонам.

В момент инжекции сгусток на фазовой плоскости представляет собой прямоугольник площадью  $4\pi y_0$ . Площадь сепаратрисы  $S_0$  в конце захвата ( $\tau = \tau_0$ ) должна быть больше или равна площади этого прямоугольника ( $\lambda = \frac{4\pi y_0}{S_0} \leq 1$ ), иначе коэффициент захвата всегда меньше 100%. Так как

$$S_0 = 4\sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 + \sin \varphi} d\varphi = 16, \quad (10)$$

получим

$$y_0 \leq \frac{4}{\pi}. \quad (11)$$

Используя (5), (6) и (11), можно найти требуемую амплитуду ускоряющего напряжения в конце захвата в зависимости от разброса пучка по импульсам при инжекции  $(\Delta p/p)_и$ :

$$\frac{eV_0}{mc^2} \geq \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \frac{q(\gamma_0^2 - 1) |1 - \alpha\gamma_0^2|}{\gamma_0^3} \left(\frac{\Delta p}{p}\right)_и^2. \quad (12)$$

Условие (12) не является достаточным для захвата без потерь. Необходимо еще выяснить, какова допустимая наибольшая скорость роста амплитуды ускоряющего напряжения, для которой при выполнении (12) отсутствуют потери частиц. С этой целью уравнение (9) численно интегрировалось на ЭВМ. Расчеты проводились по следующей схеме. Прямоугольник на фазовой плоскости ( $|y| \leq y_0, -\frac{3\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ), изображающий сгусток после инжекции в докритической зоне (результаты верны для за- критической зоны при замене  $\varphi$  на  $-\varphi$ ), раз-

бивался на  $\sim 1000$  подобных прямоугольников. Центры таких «макрочастиц» брались в качестве начальных условий при решении уравнения (9). Точность определения коэффициента захвата таким способом  $\sim 0,5\%$ . Амплитуда ускоряющего напряжения изменялась от начального значения  $V_и$  до  $V_0$  по линейному закону.

На рис. 1 приведены значения коэффициента захвата в зависимости от скорости роста амплитуды ускоряющего напряжения. По оси абсцисс отложена величина  $\tau_0/2\pi$ , в качестве параметра взято отношение начального напряжения к напряжению в конце захвата. Кривые соответствуют случаю  $\lambda = 0,9$ , когда площадь сепаратрисы на 10% больше площади, занимаемой пучком. Видно, что коэффициент захвата испытывает небольшие колебания, которые связаны с тем, что фазовое движение частиц в данном районе не является адиабатическим и граница сгустка имеет форму, отличную от формы фазовых траекторий. На рис. 2 показан процесс формирования сгустка на фазовой плоскости в течение времени захвата при начальном напряжении, равном нулю. При  $\frac{\tau_0}{2\pi} \approx 1,4$  часть сгустка выходит за пределы сепаратрисы (случай  $\frac{\tau_0}{2\pi} = 1,3$  на рис. 2), однако в дальнейшем частицы снова попадают в сепаратрису.

На рис. 3 приведено значение коэффициента захвата в момент  $t = t_0$  для трех значений величины  $\lambda$  ( $V_и = 0$ ). Видно, что с уменьшением  $\lambda$  колебания коэффициента захвата также уменьшаются, а при  $\lambda = 0,8$  они отсутствуют. Первый максимум при  $\lambda = 0,9$  близок к 1, поэтому в дальнейшем изучался этот случай.

### Переход к режиму ускорения

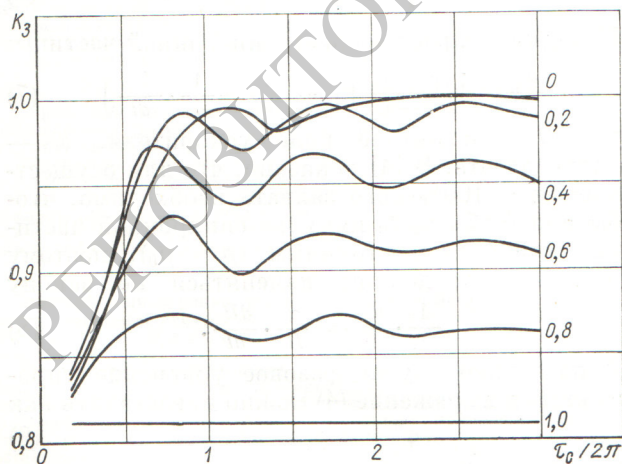
Чтобы на участке перехода отсутствовали потери частиц, площадь сепаратрисы  $S$  по крайней мере не должна убывать со временем. Используя формулу для площади сепаратрисы

$$S = 16F(\cos \varphi_S) \sqrt{\frac{eV\gamma^3}{\pi qmc^2 |1 - \alpha\gamma^2|}}, \quad (13)$$

где

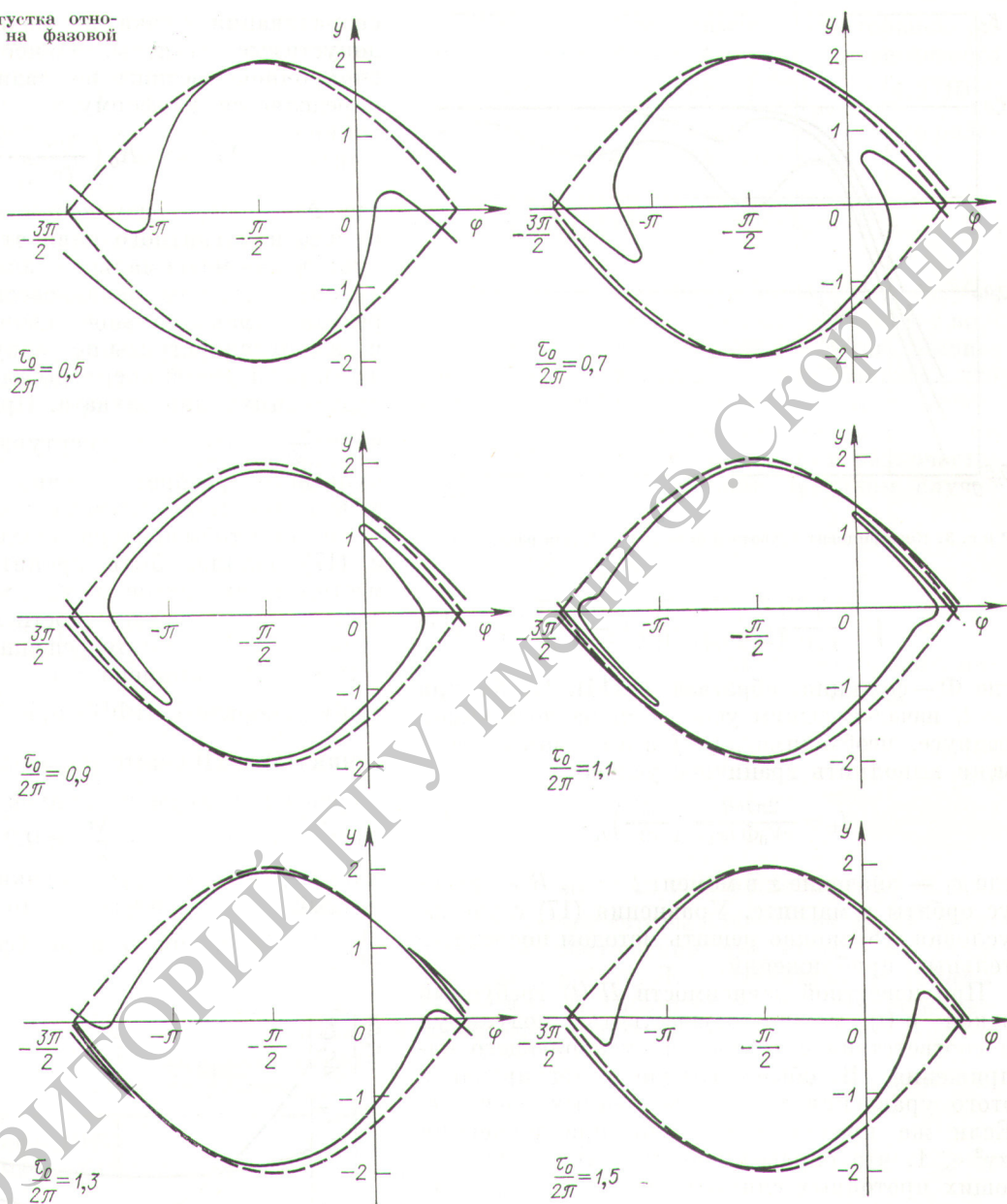
$$F(\cos \varphi_S) = \frac{\oint \sqrt{\sin \varphi + \sin \varphi_S - (\varphi + \varphi_S) \cos \varphi_S} d\varphi}{\oint \sqrt{1 + \sin \varphi} d\varphi} \quad (14)$$

зависит от синхронной фазы,



Р и с. 1. Зависимость эффективности захвата от скорости нарастания амплитуды ускоряющего напряжения.

Р и с. 2. Положение сгустка относительно сепаратрисы на фазовой плоскости.



и предполагая  $S = \text{const}$  при  $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_1$  (в этом случае импульсный разброс пучка в конце переходного района минимален), а также учитывая, что для  $t = t_0$   $F(\cos \varphi_S) = F(0) = 1$ , получим

$$1 = F(\cos \varphi_S) \sqrt{f(\tau) \frac{1 - \alpha(p_0^2 + 1)}{1 - \alpha(p^2 + 1)} \left(\frac{p^2 + 1}{p_0^2 + 1}\right)^{3/2}}. \quad (15)$$

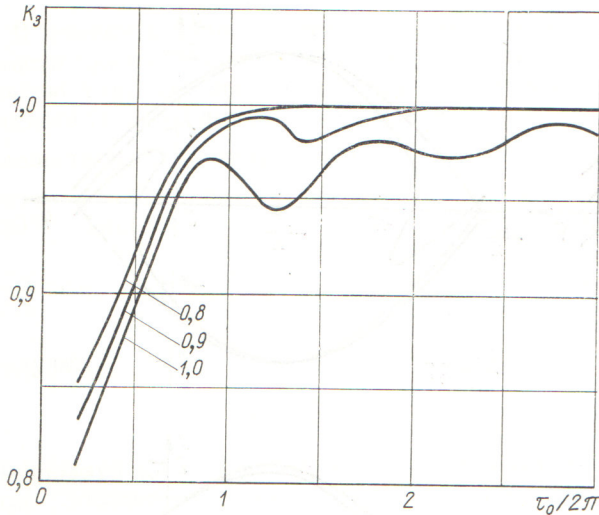
Определяя  $\cos \varphi_S$  из (15) и используя выраже-

ние для синхронной фазы

$$\cos \varphi_S = \frac{2\pi mc R_0}{eV} \frac{dp}{dt}, \quad (16)$$

запишем уравнение для изменения синхронного импульса с ростом  $\tau$  в виде

$$p' = \frac{1}{\alpha} f(\tau) \Phi(x);$$



Р и с. 3. Коэффициент захвата в момент  $t = t_0$  для различных  $\lambda$ .

$$x = \sqrt{\frac{1}{f(\tau)} \frac{1 - \alpha(p^2 + 1)}{1 - \alpha(p_0^2 + 1)} \left(\frac{p_0^2 + 1}{p^2 + 1}\right)^{3/2}}, \quad (17)$$

где  $\Phi$  — функция, обратная  $F$  (14). Чтобы при  $t = t_1$  начался режим ускорения на постоянном радиусе, необходимо для  $f$  в этот момент времени выполнить граничное условие

$$f_1 = \frac{2\pi RR_0}{cV_0\Phi(x_1)} \left(\frac{dH}{dt}\right)_{t_1}, \quad (18)$$

где  $x_1$  — значение  $x$  в момент  $t = t_1$ ,  $R$  — радиус орбиты в магните. Уравнения (17) с учетом условия (18) можно решить методом последовательных приближений.

При известной зависимости  $H(t)$  требуемый закон  $p(t)$  можно осуществить, модулируя в соответствии с (7) частоту ускоряющего напряжения. В общем случае интегрирование этого уравнения требует численных расчетов. Если же предположить, что при инъекции  $\alpha\gamma^2 \ll 1$ , что справедливо для всех существующих протонных синхротронов, то из (7) следует

$$\omega_0(t) = \omega_{0и} \frac{\beta(t)}{\beta_{и}} \left[\frac{H(t)}{H_{и}}\right]^\alpha, \quad (19)$$

где  $\omega_{0и}$ ,  $H_{и}$  и  $\beta_{и}$  — частота, поле ускорителя и скорость синхронной частицы в момент инъекции.

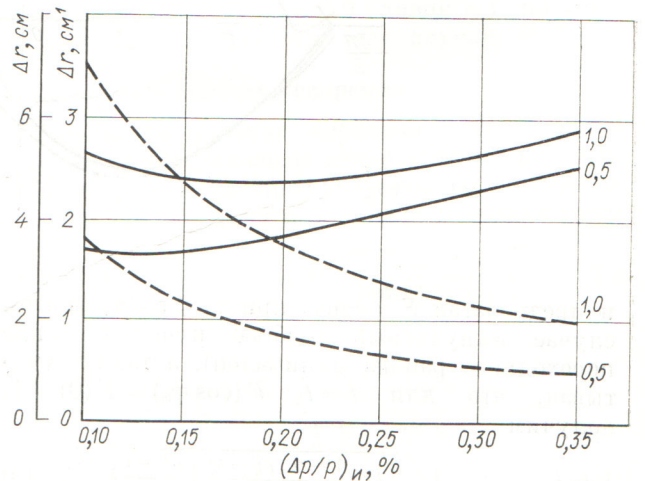
Подобранная таким способом программа высокой частоты еще не обеспечивает захвата без потерь, так как может оказаться, что или параметры фазового движения изменяются слишком быстро (неадиабатически), или величина

сворачивания пучка по радиусу выходит за допустимые пределы. Наибольшее смещение синхронной частицы по радиусу в момент  $\tau$  определяется из формулы

$$\Delta R = \psi_m R_0 \left(\frac{\Delta p_\tau}{p_0} - \frac{\Delta H_\tau}{H_{и}}\right), \quad (20)$$

где  $\Delta p_\tau$ ,  $\Delta H_\tau$  — изменения синхронного импульса и магнитного поля от момента инъекции;  $\psi_m$  — максимальное значение функции, характеризующей неравновесную орбиту. Определив максимальное сворачивание пучка и размер сепаратрисы по радиусу, можно найти часть радиальной апертуры вакуумной камеры, необходимую для захвата. При заданной величине  $\frac{dH}{dt}$  требуемая апертура зависит от импульсного разброса пучка при инъекции и в конкретных случаях требует численных расчетов. Чтобы проверить захват, уравнения (4) и (17) должны быть проинтегрированы совместно в интервале  $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_1$ . Положение частиц на фазовой плоскости при  $\tau = \tau_0$  определяется в результате решения уравнения (9).

В качестве примера рассмотрим захват частиц в ускорителе ИФВЭ при  $\frac{V_H}{V_0} = 0,2$ . Уравнения (4) и (16) интегрировались от  $\frac{\tau_0}{2\pi} = 0,8$  (первый максимум на кривой захвата, рис. 1) до  $\tau = \tau_1$  с шагом  $\frac{\Delta\tau}{2\pi} = 0,2$ . Независимо от импульсных разбросов пучка при инъекции полный захват имеет место при значениях  $\frac{\tau_1}{2\pi} \geq 2$ . Значения  $f_1$  и коэффициента захвата



Р и с. 4. Радиальная апертура вакуумной камеры ускорителя ИФВЭ, необходимая для захвата без потерь.

в момент  $t_1$  слабо зависят от вида функции  $f = f(\tau)$  в переходной области, поэтому можно ограничиться линейным ростом  $f(\tau)$ . Интегрировалось  $\sim 1000$  частиц. На рис. 4 представлены результаты расчета. Сплошными линиями показана область камеры, занимаемая синхротронными колебаниями пучка в процессе захвата  $\Delta r$  (взяты минимальные значения  $t_1$  со 100%-ным захватом). Величина сворачивания пучка по радиусу  $\Delta r_1$  от момента  $t = 0$  до  $t = t_1$  дана пунктирными кривыми. В качестве параметра указана величина  $dH/dt$ . Из рис. 4 следует, что при импульсном разбросе инжектируемого пучка  $\pm 0,25\%$  для 100%-ного захвата радиальная апертура вакуумной камеры, свободная от бетатронных колебаний и радиального искажения замкнутой орбиты, должна составлять  $\sim 4$  см для  $\frac{dH}{dt} = 0,5$  кэ/сек и  $\sim 5$  см для  $\frac{dH}{dt} = 1$  кэ/сек.

#### Допуски на параметры магнитного и высокочастотного полей

Рассмотрим влияние на захват частиц отклонений магнитного поля и радиочастоты, а также скорости их изменения от идеальных значений, когда соотношение (8) при  $0 \leq \tau \leq \tau_0$  не выполняется и энергия синхронной частицы изменяется. С учетом (7) получим:

$$\Delta p' \leq \frac{\alpha \gamma^2 p \dot{H}}{H \Omega_0 |1 - \alpha \gamma^2|} \left( \frac{\dot{\Delta H}}{\dot{H}} + \frac{\Delta H}{H} + \frac{\dot{\Delta \omega_0}}{\dot{\omega_0}} + \frac{\Delta \omega_0}{\omega_0} \right). \quad (21)$$

Результаты численных расчетов показывают, что при  $\Delta p' \leq 5 \cdot 10^{-6}$  эффективность захвата остается больше 99%. Коэффициент перед круглой скобкой в (21) примерно равен  $5 \cdot 10^{-5}$  для ускорителя ИФВЭ, т. е. сумма всех ошибок не должна превышать 10%.

Найдем допустимые уходы магнитного поля на орбите  $\left(\frac{\Delta H}{H}\right)_и$  и радиочастоты  $\left(\frac{\Delta \omega_0}{\omega_0}\right)_и$  от расчетных величин при инжекции, эквивалентные увеличению  $\lambda$  (см., например, [1, 4]):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta H}{H}\right)_и &\leq \frac{|\alpha \gamma^2 - 1|}{\alpha \gamma^2} \left(\frac{\Delta p}{p}\right)_{\text{доп}}; \\ \left(\frac{\Delta \omega_0}{\omega_0}\right)_и &\leq \frac{|\alpha \gamma^2 - 1|}{\gamma^2} \left(\frac{\Delta p}{p}\right)_{\text{доп}}, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $(\Delta p/p)_{\text{доп}}$  — допустимое относительное отклонение синхронного импульса от расчетного значения. Если принять  $\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_{\text{доп}} = 1,2 \cdot 10^{-4}$ , что соответствует изменению синхронного радиуса примерно на 0,5 мм, получим:

$$\left(\frac{\Delta H}{H}\right)_и \leq 10^{-2}, \quad \left(\frac{\Delta \omega_0}{\omega_0}\right)_и \leq 10^{-4}.$$

Таким образом, допуски на  $\Delta H/H$  и  $\Delta \omega_0/\omega_0$  получаются более жесткими по сравнению с возможными допусками на эти величины, вычисленными согласно (21). Можно считать, что прирост энергии синхронной частицы от расчетного закона происходит за счет отклонения скоростей роста магнитного поля и радиочастоты от идеальных значений. В таком случае получим

$$\frac{\dot{\Delta H}}{\dot{H}} \leq 5 \cdot 10^{-2}; \quad \frac{\dot{\Delta \omega_0}}{\dot{\omega_0}} \leq 5 \cdot 10^{-2}.$$

Требования к амплитуде высокочастотного напряжения  $V_0$  можно получить из (12):

$$\frac{\Delta V_0}{V_0} \leq \frac{2 \left(\frac{\Delta p}{p}\right)_{\text{доп}}}{\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_и}. \quad (23)$$

Приняв  $\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_и = \pm 0,25\%$ , найдем  $\frac{\Delta V_0}{V_0} \leq 0,1$ .

В заключение авторы благодарят В. И. Балбекова за обсуждение затронутых вопросов и помощь в работе, Л. А. Полякову за расчеты на ЭВМ и В. П. Сидорову за оформление иллюстративного материала.

Поступила в Редакцию 9/VIII 1972 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Коломенский А. А., Лебедев А. Н. Теория циклических ускорителей, М., Физматгиз, 1962, гл. IV.
2. Kaiser J. Proc. Phys. Soc., 63A, 52 (1950).
3. Данилкин И. С., Писарев В. Е. «Атомная энергия», 4, 503 (1958).
4. Peterson J., Morton P. UCID-10181, AS/Injection/06, 1966.