МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О ЦЕНТРАЛИЗАТОРЕ σ-НИЛЬПОТЕНТНОГО КОРАДИКАЛА σ-СУБНОРМАЛЬНОЙ ПОДГРУППЫ

И.М. Дергачева, И.П. Шабалина, Е.А. Задорожнюк

Белорусский государственный университет транспорта, *Гомель*

ON THE CENTRALIZER OF THE σ-NILPOTENT RESIDUAL OF THE σ-SUBNORMAL SUBGROUP

I.M. Dergacheva, I.P. Shabalina, E.A. Zadorozhnyuk

Belarusian State University of Transport, *Gomel*

На протяжении всей статьи все группы конечны и *G* всегда обозначает конечную группу. Более того, σ является некоторым разбиением множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т. е. $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup_{i\in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Группа *G* называется: σ*-примарной*, если *G* является σ_i-группой для некоторого *i*; σ*-нильпотентной*, если каждый главный фактор H/K в *G* является σ-центральным в *G*, т. е. $(H/K)\rtimes(G/C_G(H/K))$ является σ-примарным. Символ $G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ обозначает σ*-нильпотентный корадикал* группы *G*, т. е. пересечение всех нормальных подгрупп *N* в *G* таких, что G/N является σ-нильпотентной группой; $Z_\sigma(G)$ – это σ*-нильпотентный гиперцентр* в *G*, т. е. произведение всех нормальных подгрупп *N* в *G* таких, что либо $N=1$, либо $N \neq 1$ и каждый главный фактор *G* ниже *N* является σ-центральным в *G*. Подгруппа *A* в *G* называется σ*-субнормальной* в *G*, если имеется цепь подгрупп $A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_n = G$, такая, что либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ является σ-примарной для всех $i = 1,\ldots,n$. В данной статье мы докажем, что если *S* является σ-субнормальной подгруппой в *G* и $Z_\sigma(E)=1$ для каждой подгруппы *E* в *G* такой, что $S \leq E$, тогда $C_G(S^{\mathfrak{N}_\sigma}) \leq S^{\mathfrak{N}_\sigma}$.

Ключевые слова*:* *конечная группа*, σ*-нильпотентная группа*, σ*-субнормальная подгруппа*, σ*-нильпотентный корадикал конечной группы*, σ*-нильпотентный гиперцентр.*

Throughout this paper, all groups are finite and *G* always denotes a finite group. Moreover, σ is some partition of the set of all primes $\mathbb{P}$, that is, $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, where $\mathbb{P} = \bigcup_{i\in I} \sigma_i$ and $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ for all $i \neq j$. The group *G* is said to be: σ*-primary* if *G* is a σ_i-group for some *i*; σ*-nilpotent* if every chief factor H/K of *G* is σ-central in *G*, that is, $(H/K)\rtimes(G/C_G(H/K))$ is σ-primary. The symbol $G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ denotes the σ*-nilpotent residual* of *G*, that is, the the intersection of all normal subgroups *N* of *G* such that G/N is σ-nilpotent; $Z_\sigma(G)$ is the σ*-nilpotent hypercentre* of *G*, that is, the product of all normal subgroups *N* of *G* such that either $N=1$ or $N \neq 1$ and every chief factor of *G* below *N* is σ-central in *G*. A subgroup *A* of *G* is said to be σ*-subnormal* in *G* if there is a subgroup chain $A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_n = G$ such that either $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ or $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ is σ-primary for all $i = 1,\ldots,n$. In this paper, we prove that if *S* be a σ-subnormal subgroup of *G* and $Z_\sigma(E)=1$ for every subgroup *E* of *G* such that $S \leq E$, then $C_G(S^{\mathfrak{N}_\sigma}) \leq S^{\mathfrak{N}_\sigma}$.

Keywords: *finite group*, σ*-nilpotent group*, σ*-subnormal subgroup*, σ*-nilpotent residual of a finite group*, σ*-nilpotent hypercentre*.

Введение

На протяжении всей статьи все группы конечны и *G* всегда обозначает конечную группу; $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел. Если *n* – целое число, то символ $\pi(n)$ обозначает множество всех простых чисел, делящих *n*; как обычно, $\pi(G) = \pi(|G|)$ – множество всех простых чисел, делящих порядок группы *G*.

В дальнейшем σ является некоторым разбиением множества $\mathbb{P}$, т. е. $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup_{i\in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$.

По аналогии с обозначением $\pi(n)$, мы пишем $\sigma(n)$ для обозначения множества

$$\{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\};\ \ \sigma(G) = \sigma(|G|).$$

Группа *G* называется [1], [2]: σ*-примарной*, если *G* является σ_i-группой для некоторого *i*; σ*-nilpotent*, если каждый главный фактор H/K группы *G* является σ-центральным в *G*, т. е. $(H/K)\rtimes(G/C_G(H/K))$ является σ-примарным; σ*-разрешимой*, если каждый главный фактор группы *G* является σ-примарным.

Если $K \le H$ являются нормальными подгруппами в G и $C \le C_G(H/K)$, то можно задать полупрямое произведение $(H/K)\rtimes(G/C)$, полагая $(hK)^{gC} = g^{-1}hgK$ для всех $hK \in H/K$ и $gC \in G/C$. Следуя [3], мы говорим, что главный фактор H/K в G является $\mathfrak{F}$-*центральным* в G, если $(H/K)\rtimes(G/C_G(H/K)) \in \mathfrak{F}$. В частности говорят, что H/K является σ-*центральным* в G, если $(H/K)\rtimes(G/C)$ является σ-примарной группой.

Символ $Z_\sigma(G)$ обозначает произведение всех нормальных подгрупп N группы G таких, что либо $N = 1$, либо $N \ne 1$ и каждый главный фактор группы G ниже N является σ-центральным в G.

Подгруппа A группы G называется σ-*субнормальной* в G (Скиба [1], [14]), если в G имеется цепь подгрупп $A = A_0 \le A_1 \le \cdots \le A_n = G$ такая, что либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ является σ-примарной группой для всех $i = 1,\ldots,n$.

Попутно отметим, что подгруппа A субнормальна в G тогда и только тогда, когда она является σ^1-субнормальной в G, где $\sigma^1 = \{\{2\},\{3\},\ldots\}$ (здесь используются обозначения работ [2], [5], [6]).

σ-субнормальные подгруппы оказались весьма полезными при анализе многих вопросов теории групп (см., в частности, недавние статьи [1], [2], [4]–[8]). В данной статье докажем следующий результат, обобщающий известный результат Шенкмана о субнормальных подгруппах.

Теорема. *Пусть S – σ-субнормальная подгруппа в G. Если $Z_\sigma(E) = 1$ для каждой подгруппы E группы G такой, что $S \le E$, то*

$$C_G(S^{\mathfrak{N}_\sigma}) \le S^{\mathfrak{N}_\sigma}.$$

В этой теореме символ $S^{\mathfrak{N}_\sigma}$ обозначает σ-нильпотентный корадикал группы S, т. е. пересечение всех нормальных подгрупп N группы S таких, что секция S/N является σ-нильпотентной.

Заметим, что если S является подгруппой в G такой, что $C_G(S) = 1$, то $Z_\infty(E) = 1$ для каждой подгруппы E в G, содержащая S. Следовательно, в случае, когда $\sigma = \sigma^1$, из нашей теоремы мы получаем следующий известный результат Шенкмана.

Следствие (Шенкман [9, теорема 9.21]). *Предположим, что S – субнормальная подгруппа в G. Если $Z(G) = 1$, то $C_G(S^{\mathfrak{N}}) \le S^{\mathfrak{N}}$.*

В этом следствии $S^{\mathfrak{N}}$ обозначает нильпотентный корадикал группы S, т. е. пересечение всех нормальных подгрупп N группы S таких, что секция S/N нильпотентна.

1 Некоторые предварительные результаты

Мы используем $\mathfrak{N}_\sigma$ для обозначения класса всех σ-нильпотентных групп.

***Лемма* 1.1** [1, лемма 2.5]. *Класс $\mathfrak{N}_\sigma$ замкнут относительно взятия прямых произведений, гомоморфных образов и подгрупп. Более того, если E является нормальной подгруппой в G и $E/E \cap \Phi(G)$ является σ-нильпотентной группой, тогда E является σ-нильпотентной.*

***Лемма* 1.2.** (1) *Если N – нормальная подгруппа в G, тогда $(G/N)^{\mathfrak{N}_\sigma} = G^{\mathfrak{N}_\sigma}N/N$.*

(2) *Если E является подгруппой в G, тогда $E^{\mathfrak{N}_\sigma} \le G^{\mathfrak{N}_\sigma}$.*

Доказательство. (1) Это утверждение следует из леммы 1.1 и леммы 1 книги [10].

(2) Так как $\mathfrak{N}_\sigma$ является наследственной формацией по лемме 1.1, то следует из изоморфизма $EG^{\mathfrak{N}_\sigma}/G^{\mathfrak{N}_\sigma} \simeq E/(E \cap G^{\mathfrak{N}_\sigma})$. □

Пусть $D = M \rtimes A$ и $R = N \rtimes B$. Тогда пары (M, A) и (R, B) называются *эквивалентными*, если существуют изоморфизмы $f : M \to N$ и $g : A \to B$ такие, что $f(a^{-1}ma) = g(a^{-1})f(m)g(a)$ для всех $m \in M$ и $a \in A$.

Следующая лемма известна (см., например, лемму 3.27 в [3]), и она может быть доказана путем прямой проверки.

***Лемма* 1.3.** *Пусть $D = M \rtimes A$ и $R = N \rtimes B$. Если пары (M, A) и (R, B) эквивалентны, тогда $D \simeq R$.*

***Лемма* 1.4.** *Пусть N, M и $K < H \le G$ – нормальные подгруппы в G, где H/K является главным фактором в G.*

(1) *Если $N \le K$, то*

$$(H/K)\rtimes(G/C_G(H/K)) \simeq ((H/N)/(K/N)))\rtimes$$
$$\rtimes((G/N)/C_{G/N}((H/H)/(K/N)).$$

(2) *Если T/L является главным фактором группы G и H/K и T/L G-изоморфны, тогда $C_G(H/K) = C_G(T/L)$ и*

$$(H/K)\rtimes(G/C_G(H/K)) \simeq (T/L)\rtimes(G/C_G(T/L)).$$

(3) $$(MN/N)\rtimes(G/C_G(MN/N)) \simeq$$
$$\simeq (M/M \cap N)\rtimes(G/C_G(M/M)\cap N)).$$

Доказательство. (1) Ввиду G-изоморфизмов $H/K \simeq (H/N)/(K/N)$ и $G/C_G(H/K) \simeq$ $\simeq (G/N)/(C_G(H/K)/N)$, пары

$$(H/K, G/C_G(H/K)) \text{ и}$$
$$((H/N)/(K/N),(G/N)/C_{G/N}((H/N)/(K/N)))$$

эквивалентны. Следовательно, утверждение (1) является следствием леммы 1.3.

(2) Прямая проверка показывает, что $C = C_{G/N}(H/K) = C_G(T/L)$ и что пары

$$(H/K, G/C) \text{ и } (T/L, G/C)$$

эквивалентны. Следовательно, утверждение (2) также является следствием леммы 1.3.

(3) Это следует из *G*-изоморфизма $MN/N \simeq$ $\simeq M/M\cap N$ и утверждения (2). □

***Лемма* 1.5** [1, лемма 2.6]. (1) *Если L и E являются подгруппами в G и L является σ-субнормальной в G, то $L\cap E$ является σ-субнормальной в E;*

(2) *Если подгруппы L и E являются σ-нильпотентными и σ-субнормальными в G, тогда подгруппа $\langle L,E\rangle$ является σ-субнормальной в G и эта подгруппа σ-нильпотентна.*

***Лемма* 1.6.** *Пусть N – нормальная подгруппа в G.*

(1) *Если G/N является σ-нильпотентной группой и U является минимальным дополнением к N в G, тогда U также является σ-нильпотентной.*

(2) *Если U является подгруппой в G такой, что U является σ-нильпотентна и $NU=G$, тогда $Z := U\cap C_G(N)$ – нормальная подгруппа в G такая, что $Z \le Z_\sigma(G)$.*

Доказательство. (1) Это следует из леммы 1.1 и того факта, что $U\cap N \le \Phi(U)$ ввиду минимальности *U*.

(2) Поскольку $G=NU$, *Z* является нормальной подгруппой в *G*. Более того, если H/K – произвольный главный фактор группы *U* ниже *Z*, то H/K является σ-центральным в *U* и H/K является главным фактором *G*, так как $N\le C_G(Z)$. Также мы имеем $N \le C_G(H/K)$ и поэтому

$$C_G(H/K) = N(C_G(H/K)\cap U) = NC_U(H/K),$$

что влечет

$$G/C_G(H/K) = NU/NC_U(H/K) \simeq$$
$$\simeq U/(U\cap NC_U(H/K)) =$$
$$= U/(C_U(H/K)(U\cap N) = U/(C_U(H/K).$$

Тогда пары

$$(H/K, U/C_U(H/K))\text{è}\,(H/K, G/C_G(H/K))$$

эквивалентны, поэтому H/K является σ-центральным в *G* по лемме 1.4. Следовательно, $Z\le Z_\sigma(G)$. □

***Теорема* 1.7.** *Для каждого разбиения σ множества $\mathbb{P}$ имеет место*

$$C_G(G^{\mathfrak{N}_\sigma}) \le Z_\sigma(G)G^{\mathfrak{N}_\sigma}.$$

Доказательство. Пусть *U* – минимальное добавление к $G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ в *G*. Из леммы 1.1 следует, что $T/C_G(G^{\mathfrak{N}_\sigma}) \simeq U/(U\cap C_G(G^{\mathfrak{N}_\sigma}))$ является σ-нильпотентной группой, поэтому

$$T^{\mathfrak{N}_\sigma} \le C_G(G^{\mathfrak{N}_\sigma}).$$

С другой стороны, $T^{\mathfrak{N}_\sigma}\le G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ по лемме 1.2 (2). Следовательно, $T/(C_G(G^{\mathfrak{N}_\sigma})\cap G^{\mathfrak{N}_\sigma})$ является σ-нильпотентной группой и, следовательно, ввиду леммы 1.6 (1), для некоторой σ-нильпотентной подгруппы *H* группы *T* мы имеем

$$T = (C_G(G^{\mathfrak{N}_\sigma})\cap G^{\mathfrak{N}_\sigma})H,$$

следовательно,

$$C_G(G^{\mathfrak{N}_\sigma}) = (C_G(G^{\mathfrak{N}_\sigma})\cap G^{\mathfrak{N}_\sigma})(C_G(G^{\mathfrak{N}_\sigma})\cap H),$$

так как $C_G(G^{\mathfrak{N}_\sigma})\le T$. Тогда

$$G = G^{\mathfrak{N}_\sigma} K \le G^{\mathfrak{N}_\sigma} T = G^{\mathfrak{N}_\sigma}(C_G(G^{\mathfrak{N}_\sigma})\cap G^{\mathfrak{N}_\sigma})H = G^{\mathfrak{N}_\sigma} H$$

и, таким образом, $G=G^{\mathfrak{N}_\sigma} H$. Следовательно, $C_G(G^{\mathfrak{N}_\sigma})\cap H \le Z_\sigma(G)$ по лемме 1.6 (2), поэтому $C_G(G^{\mathfrak{N}_\sigma})\le Z_\sigma(G)G^{\mathfrak{N}_\sigma}$. □

2 Доказательство основного результата

Предположим, что эта теорема не верна, и пусть *G* является контрпримером с минимальной $|G|+|S|$. Тогда $S<G$ по теореме 1.7. По гипотезе, есть цепочка подгрупп

$$S = S_0 \le S_1 \le \cdots \le S_n = G,$$

так что либо $S_{i-1}\trianglelefteq S_i$, либо $S_i/(S_{i-1})_{S_i}$ является σ-примарной для всех $i=1,\ldots,n.$ Мы можем предполагать без ограничения общности, что $M := S_{n-1} < G$, так как $S<G$. Пусть $D = S^{\mathfrak{N}_\sigma}$ и $C = C_G(D)$. Тогда $C\cap S \le Z_\sigma(S)D = D$ по теореме 1.7 и гипотезе.

(1) $C_E(D)\le D$ *для каждой собственной подгруппы E группы G, содержащей S.*

Гипотеза справедлива для (W,S) для каждой подгруппы *W* группы *G*, содержащей *S* по лемме 1.5 (1), поэтому мы имеем $C_E(D)\le D$ ввиду выбора группы *G*. Заметим, что $S\le N_G(C)$, так как $S\le N_G(D)$ и поэтому *SC* является подгруппой в *G* и, следовательно, $SC=G$, поскольку в противном случае $C\le C_E(D)\le D$.

(2) $D\trianglelefteq G$ (Поскольку *D* является характеристикой в *S*, это непосредственно следует из утверждения (1)).

(3) $S=M$ *– максимальная подгруппа в G и* $G/D = (CD/D)\rtimes(M/D)$.

Пусть $S\le V$, где *V* – максимальная подгруппа в *G*. Тогда $C_V(D)\le D$ соглано пункту (1), поэтому $V = S(V\cap C) = SC_V(D)\le SD = S$ и, следовательно, $S=V=M$. Наконец заметим, что из $C\cap S\le D$ следует, что

$$G/D = (CD/D)\rtimes(M/D).$$

(4) *S является нормальным в G. Следовательно, G/S является циклической группой простого порядка.*

Предположим, что *S* не является нормальной в *G*. Тогда, по утверждению (3),

$$G/S_G = G/M_G$$

является σ_i-группой для некоторого i и поэтому $D \le G^{\mathfrak{N}_\sigma} \le S_G$, где D является нормальной в G по пункту (2). Ясно, что G/D является σ-разрешимой группой. Следовательно,

$$G/D = (CD/D) \rtimes (M/D),$$

где M/D – максимальная подгруппа G/D по пункту (3). Тогда CD/D является минимальной нормальной подгруппой в G/D. Следовательно, CD/D является σ-примарной группой поскольку G/D является σ-разрешимой. С другой стороны, M/D является σ-субнормальной σ-нильпотентной подгруппой в G/D. Следовательно G/D является σ-нильпотентной по лемме 1.5 (2). Но тогда $G^{\mathfrak{N}_\sigma} = D$ и поэтому $C \le D$ по теореме 1.7, противоречие. Поэтому S нормальна в G и поэтому G/S является циклической группой простого порядка по утверждению (3). Следовательно, мы имеем (4).

Заключительное противоречие. Из утверждений (1) и (4) следует, что

$$G/D = (CD/D) \rtimes (S/D) = (CD/D) \times (S/D)$$

и CD/D является циклической группой. Но тогда G/D является σ-нильпотентной группой и поэтому $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$, следовательно,

$$C \le Z_\sigma(G) G^{\mathfrak{N}_\sigma} = G^{\mathfrak{N}_\sigma} = D,$$

вопреки нашему предположению о паре (G, S). □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Skiba*, *A.N.* On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – № 436. – P. 1–16.

2. *Skiba*, *A.N.* Some characterizations of finite σ-soluble $P\sigma T$-groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – № 495. – P. 114–129.

3. *Shemetkov*, *L.A.* Formations of Algebraic Systems / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba. – Moscow: Nauka, 1989.

4. *Скиба*, *А.Н.* О σ-свойствах конечных групп I / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 89–96.

5. *Skiba*, *A.N.* On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2020. – № 550. – P. 69–85.

6. *Skiba*, *A.N.* On some classes of sublattices of the subgroup lattice / A.N. Skiba // J. Belarusian State Univ. Math. Informatics. – 2019. – № 3. – P. 35–47.

7. *Beidleman*, *J.C.* On τ_σ-quasinormal subgroups of finite groups / J.C. Beidleman, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2017. – № 20. – P. 955–964.

8. *On σ-subnormality criteria in finite σ-soluble groups* / A. Ballester-Bolinches, S.F. Kamornikov, M.C. Pedraza-Aguilera, V. Perez-Calabuig // Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas. – 2020. – Vol. 114, № 94. – DOI: doi.org/10.1007/s13398-020-00824-4

9. *Schenkman*, *E.* On the tower theorem for finite groups / E. Schenkman // Pac. J. Math. – 1955. – № 5. – P. 995–998.

10. *Shemetkov*, *L.A.* Formations of finite groups / L.A. Shemetkov. – Moscow: Nauka, 1978.

Поступила в редакцию 31.10.2020.