Проблемы физики, математики и техники, № 1 (22), 2015

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С $\mathbb{P}$-СУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ ШМИДТА

В.Н. Тютянов

Международный университет «МИТСО», Гомельский филиал, Гомель, Беларусь

FINITE GROUPS WITH $\mathbb{P}$-SUBNORMAL SCHMIDT SUBGROUPS

V.N. Tyutyanov

Gomel Branch of International University «MITSO», Gomel, Belarus

Доказана разрешимость конечной группы, у которой любая подгруппа Шмидта $\mathbb{P}$-субнормальна.

Ключевые слова: *конечная группа, подгруппа Шмидта, $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа.*

The solvability of the finite group in which any Schmidt subgroup is $\mathbb{P}$-subnormal, was proved.

Keywords: *finite group, Schmidt subgroup, $\mathbb{P}$-subnormal subgroup.*

Введение

Рассматриваются только конечные группы. В работе [1] Л.С. Казарин определил неабелевы композиционные факторы конечной группы G, которая обладает цепью подгрупп

$$1 = Y_0 \subset Y_1 \subset \cdots \subset Y_n = G,$$

где $|Y_i : Y_{i-1}|$ – простое число для всех $i = 1, 2, \ldots, n.$ Эта цепь начинается с единичной подгруппы Y_0. Обобщая данную ситуацию, в работе [2] введено следующее

Определение. *Подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$-субнормальной в G (обозначается через $H\ \ \mathbb{P}\text{-}sn\ \ G$), если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп*

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$$

такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ – простое число для любого $i = 1, \ldots, n.$

Возникает естественная задача изучения строения групп, у которых любая подгруппа из заданной системы подгрупп является $\mathbb{P}$-субнормальной. В работе [2] было изучено строение конечных групп с $\mathbb{P}$-субнормальными силовскими подгруппами. В частности, установлено, что такие группы дисперсивны по Оре.

Другой важной системой подгрупп группы G является множество всех ее подгрупп Шмидта. Строение подгрупп Шмидта и их вложение в группу G во многом определяет структуру группы G. Отметим, что любая ненильпотентная группа содержит подгруппу Шмидта.

В Коуровской тетради [3] был поставлен вопрос 18.30.

Будет ли конечная группа разрешимой, если все ее подгруппы Шмидта $\mathbb{P}$-субнормальны?

С использованием теоремы о классификации конечных простых неабелевых групп мы докажем следующий результат.

Теорема. *Пусть G – конечная группа, у которой любая подгруппа Шмидта $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Тогда G является разрешимой группой.*

Из теоремы следует положительный ответ на вопрос 18.30 [3].

1 Предварительные результаты

Используются стандартные обозначения и терминология, которые можно найти, например, в [4]–[6]. Для удобства приведем некоторые обозначения. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех различных простых делителей порядка группы G; $G = [N]M$ – полупрямое произведение подгрупп N и M группы G $N \triangleleft G$ и $N \cap M = 1$; $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G; R^n – прямое произведение n сомножителей, каждый из которых изоморфен группе R; если порядок группы G делится на простое число p, то G называют pd-группой; (a, b) – наибольший общий делитель натуральных чисел a и b. Конечная ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны, называется группой Шмидта. В работе [7] О.Ю. Шмидт исследовал строение таких групп. Сведения о группах Шмидта, используемые при доказательстве теоремы, можно найти в обзоре [8].

Из теоремы 6 [1] следует, что если единичная подгруппа группы G является $\mathbb{P}$-субнормальной в G, то простые неабелевы факторы группы G принадлежат списку: $SL_3(3)$; $SL_3(5)$; $PSL_2(q)$ для подходящего значения параметра $q \geq 4$. Мы несколько уточним данный результат.

***Лемма* 1.1.** *Пусть G – простая неабелева группа и 1 $\mathbb{P}$-sn G. Тогда $G \in \{SL_3(3);\ SL_3(5);\ PSL_2(7);\ PSL_2(11);\ SL_2(2^n)$, где $2^n+1=p$ – простое число Ферма$\}$.*

Доказательство. Из [4] следует, что если $G \cong SL_3(3)$ или $G \cong SL_3(5)$, то 1 $\mathbb{P}$-sn G. Рассмотрим случай когда $G \cong PSL_2(q)$. По теореме II.8.27 [5] максимальными подгруппами M простого индекса в G могут быть A_4, S_4, A_5 и борелевская подгруппа порядка $\varepsilon^{-1}q(q-1)$, где $\varepsilon=(2,q-1)$.

Если $M \cong A_4$, то $|G|=2^2\cdot 3\cdot t$, где t – простое число и $t \notin \{2,3\}$. Так как $|\pi(G)|=3$, то из [9, с. 20] следует, что $G \in \{PSL_2(2^2),\ PSL_2(3^2),\ PSL_2(7),\ PSL_2(2^3),\ PSL_2(17)\}$. Очевидно, что только группа $PSL_2(2^2)$ имеет максимальную подгруппу простого индекса, изоморфную A_4. Так как $2^2+1=5$ – простое число Ферма, то $PSL_2(2^2)$ содержится в списке групп леммы 1.1. Ясно, что 1 $\mathbb{P}$-sn $PSL_2(2^2)$.

Если $M \cong S_4$, то как и в предыдущем пункте показывается, что $G \cong PSL_2(7)$. Очевидно, что 1 $\mathbb{P}$-sn $PSL_2(7)$.

Пусть $M \cong A_5$. Так как простая неабелева группа не содержит подгрупп индекса 2 и 3, то $|G| \in \{2^2\cdot 3\cdot 5^2,\ 2^2\cdot 3\cdot 5\cdot t$, где t – простое число и $t \notin \{2,3,5\}\}$. Из [9, с. 20] следует, что не существует простых неабелевых групп порядка $2^2\cdot 3\cdot 5^2$. Значит $|G|=|PSL_2(q)|=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot t$ и $G \cong PSL_2(t)$. Поэтому $\frac{1}{2}t(t^2-1)=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot t$ и $t=11$. Следовательно, $G \cong PSL_2(11)$ и, очевидно, 1 $\mathbb{P}$-sn $PSL_2(11)$.

Пусть M – борелевская подгруппа. Тогда $|G:M|=q+1$ – простое число. Поэтому $q=2^n$ и $G \cong PSL_2(2^n)$, где $2^n+1=p$ – простое число Ферма. При этом 1 $\mathbb{P}$-sn $PSL_2(2^n)$. Лемма доказана.

Список групп, приведенных в лемме 1.1, будем обозначать $\mathfrak{R}$.

***Лемма* 1.2.** *Пусть G – простая неабелева группа, содержащая подгруппу простого индекса p. Тогда силовская p-подгруппа P из G имеет порядок p, где $p=\max\pi(G)$ и P не является $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппой в G.*

Доказательство. Так как G – простая неабелева группа, то G изоморфно вкладывается в симметрическую группу S_p. Поэтому $p=\max\pi(G)$ и $|P|=p$. Предположим, что P $\mathbb{P}$-sn G. Тогда группа G имеет подгруппу простого индекса $r \neq p$. Очевидно, что $r=\max\pi(G)$. Противоречие с тем, что $\max\pi(G)=p$.

***Лемма* 1.3.** *Пусть $P<G$, P $\mathbb{P}$-sn G и N нормальная в G подгруппа. Тогда*:

(1) если $P \subseteq N$, то P $\mathbb{P}$-sn N;

(2) если $P \not\subseteq N$, то $\overline{P}=PN/N$ $\mathbb{P}$-sn $G/N=\overline{G}$ и $|\overline{P}|=|P/P\cap N|$.

Доказательство. Пункт 1) леммы 3.1 [10].

***Лемма* 1.4.** *Пусть $G \in \mathfrak{R}\setminus SL_3(3)$. Тогда найдется нечетное $r \in \pi(G)$ такое, что $r<p=\max\pi(G)$ и любая подгруппа порядка r не является $\mathbb{P}$-субнормальной в G.*

Доказательство. При рассмотрении случаев $G \in \{PSL_2(7),\ PSL_2(11),\ SL_3(5)\}$ информация берется из [4].

1. $G \cong PSL_2(7)$. Тогда $p=7$ и силовская 3-подгруппа R в G имеет порядок 3. Предположим, что R $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Тогда R содержится в некоторой максимальной подгруппе M группы G простого индекса и R $\mathbb{P}$-субномальна в M. Группа $PSL_2(7)$ содержит два класса несопряженных максимальных подгрупп индекса 7, которые изоморфны симметрической группе S_4. Следовательно, $M \cong S_4$ и M содержит нормальную подгруппу $H \cong A_4$. По лемме 1.3 (1) R $\mathbb{P}$-субнормальна в H. Однако A_4 не содержит подгрупп индекса 2. Противоречие. Поэтому R не является $\mathbb{P}$-субнормальной в группе G и $r=3$.

2. $G \cong PSL_2(11)$. Тогда $p=11$ и силовская 5-подгруппа R в G имеет порядок 5. Пусть R $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Тогда R содержится в некоторой максимальной подгруппе M группы G простого индекса и R $\mathbb{P}$-субнормальна в M. Группа $PSL_2(11)$ содержит два класса несопряженных максимальных подгрупп индекса 11, изоморфных $PSL_2(5)$ и, очевидно, $M \cong PSL_2(5)$. Поскольку $PSL_2(5)$ не имеет собственных подгрупп простого индекса, отличного от 5, то R не является $\mathbb{P}$-субнормальной в M. Противоречие. Поэтому R не $\mathbb{P}$-субнормальна в G и $r=5$.

3. $G \cong SL_3(5)$. Тогда $p=31$ и силовская 3-подгруппа R в G имеет порядок 3. Пусть R $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Тогда R содержится в некоторой максимальной подгруппе M группы G простого индекса и R $\mathbb{P}$-субнормальна в M. Группа $SL_3(5)$ содержит два класса несопряженных максимальных подгрупп индекса 31, изоморфных $5^2:GL_2(5)$ и $M \cong 5^2:GL_2(5)$. Так как $M/O_{\{2,5\}}(M) \cong PSL_2(5).2$, то по лемме 1.3 (2) группа $PSL_2(5).2$ имеет цепь подгрупп с простыми индексами, начинающуюся с ее силовской 3-подгруппы. Последнее невозможно. Поэтому R не является $\mathbb{P}$-субнормальной в G и $r=3$.

4. $G \cong SL_2(2^n)$, $p = 2^n + 1 = \max\pi(G)$. Группа G содержит подгруппу Бореля $B = [U]H \cong \cong [Z_2^n]Z_{2^n-1}$, которая является группой Фробениуса по теореме 2.8.2 (i) [6] и $|G:B| = p$. Пусть r – простой делитель $2^n - 1$ и R – подгруппа порядка r в G. Предположим, что R $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Так как любая максимальная подгруппа группы G, имеющая простой индекс в G, сопряжена с подгруппой Бореля, то R $\mathbb{P}$-субнормальна в B и B имеет цепь

$$1 = P_0 \subset P_1 = R \subset P_2 \subset \cdots \subset P_{k-1} \subset P_k = B.$$

Найдется i для которого $|P_i|$ – нечетное число и $|P_{i+1}:P_i| = 2$. Поскольку B – 2-замкнута, то $P_{i+1} = P_i \times T$, где $T \cong Z_2$. Так как B – группа Фробениуса, то последнее невозможно и R не является $\mathbb{P}$-субнормальной в G.

***Лемма* 1.5.** *Пусть $G \cong SL_3(3)$ и H – 2-замкнутая подгруппа Шмидта в G. Тогда H не является $\mathbb{P}$-субнормальной в G.*

Доказательство. Пусть H – 2-замкнутая подгруппа Шмидта в G. Так как G не содержит $\{2,13\}$-подгрупп и силовская 3-подгруппа в G экспоненты 3, то $H = [U]R$, где U – 2-группа, R – группа порядка 3. По лемме 5.4.1 [6] U не циклическая. Из строения силовской 2-подгруппы группы G следует, что либо $U \cong Q_8$, либо $U \cong Z_2 \times Z_2$. Если $U \cong Q_8$, то $H \cong SL_2(3)$. Из [4] следует, что H содержится в максимальной подгруппе $M = [V]T$, где $V \cong Z_3 \times Z_3$, $T \cong GL_2(3)$ и $|G:M| = 13$. V можно рассматривать как двумерное векторное пространство над полем F_3 на котором действует группа операторов $T \cong GL_2(3)$ и $H < T$. Так как H действует на V неприводимо, то H не $\mathbb{P}$-субнормальна в M, а значит и в G. Если $U \cong Z_2 \times Z_2$, то $H \cong A_4$. Группа $GL_2(3)$ не содержит подгрупп, изоморфных A_4. Поэтому из [4] следует, что H содержится в максимальной подгруппе S_4 группы $SL_3(3)$. Однако S_4 не $\mathbb{P}$-субнормальна в $SL_3(3)$.

2 *Доказательство теоремы*

Пусть G – минимальный контрпример к теореме. Если N – неразрешимая нормальная подгруппа группы G и L – ее подгруппа Шмидта, то по условию теоремы L $\mathbb{P}\text{-}sn$ G. По лемме 1.3 (1) L $\mathbb{P}\text{-}sn$ N. Следовательно, N удовлетворяет условию теоремы. Поскольку G– минимальный контрпример, то $G/S(G)$ – простая неабелева группа.

Отметим, что если L – подгруппа Шмидта в G, то L $\mathbb{P}\text{-}sn$ G и G содержит подгруппу простого индекса. Кроме того, так как 1 $\mathbb{P}\text{-}sn$ L, то 1 $\mathbb{P}\text{-}sn$ G.

Пусть сначала G – простая неабелева группа. Так как G содержит подгруппу простого индекса p, то по лемме 1.2 имеем $p = \max\pi(G)$ и порядок силовской p-подгруппы P из G равен p. Из теоремы V.21.1 [5] следует, что $N_G(P)$ – группа Фробениуса с ядром P. Следовательно, $N_G(P)$ содержит подгруппу Шмидта L с нормальной подгруппой P. Так как по условию теоремы L $\mathbb{P}\text{-}sn$ G, то, поскольку P $\mathbb{P}\text{-}sn$ L, получим P $\mathbb{P}\text{-}sn$ G. Противоречие с леммой 1.2. Таким образом, G не является простой неабелевой группой.

Поэтому $S = S(G) \neq 1$ и $\overline{G} = G/S$ – простая неабелева группа. Поскольку 1 $\mathbb{P}\text{-}sn$ G, то $\overline{G} \in \mathfrak{R}$. Рассмотрим случай, когда $\overline{G} \in \mathfrak{R} \setminus SL_3(3)$. Пусть H – минимальное добавление к S в группе G. Тогда $G = SH$, поэтому $\overline{G} = SH/S \cong H/S \cap H$. По лемме 11.1 [11] и лемме 11.2 [11]

$$U = S \cap H \subseteq \Phi(H) \text{ и } \pi(H) = \pi(\overline{G}).$$

Обозначим $p = \max\pi(\overline{G})$. Если $p \notin \pi(U)$, то силовская p-подгруппа P в H имеет порядок p и $P \cap U = 1$, в частности, $P \cap S = 1$. Так как H не является p-нильпотентной группой, то она содержит p-замкнутую pd-подгруппу Шмидта $[P]T$ по теореме 4.3.1 [12], где T – примарная циклическая группа. Отсюда следует, что P $\mathbb{P}\text{-}sn$ G. Так как $P \cap S = 1$, то по лемме 1.3 (2) $PS/S = \overline{P}$ $\mathbb{P}\text{-}sn$ $\overline{G}$ и $|\overline{P}| = p$. Противоречие с леммой 1.2. Следовательно, $p \in \pi(U)$.

По лемме 1.4 найдется $r \in \pi(\overline{G})$ такое, что $2 < r < p$ и любая подгруппа порядка r в $\overline{G}$ не является $\mathbb{P}$-субнормальной в $\overline{G}$. Так же как в случае $p = \max\pi(\overline{G})$ показывается, что $r \in \pi(U)$. Поэтому будем считать, что $p = \max\pi(\overline{G})$ и r из леммы 1.4 содержатся в $\pi(U)$.

В группе U имеется холлова нильпотентная $\{p,r\}$-подгруппа $T = F \times D$, где $F \in Syl_p(U)$, $D \in Syl_r(U)$ и T нормальна в H. Очевидно, что в H существует $\{p,r\}$-подгруппа T_0, содержащая T, для которой $|T_0:T| = p$ и $T_0 \not\subseteq S$. Поскольку $T \subseteq U$, то силовская p-подгруппа из T_0 не содержится в S.

Пусть сначала T_0 – нильпотентная группа. Обозначим $C = C_H(D) \trianglelefteq H$. Так как силовская p-подгруппа из T_0 содержится в C, то $C \not\subseteq U$. Поскольку $C \trianglelefteq H$, то $H = CU$. Отсюда следует, что $H/U = CU/U \cong U/C \cap U \cong \overline{G}$. Так как U разрешимая группа, то $U \subseteq C \subseteq H$. Поэтому

$D \subseteq Z(H)$ и $U = D \times B$, где B – холлова r'-подгруппа в U. Пусть $\overline{H} = H / B$, тогда $\overline{H}$ – центральное расширение $\overline{D} \cong D$ с помощью простой неабелевой группы $\overline{E} \cong \overline{G}$. Так как мультипликатор Шура $M(\overline{G})$ [9, с. 316] либо тривиален, либо порядка 2, то $\overline{H} = \overline{D} \times \overline{E}$. Для полного прообраза E в H группы $\overline{E}$ имеем, что $\overline{E} = E / B$ и $r \notin \pi(B)$. Так как E не является r-нильпотентной группой, то E содержит подгруппу Шмидта с нормальной r-подгруппой X и $X \cap S = 1$. Отсюда следует, что X $\mathbb{P}$-sn G и по лемме 1.3 (2) $1 \neq \overline{X}$ $\mathbb{P}$-sn $\overline{G}$. Последнее невозможно по лемме 1.4.

Следовательно, T_0 не является нильпотентной группой. Так как T_0 не r-нильпотентна, то она содержит r-замкнутую $\{p, r\}$-подгруппу Шмидта $[X]Y$, где X – r-группа, Y – циклическая p-группа и $Y \not\subseteq S$. По лемме 1.3 (2) $1 \neq \overline{Y}$ $\mathbb{P}$-sn $\overline{G}$. Противоречие с леммой 1.2.

Следовательно, $\overline{G} = G / S \cong SL_3(3)$. Пусть H – минимальное добавление к S в G. Тогда $G = SH$, $\overline{G} \cong H / S \cap H$, $U = S \cap H \subseteq \Phi(H)$ и $\pi(H) = \{2, 3, 13\}$. Как и в случае $\overline{G} \in \mathfrak{R} \setminus SL_3(3)$ показывается, что $13 \in \pi(U)$. Докажем, что $2 \in \pi(U)$. Предположим, что $2 \notin \pi(U)$. Тогда для всякой $R \in Syl_2(H)$ $R \cap U = 1$ и, в частности, $R \cap S = 1$. Так как H не является 2-нильпотентной группой, то она содержит 2-замкнутую подгруппу Шмидта $[X]Y$ и $X \cap S = 1$. Если $Y \subseteq U$, то $[X, Y] \subseteq X$ и $[X, Y] \subseteq U$. Поэтому $[X, Y] \subseteq X \cap U = 1$. Последнее невозможно. Следовательно, $Y \not\subseteq S$. По условию теоремы $[X]Y$ $\mathbb{P}$-sn G. Отсюда следует, что группа Шмидта $\overline{[X]Y}$ $\mathbb{P}$-sn $\overline{G}$. Противоречие с леммой 1.5. Поэтому будем считать, что $2, 13 \in \pi(U)$.

В U имеется холлова $\{13, 2\}$-подгруппа $T = F \times D$, где $F \in Syl_{13}(U)$, $D \in Syl_2(U)$ и $T \lhd H$. Пусть $T < T_0 < H$ и $|T_0 : T| = 13$. Тогда силовская 13-подгруппа из T_0 не содержится в S. Предположим, что T_0 нильпотентная группа и $C = C_H(D) \unlhd H$. Тогда $U \subseteq C = H$, $D \subseteq Z(H)$ и $U = D \times B$, где B – холлова $2'$-подгруппа в U. Значит $\overline{H} = H / B$ – центральное расширение $\overline{D} \cong D$ с помощью $\overline{E} \cong SL_3(3)$. Так как мультипликатор Шура группы $SL_3(3)$ тривиален, то $\overline{H} = \overline{D} \times \overline{E}$. Для полного прообраза E в H группы $\overline{E}$ имеем, что $\overline{E} = E / B$ и $2 \notin \pi(B)$. Так как E не является 2-нильпотентной группой, то E содержит 2-замкнутую подгруппу Шмидта $[X]Y$ и $X \cap S = 1$. Отсюда следует, что группа Шмидта $\overline{[X]Y}$ $\mathbb{P}$-sn $\overline{G}$. Противоречие с леммой 1.5.

Поэтому T_0 не является нильпотентной группой. Так как T_0 не 2-нильпотентна, то она содержит 2-замкнутую $\{13, 2\}$-подгруппу Шмидта $[X]Y$ и $Y \not\subseteq S$. По лемме 1.3 (2) $1 \neq \overline{Y}$ $\mathbb{P}$-sn $\overline{G}$. Противоречие с леммой 1.2. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Казарин*, *Л.С.* О группах с факторизацией / Л.С. Казарин // ДАН СССР. – 1981. – Т. 256, № 1. – С. 26–29.

2. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

3. *Нерешенные вопросы теории групп: Коуровская тетрадь.* – Новосибирск: Институт математики СО РАН, 2014. – 252 с.

4. *Atlas of finite groups* / J.H. Conway [et al.], – Oxford, 1985. – 252 p.

5. *Huppert*, *B.* Endliche Gruppen. I / B. Huppert. – Berlin: Springer, 1967. – 795 s.

6. *Gorenstein*, *D.* Finite groups. / D. Gorenstein. – New-York: Harper and Row, 1968. – 527 p.

7. *Шмидт*, *О.Ю.* Группы, все подгруппы которых специальные / О.Ю. Шмидт // Матем. сб. – 1924. – Т. 31. – С. 366–372.

8. *Шеметков*, *Л.А.* О.Ю. Шмидт и конечные группы / Л.А. Шеметков // Укр. мат. журн. – 1971. – Т. 23, № 5. – С. 366–372.

9. *Горенстейн*, *Д.* Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенстейн. – Мир, 1985. – 352 с.

10. *Васильев*, *А.Ф.* О произведениях $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп в конечных группах / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2012. – Т. 53, № 1. – С. 59–67.

11. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

12. *Чунихин*, *С.А.* Подгруппы конечных групп / С.А. Чунихин. – Минск: Наука и техника, 1964. – 160 с.

Поступила в редакцию 15.06.14.