Проблемы физики, математики и техники, № 4 (45), 2020

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О МИНИМАЛЬНЫХ σ-ЛОКАЛЬНЫХ НЕ $\mathfrak{H}$-ФОРМАЦИЯХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

И.Н. Сафонова

Белорусский государственный университет, *Минск*

ON MINIMAL σ-LOCAL NON-$\mathfrak{H}$-FORMATIONS OF FINITE GROUPS

I.N. Safonova

Belarusian State University, *Minsk*

Изучаются критические σ-локальные формации конечных групп, где σ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$. Получен критерий для критических σ-локальных формаций. Дано описание критических σ-локальных формаций для формаций всех Π-групп, всех σ-разрешимых Π-групп, где $\varnothing \neq \Pi \subseteq \sigma$, а также получено описание минимальных σ-локальных не σ-разрешимых формаций конечных групп.

Ключевые слова: *конечная группа*, *формационная* σ*-функция*, σ*-локальная формация*, *локальная формация*, *критическая* σ*-локальная формация*, σ*-разрешимая группа.*

The critical σ-local formations of finite groups are studied, where σ is some partition of the set of all primes $\mathbb{P}$. A criterion is obtained for critical σ-local formations. A description of critical σ-local formations is given for formations of all Π-groups, all σ-soluble Π-groups, where $\varnothing \neq \Pi \subseteq \sigma$, and a description of minimal σ-local non-σ-soluble formations of finite groups is obtained.

Keywords: *finite group*, *formation* σ*-function*, σ*-local formation*, *local formation*, *critical* σ*-local formation*, σ*-soluble group.*

Введение

При изучении внутреннего структурного строения локальных формаций и их классификации важную роль играют минимальные локальные не $\mathfrak{H}$-формации [1] или $\mathfrak{H}_l$-критические формации [2], т. е. такие локальные формации $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, все собственные локальные подформации которых содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$.

Задача изучения критических формаций была поставлена Л.А. Шеметковым [1]. Решение этой задачи для локальных формаций было получено А.Н. Скибой в цикле работ 1980–1993 гг. и завершилось построением теории критических локальных формаций, наиболее общим результатом которой стало описание минимальных локальных не $\mathfrak{H}$-формаций для случая, когда $\mathfrak{H}$ – произвольная формация классического типа [3], т. е. формация имеющая такой локальный экран, все неабелевы значения которого локальны. Результаты теории минимальных локальных не $\mathfrak{H}$-формаций широко использовались в вопросах классификации локальных формаций, а также при изучении несократимых факторизаций ограниченных локальных формаций [4]–[5].

В дальнейшем критические формации изучались для различных типов формаций конечных групп. В частности, в работах [6]–[20] разработана теория критических ω-локальных формаций. Ряд приложений теории минимальных ω-локальных не $\mathfrak{H}$-формаций получен при изучении внутреннего строения ω-локальных формаций, имеющих заданную структуру подформаций, а также при изучении свойств полугруппы ω-локальных формаций, см., например, [21]–[23].

Разработка методов обобщенно локальных или σ-локальных формаций приводит к необходимости изучения и классификации критических σ-локальных формаций. При этом, следуя [1]–[2], *минимальной* σ*-локальной не* $\mathfrak{H}$*-формацией* или $\mathfrak{H}_\sigma$*-критической формацией* мы называем σ-локальную формацию $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, все собственные σ-локальные подформации которой содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$.

В данной работе получен критерий для минимальных σ-локальных не $\mathfrak{H}$-формаций. Дано описание минимальных σ-локальных не $\mathfrak{H}$-формаций для таких σ-локальных классов конечных групп $\mathfrak{H}$, как формация всех Π-групп, формация всех σ-разрешимых Π-групп, где $\varnothing \neq \Pi \subseteq \sigma$. В частности, получено описание минимальных σ-локальных не σ-разрешимых формаций конечных групп.

Для классического случая, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\},\{3\},\{5\},\ldots\}$ в качестве следствий полученных результатов приведено описание минимальных локальных не $\mathfrak{H}$-формаций, где $\mathfrak{H}$ – формация всех π-групп, формация всех разрешимых π-групп, где $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, формация всех разрешимых групп.

1 Обозначения и определения

Основные определения, обозначения и общие свойства σ-локальных формаций представлены в работах [24]–[30]. Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$. Если n целое число, то $\sigma(n)$ обозначает множество $\{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$; $\sigma(G) = \sigma(|G|)$. Группа G называется [24]: σ-примарной, если G является σ_i-группой для некоторого i; σ-нильпотентной, если каждый главный фактор H/K группы G является σ-центральный в G, то есть полупрямое произведение $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$ является σ-примарным; σ-разрешимой, если $G = 1$ или $G \neq 1$ и каждый главный фактор G является σ-примарным. Класс всех σ-разрешимых групп обозначают через $\mathfrak{S}_\sigma$, а через $\mathfrak{N}_\sigma$ обозначают класс всех σ-нильпотентных групп.

Пусть $\varnothing \neq \Pi \subseteq \sigma$. Тогда $\Pi' = \sigma \setminus \Pi$. Группу G называют Π-группой, если $\sigma(G) \subseteq \Pi$. Через $\mathfrak{G}_\Pi$ обозначают класс всех Π-групп, а через $\mathfrak{S}_\Pi$ обозначают класс всех σ-разрешимых Π-групп. В частности, если $\Pi = \{\sigma_i\}$, то $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ – класс всех σ_i-групп, $\mathfrak{G}_{\sigma_i'}$ – класс всех σ_i'-групп, соответственно, $\mathfrak{S}_{\sigma_i}$ – класс всех σ-разрешимых σ_i-групп, $\mathfrak{S}_{\sigma_i'}$ – класс всех σ-разрешимых σ_i'-групп.

Функция f вида $f : \sigma \to \{\text{формации групп}\}$ называется формационной σ-функцией. Для всякой формационной σ-функции f класс $LF_\sigma(f)$ определяется следующим образом:

$$LF_\sigma(f) = (G \mid G = 1 \text{ или } G \neq 1 \text{ и } G / O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G)).$$

Мы также используем символ $F_{\{\sigma_i\}}(G)$ вместо $O_{\sigma_i', \sigma_i}(G)$. Если для некоторой формационной σ-функции f имеет место $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, то говорят, что формация $\mathfrak{F}$ является σ-локальной, а f является σ-локальным определением формации $\mathfrak{F}$.

Если f является формационной σ-функцией, то символ $\mathrm{Supp}(f)$ обозначает носитель f, то есть, множество всех σ_i таких, что $f(\sigma_i) \neq \varnothing$. Формационную σ-функцию f называют: внутренней, если $f(\sigma_i) \subseteq LF_\sigma(f)$ для всех i; полной, если $f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$ для всех i.

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторая совокупность групп. Через $l_\sigma \mathrm{form}(\mathfrak{X})$ обозначают пересечение всех σ-локальных формаций, содержащих $\mathfrak{X}$, и называют σ-локальной формацией, порожденной совокупностью групп $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{F} = l_\sigma \mathrm{form}(G)$ для некоторой группы G, то $\mathfrak{F}$ называют однопорожденной σ-локальной формацией. Для всякого класса групп $\mathfrak{F}$ также полагают

$$\mathfrak{F}(\sigma_i) = (G / F_{\{\sigma_i\}}(G) \mid G \in \mathfrak{F}).$$

Пусть $\mathfrak{H}$ – некоторый класс групп. Формацию $\mathfrak{F}$ называют минимальной не $\mathfrak{F}$-формацией или $\mathfrak{F}$-критической формацией, если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все собственные подформации из $\mathfrak{F}$ содержатся в $\mathfrak{H}$. Следуя [1]–[2] σ-локальную формацию $\mathfrak{F}$ будем называеть *минимальной σ-локальной не $\mathfrak{H}$-формацией* или *$\mathfrak{H}_\sigma$-критической формацией*, если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все ее собственные σ-локальные подформации содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$.

2 Вспомогательные результаты

Для доказательства основного результата работы нам понадобятся следующие известные факты теории формаций.

Лемма 2.1 является частным случаем леммы 2.6 [28].

Лемма 2.1 [28]. *Пусть*

$$\mathfrak{F} = l_\sigma \mathrm{form}(\mathfrak{X}) = LF_\sigma(f)$$

– σ-локальная формация порожденная $\mathfrak{X}$ и $\Pi = \sigma(\mathfrak{X})$. Пусть m – формационная σ-функция, такая что $m(\sigma_i) = \mathrm{form}(\mathfrak{X}(\sigma_i))$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $m(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$. Тогда:

(1) $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$,

(2) *m является σ-локальным определением $\mathfrak{F}$,*

(3) *$m(\sigma_i) \subseteq f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$ для всех i.*

Отметим, что σ-локальное определение m формации $\mathfrak{F}$ из леммы 2.1 называют наименьшим σ-локальным определением формации $\mathfrak{F}$.

Лемма 2.2 [28]. *Пусть f и h – формационые σ-функции и пусть* $\Pi = \mathrm{Supp}(f)$. Допустим, что $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f) = LF_\sigma(h)$. Тогда:

(1) $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$;

(2) $\mathfrak{F} = (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\sigma_i'} \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)) \cap \mathfrak{G}_\Pi$. *Следовательно, $\mathfrak{F}$ является насыщенной формацией.*

(3) *Если каждая группа из $\mathfrak{F}$ является σ-разрешимой, то* $\mathfrak{F} = (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{S}_{\sigma_i'} \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)) \cap \mathfrak{S}_\Pi$.

(4) *Если $\sigma_i \in \Pi$, то*

$$\mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}.$$

(5) *$\mathfrak{F} = LF_\sigma(F)$, где F – единственная формационная σ-функция, такая что $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} F(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $F(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$. Более того, $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F})$ для всех i.*

Лемма 2.3 [4, с. 167.]. *Пусть A – монолитическая группа с монолитом P. Тогда если $P \not\subseteq \Phi(A)$, то $\mathrm{form}(A/P)$ – единственная максимальная подформация формации $\mathrm{form}(A)$.*

3 Основной результат

Следуя [31], на множестве всех формационных σ-функций определим частичный порядок "$\leq$" следующим образом: если f_1 и f_2 – формационные σ-функции, то $f_1 \leq f_2$, если $f_1(\sigma_i) \subseteq f_2(\sigma_i)$ для любого $\sigma_i \in \sigma$.

Прежде чем мы докажем теорему 3.1 установим справедливость следующих лемм.

***Лемма* 3.1.** *Пусть* $\mathfrak{F}_j = LF_\sigma(f_j)$, *где* f_j *– наименьшее* σ*-локальное определение формации* $\mathfrak{F}_j$, $j = 1, 2$. *Тогда в том и только в том случае* $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, *когда* $f_1 \leq f_2$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ и $G \in \mathfrak{F}_1$. Тогда $G \in \mathfrak{F}_2$. Значит, в силу леммы 2.1 и включения $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ для любого $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F}_1)$ имеет место

$$f_1(\sigma_i) = \mathrm{form}(G / F_{\{\sigma_i\}}(G) \mid G \in \mathfrak{F}_1) \subseteq$$

$$\subseteq \mathrm{form}(G / F_{\{\sigma_i\}}(G) \mid G \in \mathfrak{F}_2) = f_2(\sigma_i).$$

Так как для любого $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{F}_1)$ ввиду леммы 2.1 $f_1(\sigma_i) = \varnothing$, то $f_1(\sigma_i) \subseteq f_2(\sigma_i)$. Следовательно, $f_1 \leq f_2$.

Достаточность. Пусть имеет место $f_1 \leq f_2$. Тогда справедливо включение $f_1(\sigma_i) \subseteq f_2(\sigma_i)$ для всех *i*. Пусть $G \in \mathfrak{F}_1$. Применяя лемму 2.1 с учетом $f_1 \leq f_2$, получим

$$G / F_{\{\sigma_i\}}(G) \in f_1(\sigma_i) \subseteq f_2(\sigma_i)$$

для любого $\sigma_i \in \sigma(G)$. Но тогда $G \in \mathfrak{F}_2$. Поэтому $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$. □

***Лемма* 3.2.** *Если* $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$ *и*

$$G / O_{\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$$

для некоторого $\sigma_i \in \sigma(G)$, *то* $G \in \mathfrak{F}$.

Доказательство. Поскольку

$$G / O_{\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F},$$

то $f(\sigma_i) \neq \varnothing$. Но тогда $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$ по лемме 2.2 (1). Кроме того, $G / O_{\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$ влечет также, что $G^{f(\sigma_i)\cap\mathfrak{F}} \subseteq O_{\sigma_i}(G) \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Следовательно, $G \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F})$. Ввиду леммы 2.2 (4) получаем $G \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}$. □

***Теорема* 3.1.** *Пусть* $\mathfrak{H} = LF_\sigma(H)$, $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, *где H – каноническое* σ*-локальное определение формации* $\mathfrak{H}$, *f – минимальное* σ*-локальное определение формации* $\mathfrak{F}$. *Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ *является минимальной* σ*-локальной не* $\mathfrak{H}$*-формацией, когда* $\mathfrak{F} = l_\sigma\mathrm{form}G$, *где G – такая группа минимального порядка из* $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ *с монолитом* $P = G^{\mathfrak{H}}$, *что для всех* $\sigma_i \in \sigma(P)$ *формация* $f(\sigma_i)$ *является* $(H(\sigma_i))$*-критической.*

Доказательство. Необходимость. Обозначим через G – группу минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$. Ясно, что $l_\sigma\mathrm{form}G \subseteq \mathfrak{F}$. Поскольку при этом все собственные σ-локальные подформации из $\mathfrak{F}$ содержатся в $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F} = l_\sigma\mathrm{form}G$.

Пусть $\sigma_i \in \sigma(P)$. Предположим, что $f(\sigma_i) = (1)$. Тогда в силу леммы 2.1 имеем

$$f(\sigma_i) = \mathrm{form}(G / F_{\{\sigma_i\}}(G)) = (1).$$

Поэтому $F_{\{\sigma_i\}}(G) = O_{\sigma_i',\sigma_i}(G) = G$. Значит, $G \in \mathfrak{G}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Так как G – монолитическая группа и $\sigma_i \in \sigma(P)$, то $G \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}$, т. е. G является σ_i-группой. Поскольку при этом $G \notin \mathfrak{H}$, то $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{H})$ и $H(\sigma_i) = \varnothing$ ввиду леммы 2.2 (5). Но тогда $f(\sigma_i) = (1)$ – $(H(\sigma_i))$-критическая формация.

Пусть теперь $f(\sigma_i) \neq (1)$. По лемме 2.1 имеем

$$f(\sigma_i) = \mathrm{form}(G / F_{\{\sigma_i\}}(G)).$$

Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольная собственная подформация из $f(\sigma_i)$. Допустим, что $\mathfrak{X} \not\subseteq H(\sigma_i)$ и обозначим через K группу минимального порядка из $\mathfrak{X} \setminus H(\sigma_i)$. Тогда K – монолитическая группа с монолитом $K^{H(\sigma_i)}$. Поскольку $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}H(\sigma_i)$, то $O_{\sigma_i}(K) = 1$.

Пусть S – некоторая σ_i-группа, $M = S \wr K = T \rtimes K$ – регулярное сплетение групп S и K, где T – база сплетения M. Тогда $O_{\sigma_i'}(M) = 1$ и $F_{\{\sigma_i\}}(M) = O_{\sigma_i}(M) = T(O_{\sigma_i}(M) \cap K) = T$, так как $O_{\sigma_i}(K) = 1$. Поскольку $K \in \mathfrak{X} \subseteq f(\sigma_i)$, то $M = T \rtimes K \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}f(\sigma_i)$. Но в силу леммы 2.2 (4) имеет место включение $\mathfrak{G}_{\sigma_i}f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$. Поэтому $l_\sigma\mathrm{form}M \subseteq \mathfrak{F}$.

Допустим, что $l_\sigma\mathrm{form}M = \mathfrak{F}$. Тогда по лемме 2.1 имеем

$$f(\sigma_i) = \mathrm{form}(M / F_{\{\sigma_i\}}(M)) =$$

$$= \mathrm{form}(M / T) = \mathrm{form}K \subseteq \mathfrak{X} \subset f(\sigma_i).$$

Противоречие. Следовательно, $l_\sigma\mathrm{form}M \subset \mathfrak{F}$. Значит, $l_\sigma\mathrm{form}M \subseteq \mathfrak{H}$. Но тогда по лемме 2.1 (3) имеем $M / F_{\{\sigma_i\}}(M) \simeq K \in H(\sigma_i)$. Снова получили противоречие. Поэтому $\mathfrak{X} \subseteq H(\sigma_i)$. Таким образом, всякая собственная подформация из $f(\sigma_i)$ содержится в $H(\sigma_i)$. Предположим, что $f(\sigma_i) \subseteq H(\sigma_i)$.

Рассмотрим прежде случай, когда P является σ-примарной группой. Тогда поскольку $\sigma_i \in \sigma(P)$, то P – σ_i-группа. Значит, $O_{\sigma_{i'}}(G)=1$ и $O_{\sigma_i}(G)=F_{\{\sigma_i\}}(G)$. По лемме 2.1 имеем

$$G/O_{\sigma_i}(G)=G/F_{\{\sigma_i\}}(G)\in f(\sigma_i).$$

Так как по предположению $f(\sigma_i)\subseteq H(\sigma_i)$, то $G/O_{\sigma_i}(G)\in H(\sigma_i)$. Но тогда $G\in\mathfrak{H}$ в силу леммы 3.2. Последнее противоречит выбору группы G.

Значит, P не является σ-примарной группой. Поскольку при этом P – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $\sigma_i\in\sigma(P)$, то $O_{\sigma_i}(G)=1$ и $O_{\sigma_{i'}}(G)=1$. Значит, $F_{\{\sigma_i\}}(G)=1$. Применяя теперь лемму 2.1 имеем

$$G\simeq G/F_{\{\sigma_i\}}(G)\in f(\sigma_i)\subseteq H(\sigma_i)\subseteq\mathfrak{H}.$$

Полученное противоречие показывает, что $f(\sigma_i)\not\subseteq H(\sigma_i)$. Таким образом, $f(\sigma_i)$ является $(H(\sigma_i))$-критической формацией.

Достаточность. Пусть выполняются условия теоремы. Понятно, что $\mathfrak{F}\not\subseteq\mathfrak{H}$. Пусть $\mathfrak{L}$ – произвольная собственная σ-локальная подформация из $\mathfrak{F}$, l – минимальное σ-локальное определение $\mathfrak{L}$. Пусть $\sigma_i\in\sigma(G)\setminus\sigma(P)$. Тогда $P\subseteq F_{\{\sigma_i\}}(G)$ и $F_{\{\sigma_i\}}(G)/P=F_{\{\sigma_i\}}(G/P)$. Поскольку $P=G^{\mathfrak{H}}$, то

$$G/F_{\{\sigma_i\}}(G)\simeq(G/P)/(F_{\{\sigma_i\}}(G)/P)=$$
$$=(G/P)/F_{\{\sigma_i\}}(G/P)\in H(\sigma_i).$$

Следовательно,

$$f(\sigma_i)\subseteq\mathfrak{G}_{\sigma_i}f(\sigma_i)=$$
$$=\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathrm{form}(G/F_{\{\sigma_i\}}(G))\subseteq\mathfrak{G}_{\sigma_i}H(\sigma_i)=H(\sigma_i).$$

Также ввиду леммы 3.1 имеет место включение $l(\sigma_i)\subseteq f(\sigma_i)$. Следовательно, $l(\sigma_i)\subseteq H(\sigma_i)$. Пусть $\sigma_i\in\sigma(P)$. Допустим, что $l(\sigma_i)=f(\sigma_i)$. Если при этом P – σ_i-группа, то $F_{\{\sigma_i\}}(G)=$ $=O_{\sigma_i}(G)$ и поскольку

$$G/O_{\sigma_i}(G)=G/F_{\{\sigma_i\}}(G)\in f(\sigma_i)=l(\sigma_i)\subseteq\mathfrak{L},$$

то $G\in\mathfrak{L}$ по лемме 3.2. Но тогда имеет место включение $\mathfrak{F}=l_\sigma\mathrm{form}G\subseteq\mathfrak{L}\subset\mathfrak{F}$. Противоречие. Поэтому P не является σ-примарной группой. Так как P – единственная минимальная нормальная подгруппа G, то $F_{\{\sigma_i\}}(G)=1$. Но тогда

$$G\simeq G/F_{\{\sigma_i\}}(G)\in f(\sigma_i)=l(\sigma_i)\subseteq\mathfrak{L}.$$

Снова получаем, что $G\in\mathfrak{L}$, что невозможно. Таким образом, $l(\sigma_i)\subset f(\sigma_i)$. Поскольку по условию формация $f(\sigma_i)$ является $(H(\sigma_i))$-критической, то $l(\sigma_i)\subseteq H(\sigma_i)$. В силу леммы 2.1 (1) имеет место равенство $\sigma(G)=\sigma(\mathfrak{F})$. Следовательно, $\mathfrak{L}\subseteq\mathfrak{H}$. Но тогда $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{H}_\sigma$-критическая формация. □

В классическом случае, когда $\sigma=\sigma^1=$ $=\{\{2\},\{3\},\{5\},\ldots\}$ получаем следующий известный результат.

***Следствие* 3.1** [4, с. 169.]. *Пусть $\mathfrak{H}=LF(H)$, $\mathfrak{F}=LF(f)$, где H – канонический локальный экран формации $\mathfrak{H}$, f – минимальный локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной локальной не $\mathfrak{H}$-формацией, когда $\mathfrak{F}=l\mathrm{form}G$, где G – такая группа минимального порядка из $\mathfrak{F}\setminus\mathfrak{H}$ с монолитом $P=G^{\mathfrak{H}}$, что для всех $p\in\pi(P)$ формация $f(p)$ является $(H(p))$-критической.*

4 Минимальные σ-локальные не $\mathfrak{G}_\Pi$-формации

Напомним, что если $\varnothing\neq\Pi\subseteq\sigma$, то через $\mathfrak{G}_\Pi$ обозначают формацию всех Π-групп. Ввиду замечания 2.4 [28] формация $\mathfrak{G}_\Pi$ является тотально σ-локальной.

***Теорема* 4.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – σ-локальная формация, $\mathfrak{F}\not\subseteq\mathfrak{G}_\Pi$, где $\varnothing\neq\Pi\subseteq\sigma$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной σ-локальной не $\mathfrak{G}_\Pi$-формацией, когда $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}_{\sigma_i}=l_\sigma\mathrm{form}(G)$, где G – простая σ_i-группа для некоторого $\sigma_i\notin\Pi$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ – минимальная σ-локальная не $\mathfrak{G}_\Pi$-формация. Выберем в $\mathfrak{F}\setminus\mathfrak{G}_\Pi$ группу G минимального порядка. Тогда G – монолитическая группа с монолитом $R=G^{\mathfrak{G}_\Pi}$. Поскольку $l_\sigma\mathrm{form}(G)\subseteq\mathfrak{F}$ и любая собственная σ-локальная подформация из $\mathfrak{F}$ содержится в $\mathfrak{G}_\Pi$, то $\mathfrak{F}=l_\sigma\mathrm{form}(G)$. Покажем, что группа G удовлетворяет условию теоремы.

Пусть f – наименьшее σ-локальное определение формации $\mathfrak{F}$ и H – каноническое σ-локальное определение формации $\mathfrak{G}_\Pi$. Ввиду теоремы 3.1 для всех $\sigma_i\in\sigma(R)$ формация $f(\sigma_i)$ является $(H(\sigma_i))$-критической. По лемме 2.1 имеем $f(\sigma_i)=\mathrm{form}(G/F_{\{\sigma_i\}}(G))$ для всех $\sigma_i\in\sigma(G)$ и $f(\sigma_i)=\varnothing$ для всех $\sigma_i\notin\sigma(G)$. Ввиду замечания 2.4 [28] $H(\sigma_i)=\mathfrak{G}_\Pi$ для всех $\sigma_i\in\Pi$ и $H(\sigma_i)=\varnothing$ для всех $\sigma_i\in\Pi'$.

Допустим, что R – σ-примарная группа и пусть $\sigma_i\in\sigma(R)$. Тогда R – σ_i-группа. Рассмотрим прежде случай, когда $\sigma_i\not\in\Pi$. Тогда поскольку R – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, то $O_{\sigma_{i'}}(G)=1$.

Следовательно, $F_{\{\sigma_i\}}(G) = O_{\sigma_i}(G)$. Ввиду того, что $f(\sigma_i) = \mathrm{form}(G / F_{\{\sigma_i\}}(G))$ – минимальная не $H(\sigma_i)$ -формация и $H(\sigma_i) = \varnothing$, то

$$f(\sigma_i) = \mathrm{form}(G / F_{\{\sigma_i\}}(G)) = (1).$$

Значит, $G / F_{\{\sigma_i\}}(G) = 1$ и $G = F_{\{\sigma_i\}}(G) = O_{\sigma_i}(G)$. Таким образом, G – σ_i -группа, $\sigma_i \notin \Pi$. Поскольку $G / R \in \mathfrak{G}_{\Pi}$, и при этом G – Π' -группа, то $G = R$. Но G – монолитическая группа. Следовательно, $G = R$ – простая σ_i -группа, где $\sigma_i \not\subseteq \Pi$. Поскольку $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ – наследственная формация, то $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$. Значит, в силу леммы 2.2 (4) имеем $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Поэтому $\mathfrak{F} = l_{\sigma}\mathrm{form}(G) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Таким образом, группа G удовлетворяет условию теоремы.

Допустим теперь, что $\sigma_i \in \Pi$. Тогда $R \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ и $G / R \in \mathfrak{G}_{\Pi}$. Следовательно, $G^{\mathfrak{G}_{\Pi}} \subseteq R$ и $G \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\Pi} = \mathfrak{G}_{\Pi}$. Противоречие. Поэтому данный случай невозможен.

Пусть теперь R не является σ -примарной группой. Тогда ввиду монолитичности группы G для любого $\sigma_i \in \sigma(R)$ имеет место $O_{\sigma_i'}(G) = 1$ и $O_{\sigma_i}(G) = 1$. Поэтому $F_{\{\sigma_i\}}(G) = 1$.

Допустим, что найдется $\sigma_i \in \sigma(R) \setminus \Pi$. Тогда поскольку

$$f(\sigma_i) = \mathrm{form}(G / F_{\{\sigma_i\}}(G)) = \mathrm{form}(G)$$

– минимальная не $H(\sigma_i)$ -формация и $H(\sigma_i) = \varnothing$, мы имеем $\mathrm{form}(G) = (1)$. Последнее влечет $G \simeq 1 \in \mathfrak{G}_{\Pi}$. Противоречие. Поэтому $\sigma(R) \subseteq \Pi$. Но тогда $R \in \mathfrak{G}_{\Pi}$ и, кроме того, $G / R \in \mathfrak{G}_{\Pi}$. Следовательно, $G \in \mathfrak{G}_{\Pi}\mathfrak{G}_{\Pi} = \mathfrak{G}_{\Pi}$. Противоречие. Поэтому данный случай также невозможен.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\sigma_i} = l_{\sigma}\mathrm{form}(G)$, где группа G удовлетворяет условию теоремы. Тогда поскольку $\sigma_i \notin \Pi$, то $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{G}_{\Pi}$. Поскольку в силу примера 1.2 (ii) [28] для формации всех единичных групп имеет место $(1) = LF_{\sigma}(f)$, где $f(\sigma_i) = \varnothing$ для всех i, а также ввиду примера 1.2 (iii) [28] для формации всех σ_i -групп имеет место $\mathfrak{G}_{\sigma_i} = LF_{\sigma}(f)$, где $f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ и $f(\sigma_j) = \varnothing$ для всех $j \neq i$, то формация $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ имеет единственную σ -локальную подформацию (1). Так как $(1) \subseteq \mathfrak{S}_{\Pi}$, то $\mathfrak{F}$ – минимальная σ -локальная не $\mathfrak{S}_{\Pi}$ -формация. □

В частности, если $\Pi = \{\sigma_i\}$, то $\mathfrak{G}_{\sigma_i} = \mathfrak{S}_{\sigma_i} = \mathfrak{N}_{\sigma_i}$ и из теоремы 4.1 вытекает

***Следствие* 4.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – σ -локальная формация, $\sigma_i \in \sigma$ и $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной σ -локальной не $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ -формацией, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\sigma_j} = l_{\sigma}\mathrm{form}(G)$, где G – простая σ_j -группа для некоторого $j \neq i$.*

В классическом случае, когда $\sigma = \sigma^1$ из теоремы 4.1 получаем

***Следствие* 4.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{G}_{\pi}$, где $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной локальной не $\mathfrak{G}_{\pi}$ -формацией, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p = l\mathrm{form}(G)$, где G – группа простого порядка p для некоторого $p \notin \pi$.*

5 Минимальные σ -локальные не $\mathfrak{S}_{\Pi}$ -формации

Пусть $\varnothing \neq \Pi \subseteq \sigma$. Формация всех σ -разрешимых Π -групп обозначается через $\mathfrak{S}_{\Pi}$. Ввиду замечания 2.4 [28] $\mathfrak{S}_{\Pi}$ является тотально σ -локальной формацией.

***Теорема* 5.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – σ -локальная формация, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{S}_{\Pi}$, где $\varnothing \neq \Pi \subseteq \sigma$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной σ -локальной не $\mathfrak{S}_{\Pi}$ -формацией, когда $\mathfrak{F} = l_{\sigma}\mathrm{form}(G)$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{S}_{\Pi}}$, что выполняется одно из следующих условий*:

(1) *$G = R$ – простая σ_i -группа для некоторого $\sigma_i \notin \Pi$;*

(2) *$|\cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i| \geq 3$, R – не σ -примарная Π -группа и G / R – σ -разрешимая Π -группа.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ – минимальная σ -локальная не $\mathfrak{S}_{\Pi}$ -формация. Выберем в $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{S}_{\Pi}$ группу G минимального порядка. Тогда G – монолитическая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{S}_{\Pi}}$. Поскольку $l_{\sigma}\mathrm{form}(G) \subseteq \mathfrak{F}$ и любая собственная σ -локальная подформация из $\mathfrak{F}$ содержится в $\mathfrak{S}_{\Pi}$, то $\mathfrak{F} = l_{\sigma}\mathrm{form}(G)$. Покажем, что группа G удовлетворяет условиям теоремы.

Пусть f – наименьшее σ -локальное определение формации $\mathfrak{F}$ и H – каноническое σ -локальное определение формации $\mathfrak{S}_{\Pi}$. Ввиду теоремы 3.1 для всех $\sigma_i \in \sigma(R)$ формация $f(\sigma_i)$ является $(H(\sigma_i))$ -критической. По лемме 2.1 имеем $f(\sigma_i) = \mathrm{form}(G / F_{\{\sigma_i\}}(G))$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G)$ и $f(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $\sigma_i \notin \sigma(G)$. Ввиду замечания 2.4 [28] имеем $H(\sigma_i)=\mathfrak{S}_\Pi$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $H(\sigma_i)=\varnothing$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$.

Допустим, что R – σ-примарная группа и пусть $\sigma_i \in \sigma(R)$. Тогда R – σ_i-группа. Рассмотрим прежде случай, когда $\sigma_i \not\subseteq \Pi$. Тогда поскольку R – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, то $O_{\sigma_i'}(G)=1$. Следовательно, $F_{\{\sigma_i\}}(G)= = O_{\sigma_i}(G)$. Ввиду того, что $f(\sigma_i)=\mathrm{form}(G/F_{\{\sigma_i\}}(G))$ – минимальная не $H(\sigma_i)$-формация и $H(\sigma_i)=\varnothing$, то $f(\sigma_i)=\mathrm{form}(G/F_{\{\sigma_i\}}(G))=(1)$. Значит, $G= = F_{\{\sigma_i\}}(G)=O_{\sigma_i}(G)$. Таким образом, G – σ_i-группа, $\sigma_i \not\in \Pi$. Поскольку $G/R \in \mathfrak{S}_\Pi$, и при этом G – Π'-группа, то $G=R$. Но G – монолитическая группа. Следовательно, $G=R$ – простая σ_i-группа, где $\sigma_i \not\subseteq \Pi$. Таким образом, группа G удовлетворяет условию 1) теоремы.

Допустим теперь, что $\sigma_i \in \Pi$. Тогда $R \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ и $G/R \in \mathfrak{S}_\Pi$. Следовательно, $G^{\mathfrak{S}_\Pi} \subseteq R$ и $G \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{S}_\Pi = \mathfrak{S}_\Pi$. Противоречие. Поэтому данный случай невозможен.

Пусть теперь R не является σ-примарной группой. Тогда ввиду монолитичности группы G для любого $\sigma_i \in \sigma(R)$ имеет место $O_{\sigma_i}(G)= = O_{\sigma_i'}(G)=1$. Поэтому $G/F_{\{\sigma_i\}}(G)=1$.

Допустим, что найдется $\sigma_i \in \sigma(R)\setminus\Pi$. Тогда поскольку $f(\sigma_i)=\mathrm{form}(G/F_{\{\sigma_i\}}(G))= = \mathrm{form}(G)$ – минимальная не $H(\sigma_i)$-формация и $H(\sigma_i)=\varnothing$, мы имеем $\mathrm{form}(G)=(1)$. Последнее влечет $G=1\in\mathfrak{S}_\Pi$. Противоречие. Поэтому $\sigma(R)\subseteq\Pi$.

Покажем также, что данный случай возможен, только если $|\cup_{\sigma_i\in\Pi}\sigma_i|\geq 3$. Действительно, так как R монолит группы G, то R – прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп. Поэтому $|\pi(R)|\geq 3$. С другой стороны, поскольку R не является σ-примарной группой, то $|\sigma(R)|\geq 2$. Далее, если теперь $\sigma_i\in\sigma(R)$, то $\sigma_i\cap\pi(R)\neq\varnothing$. Следовательно, $\pi(R)\subseteq\cup_{\sigma_i\in\sigma(R)}\sigma_i$ и $|\cup_{\sigma_i\in\sigma(R)}\sigma_i|\geq 3$. Кроме того, поскольку R – Π-группа, то $\sigma(R)\subseteq\Pi$ и $\cup_{\sigma_i\in\sigma(R)}\sigma_i\subseteq\cup_{\sigma_i\in\Pi}\sigma_i$. Поэтому, $|\cup_{\sigma_i\in\Pi}\sigma_i|\geq 3$.

Таким образом, если R не является σ-примарной группой, то $R=G^{\mathfrak{S}_\Pi}$ – Π-группа, при этом $|\cup_{\sigma_i\in\Pi}\sigma_i|\geq 3$. Следовательно, группа G удовлетворяет условию 2) теоремы.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F}=l_\sigma\mathrm{form}(G)$ и группа G удовлетворяет условию 1). Тогда $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ – формация всех σ_i-групп и (1) – единственная σ-локальная подформация $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Поскольку $\sigma_i\not\in\Pi$ и $(1)\subseteq\mathfrak{S}_\Pi$, то $\mathfrak{F}$ – минимальная σ-локальная не $\mathfrak{S}_\Pi$-формация.

Пусть теперь группа G удовлетворяет условию 2). Тогда поскольку R единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, то для любого $\sigma_i\in\sigma(R)$ имеет место $F_{\{\sigma_i\}}(G)=1$. В силу леммы 2.1 имеем $f(\sigma_i)=\mathrm{form}(G/F_{\{\sigma_i\}}(G))= = \mathrm{form}(G)$ для любого $\sigma_i\in\sigma(R)$. С другой стороны, так как $R=G^{\mathfrak{S}_\Pi}$ и по лемме 2.2 (2) $\mathfrak{S}_\Pi$ – насыщенная формация, то $R\not\subseteq\Phi(G)$. Поэтому в силу леммы 2.3 формация $\mathrm{form}(G)=f(\sigma_i)$ имеет единственную максимальную подформацию $\mathrm{form}(G/R)\subseteq\mathfrak{S}_\Pi$. Поскольку при этом $\mathfrak{S}_\Pi=H(\sigma_i)$ для любого $\sigma_i\in\sigma(R)$, то в силу теоремы 3.1 формация $\mathfrak{F}$ является минимальной σ-локальной не $\mathfrak{S}_\Pi$-формацией. □

В случае, когда $\sigma=\sigma^1$ получаем следующий результат.

***Следствие* 5.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, $\mathfrak{S}_\pi$ – формация всех разрешимых π-групп, где $\varnothing\neq\pi\subseteq\mathbb{P}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной локальной не $\mathfrak{S}_\pi$-формацией, когда $\mathfrak{F}=l\mathrm{form}(G)$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $R=G^{\mathfrak{S}_\pi}$, что выполняется одно из следующих условий*:

(1) $G=R$ *– группа простого порядка p для некоторого $p\not\in\pi$;*

(2) $|\pi|\geq 3$, *P – неабелева π-группа и G/P – разрешимая π-группа.*

6 Минимальные σ-локальные не σ-разрешимые формации

Группа G называется σ-разрешимой, если каждый главный фактор группы G является σ-примарным. Класс всех σ-разрешимых групп $\mathfrak{S}_\sigma$ является тотально σ-локальной формацией. При этом $\mathfrak{S}_\sigma=LF_\sigma(f)$, где $f(\sigma_i)=\mathfrak{S}_\sigma$ для всех i.

Важным следствием теоремы 5.1 является следующая теорема, дающая описание минимальных σ-локальных не $\mathfrak{S}_\sigma$-формаций.

***Теорема* 6.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – σ-локальная формация, $\mathfrak{F}\not\subseteq\mathfrak{S}_\sigma$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной σ-локальной не $\mathfrak{S}_\sigma$-формацией, когда $\mathfrak{F}=l_\sigma\mathrm{form}(G)$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $P=G^{\mathfrak{S}_\sigma}$, что P –*

не σ-примарная группа и группа G/P – σ-разрешима.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – минимальная σ-локальная не $\mathfrak{S}_\sigma$-формация. Тогда применяя теорему 5.1 получим $\mathfrak{F} = l_\sigma \mathrm{form}(G)$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{S}_\Pi}$, что выполняется одно из следующих условий:

(1) $G = R$ – простая σ_i-группа для некоторого $\sigma_i \notin \Pi$;

(2) $|\cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i| \geq 3$, R – не σ-примарная Π-группа и G/R – σ-разрешимая Π-группа.

Поскольку $\Pi = \sigma$, то $R = G^{\mathfrak{S}_\sigma}$. Кроме того, понятно, что условие (1) не может иметь место, а в условии (2) требование $|\cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i| \geq 3$ выполняется для любого разбиения σ.

Таким образом, $\mathfrak{F} = l_\sigma \mathrm{form}(G)$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{S}_\sigma}$, что R – не σ-примарная группа и группа G/R – σ-разрешима. □

В случае, когда $\sigma = \sigma^1$ мы получаем следующий известный результат.

***Следствие* 6.1** [5, с. 87]. *Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной локальной неразрешимой формацией, когда $\mathfrak{F} = l\mathrm{form}(G)$, где G – такая монолитическая группа с неабелевым монолитом P, что G/P – разрешимая группа.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеметков, Л.А.* Экраны ступенчатых формаций / Л.А. Шеметков // Тр. VI Всесоюзн. симпозиум по теории групп. – Киев: Наукова думка. – 1980. – С. 37–50.

2. *Скиба, А.Н.* О критических формациях / А.Н. Скиба // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1980. – № 4. – С. 27–33.

3. *Скиба, А.Н.* О критических формациях / А.Н. Скиба // В кн.: Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев: Ин-т математики АН Украины. – 1993. – С. 258–268.

4. *Шеметков, Л.А.* Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989.

5. *Скиба, А.Н.* Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Мн.: Бел. навука, 1997.

6. *Джарадин, Д.* Минимальные *p*-насыщенные ненильпотентные формации / Д. Джарадин // Вопросы алгебры. – 1995. – Вып. 8. – С. 59–64.

7. *Сафонова, И.Н.* О минимальных ω-локальных несверхразрешимых формациях / И.Н. Сафонова // Вопросы алгебры. – 1998. – Вып. 12. – С. 123–130.

8. *Сафонова, И.Н.* О минимальных ω-локальных не $\mathfrak{H}$-формациях / И.Н. Сафонова // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1999. – № 2. – С. 23–27.

9. *Сафонова, И.Н.* К теории $\mathfrak{H}_{l\omega}$-критических формаций конечных групп / И.Н. Сафонова // Вопросы алгебры. – 2001. – № 3 (17). – С. 124–133.

10. *Селькин, В.М.* Минимальные наследственные ω-локальные не $\mathfrak{H}$-формации / В.М. Селькин // Украинский математический журнал. – 2002. – Т. 54, № 3. – С. 460–469.

11. *Сафонова, И.Н.* К теории критических ω-насыщенных формаций конечных групп / И.Н. Сафонова // Вестник Полоцкого гос. ун-та. Серия С. – 2004. – № 11. – С. 9–14.

12. *Сафонова, И.Н.* К теории критических частично насыщенных формаций / И.Н. Сафонова // Вопросы алгебры-19. – 2004. – № 6 (27). – С. 82–87.

13. *Селькин, В.М.* Об одной проблеме теории ω-локальных формаций / В.М. Селькин // Известия Гомельского госуниверситета. – 2005. – № 5 (32). – С. 166–168.

14. *Сафонова, И.Н.* О критических частично насыщенных формациях конечных групп / И.Н. Сафонова // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2006. – № 2. – С. 51–55.

15. *Сафонова, И.Н.* О минимальных ω-насыщенных не $\mathfrak{N}^n$-формациях / И.Н. Сафонова // Известия Гомельского госуниверситета. – 2006. – № 5 (38). – С. 68–72.

16. *Селькин, В.М.* О минимальных τ-замкнутых ω-локальных не $\mathfrak{H}$-формациях / В.М. Селькин // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2008. – Т. 16, № 1. – С. 81–85.

17. *Сафонова, И.Н.* О минимальных ω-насыщенных не $\mathfrak{H}$-формациях конечных групп / И.Н. Сафонова // Вестник Гродненского гос. университета. Серия 2. Математика. – 2010. – № 2 (96). – С. 67–71.

18. *Селькин, В.М.* О минимальных τ-замкнутых ω-локальных не π-разложимых формациях / В.М. Селькин // Вестник Витебского гос. ун-та. – 2010. – Т. 2, № 56-1. – С. 14–20.

19. *Sel'kin, V.M.* On minimal τ-closed ω-local non-$\mathfrak{H}$-formations / V.M. Sel'kin // Algebra Colloquium. – 2012. – Vol. 19, № 4.– С. 727–734.

20. *Сафонов, В.Г.* О минимальных тотально ω-насыщенных ненильпотентных формациях конечных групп / В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова // Вестник Витебского гос. ун-та. – 2014. – № 6 (84). – С. 9–15.

21. *Сафонов, В.Г.* О приводимых ω-насыщенных формациях с разрешимым дефектом ≤ 2 / В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2005. – № 5. – С. 162–165.

22. *Селькин, В.М.* Об одном применении теории критических формаций / В.М. Селькин // Вестник Витебского гос. ун-та. – 2012. – № 1 (67). – С. 18–21.

23. *Сафонов*, *В.Г.* О коммутативных полугруппах разрешимых тотально ω-насыщенных формаций / В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 4 (25). – С. 80–86.

24. *Skiba*, *A.N.* On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.

25. *Skiba*, *A.N.* On one generalization of the local formations / A.N. Skiba // Probl. Phys. Math. Tech. – 2018. – № 34 (1). – P. 79–82.

26. *Chi*, *Z.* On one application of the theory of *n*-multiply σ-local formations of finite groups / Z. Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Probl. Phys. Math. Tech. – 2018. – № 34 (2). – P. 85–88.

27. *Chi*, *Z.* On Σ_t^σ-closed classes of finite groups / Z. Chi, A.N. Skiba // Ukranian Math. J. – 2019. – Vol. 70 (2). – P. 1707–1716.

28. *Chi*, *Z.* On *n*-multiply σ-local formations of finite groups / Z. Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Comm. Algebra. – 2019. – Vol. 47 (3). – P. 957–968.

29. *Tsarev*, *A.* Laws of the lattices of σ-local formations of finite groups / A. Tsarev // Mediterr. J. Math. – 2020. – 17 (3):75.

30. *Safonova*, *I.N.* On some properties of the lattice of totally σ-local formations of finite groups / I.N. Safonova, V.G. Safonov // Mathematics and Informatics. – 2020. – № 3. – P. 1–12.

31. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 10.11.2020.