Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6(81), 2013

Математика

УДК 512.542

Пересечения максимальных подгрупп конечных групп и радикальные формации

Л.М. Белоконь

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая радикальная формация. Получены новые результаты относительно пересечений всех максимальных подгрупп заданных индексов, всех максимальных $\mathfrak{F}$ - абнормальных подгрупп и всех максимальных $\mathfrak{F}$ - абнормальных подгрупп заданных индексов в конечной группе.
Ключевые слова: радикальные формации, пересечения максимальных подгрупп конечной группы.

The paper deals with some new obtained results about the intersections of all maximal subgroups of given indexes, of all maximal $\mathfrak{F}$ -abnormal subgroups and of all maximal $\mathfrak{F}$ -abnormal subgroups of given indexes in a finite group; $\mathfrak{F}$ is a non – empty radical formation.
Keywords: radical formations, intersections of maximal subgroups in a finite group.

Рассматриваются только конечные группы и формации конечных групп. Используются определения и обозначения, принятые в монографии [1].

Изучению пересечений максимальных подгрупп, выделенных в конечной группе по заданным дополнительным признакам (и их сочетаниям), таким, как $\mathfrak{F}$-абнормальность, наличие определенных индексов в группе и принадлежность или непринадлежность максимальных подгрупп формациям, посвящено большое число работ исследователей. В работах [2], [3] Монаховым В.С. установлено, что пересечение всех максимальных подгрупп разрешимой неединичной группы G совпадает с пересечением всех максимальных подгрупп G, не содержащих ее подгруппу Фиттинга $F(G)$, а пересечение всех максимальных ненормальных подгрупп разрешимой ненильпотентной группы совпадает с пересечением всех максимальных ненормальных подгрупп этой группы, не содержащих ее подгруппу Фиттинга. Формационное обобщение этих результатов для разрешимых групп дано в [4], получившее в настоящей работе дальнейшее развитие применительно к пересечениям максимальных подгрупп заданных индексов, максимальных $\mathfrak{F}$-абнормальных подгрупп и максимальных $\mathfrak{F}$-абнормальных подгрупп заданных индексов.

В последующем обозначаем через π некоторое множество простых чисел, $\pi' = \mathrm{P} \setminus \pi,$ где P – множество всех простых чисел, считаем также, что $\pi \neq \mathrm{P};$ $\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)$ – пересечение всех максимальных подгрупп группы G, индекс каждой из которых не делится на простые числа из π, при отсутствии таких максимальных подгрупп в G полагаем $\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G) = G;$ $\mathrm{F}_{\pi'}(G) -$ π'-нильпотентный радикал группы G. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая радикальная формация. Пересечение всех максимальных подгрупп группы G, каждая из которых имеет индекс в $G,$ взаимно простой с числами из π, и не содержит (и содержит) ее $\mathfrak{F}$-радикал $G_{\mathfrak{F}},$ обозначаем через $\hat{\mathrm{O}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$ ($\hat{\mathrm{O}}_{\pi,G_{\mathfrak{F}}}(G),$ соответственно). При отсутствии в группе G максимальных подгрупп, отвечающих указанным требованиям, соответствующие пересечения считаем совпадающими с $G.$ Если $\pi = \varnothing$, применяем в соответствующих случаях обозначения $\hat{\mathrm{O}}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$ и $\hat{\mathrm{O}}_{G_{\mathfrak{F}}}(G).$

Напомним, что $\mathrm{O}_\pi(G) \subseteq \hat{\mathrm{O}}_\pi(G)$ для любой группы *G*, ибо

$|G|_\pi = |H|_\pi = |H\,\mathrm{O}_\pi(G)|_\pi = \dfrac{|H|_\pi |\mathrm{O}_\pi(G)|}{|H \cap \mathrm{O}_\pi(G)|}$ для всякой максимальной в G подгруппы *H*, индекс которой не делится на числа из π; в случае отсутствия таких максимальных подгрупп $\mathrm{O}_\pi(G) \subseteq G = \hat{\mathrm{O}}_\pi(G)$.

Лемма 1. Пусть $\mathsf{F} = \mathsf{G}_\pi \mathsf{F}$ – локальная радикальная формация. И пусть в группе G подгруппа $\hat{\mathrm{O}}_\pi(G)$ обладает свойством C_π, K и L – нормальные подгруппы группы G такие, что $\mathrm{O}_\pi(G) \subseteq K \subseteq \hat{\mathrm{O}}_\pi(G) \subseteq L$. Тогда $(L/K)_\mathsf{F} = L_\mathsf{F} K/K$. В частности, $(G/\hat{\mathrm{O}}_\pi(G))_\mathsf{F} = G_\mathsf{F}\, \hat{\mathrm{O}}_\pi(G)/\hat{\mathrm{O}}_\pi(G)$.

Доказательство. Пусть G – группа с подгруппой $\hat{\mathrm{O}}_\pi(G) \in \mathrm{C}_\pi$, K и L – нормальные в G подгруппы такие, что $\mathrm{O}_\pi(G) \subseteq K \subseteq \hat{\mathrm{O}}_\pi(G) \subseteq L$. Введем следующие обозначения: $N/K = (L/K)_\mathsf{F}$, $\overline{G} = G/\mathrm{O}_\pi(G)$, $\overline{N} = N/\mathrm{O}_\pi(G)$, $\overline{K} = K/\mathrm{O}_\pi(G)$. Тогда $\overline{N}/\overline{K} \simeq N/K \in \mathsf{F}$. А так как $\overline{K} \subseteq \hat{\mathrm{O}}_\pi(G)/\mathrm{O}_\pi(G) = \hat{\mathrm{O}}(\overline{G})$ согласно лемме 1[6], то из условия $\overline{N}/\overline{K} \in \mathsf{F}$ и теоремы 4.2 [1] получаем: $\overline{N} = \overline{N_1} \times \overline{N_2}$, $\overline{N_1} \in \mathsf{F}$, $\pi(\overline{N_2}) \cap \pi(\mathsf{F}) = \varnothing$, $\overline{N_2} \subseteq \hat{\mathrm{O}}(\overline{G})$. Обозначая $\overline{N_1} = N_1/\mathrm{O}_\pi(G)$, $\overline{N_2} = N_2/\mathrm{O}_\pi(G)$ и учитывая $\mathsf{F} = \mathsf{G}_\pi \mathsf{F}$, имеем $N_1 \in \mathsf{F}$. Так как $\mathsf{G}_\pi \subseteq \mathsf{F}$, то согласно теореме Шура-Цассенхауза $N_2 = \mathrm{O}_\pi(G)R$, R – $\pi'(\mathsf{F})$-группа, $\pi'(\mathsf{F}) \subseteq \pi'$. Таким образом, $N = N_1 N_2 = N_1 R$. Понятно, что $L_\mathsf{F} K/K \subseteq N/K$, и, значит, $L_\mathsf{F} \subseteq N_\mathsf{F} = N_1$. А так как $N_\mathsf{F} \subseteq L_\mathsf{F}$, то $N_\mathsf{F} = L_\mathsf{F}$. Из условия $N_\mathsf{F} R/K \in \mathsf{F}$ следует $|R| = |K|_{\pi'(\mathsf{F})}$, откуда $N_\mathsf{F} R = N_\mathsf{F} K$. Значит, $N/K = N_\mathsf{F} K/K = L_\mathsf{F} K/K$. Лемма доказана.

Следствие 1. Пусть $\mathsf{F} = \mathsf{G}_\pi \mathsf{F}$ – локальная радикальная формация, содержащая класс всех нильпотентных π'-групп $\mathsf{N}_{\pi'}$. И пусть в группе G подгруппа $\hat{\mathrm{O}}_\pi(G)$ обладает свойством C_π, K и L – нормальные подгруппы группы G такие, что $\mathrm{O}_\pi(G) \subseteq K \subseteq \hat{\mathrm{O}}_\pi(G) \subseteq L$. Тогда $(L/K)_\mathsf{F} = L_\mathsf{F}/K$. В частности, $(G/\hat{\mathrm{O}}_\pi(G))_\mathsf{F} = G_\mathsf{F}/\hat{\mathrm{O}}_\pi(G)$

Доказательство вытекает из леммы 1, так как ввиду $\mathsf{G}_\pi \mathsf{N}_{\pi'} \subseteq \mathsf{F}$ и π'-нильпотентности подгруппы $\hat{\mathrm{O}}_\pi(G)$, согласно лемме 1[6], $K \subseteq \hat{\mathrm{O}}_\pi(G) \subseteq \mathrm{F}_{\pi'}(L) \subseteq L_\mathsf{F}$.

Следствие 2. Пусть F – локальная радикальная формация. И пусть K и L – нормальные подгруппы группы G такие, что $K \subseteq \hat{\mathrm{O}}(G) \subseteq L$. Тогда $(L/K)_\mathsf{F} = L_\mathsf{F} K/K$. В частности, $(G/\hat{\mathrm{O}}(G))_\mathsf{F} = G_\mathsf{F}\, \hat{\mathrm{O}}(G)/\hat{\mathrm{O}}(G)$.

Доказательство следствия 2 получается из леммы 1 при $\pi = \varnothing$.

Отметим, что из следствия 2 в случае $\mathsf{F} = \mathsf{G}_\pi$ вытекает лемма 2 работы [5]: если G – группа и $\mathrm{O}_\pi(G) = 1$, то $\mathrm{O}_\pi(G/\hat{\mathrm{O}}(G)) = 1$. Этот результат вытекает также непосредственно из леммы 1 ввиду того, что $\hat{\mathrm{O}}_\pi(G) = \hat{\mathrm{O}}(G)$, если $\mathrm{O}_\pi(G) = 1$.

Следствие 3. Пусть F – локальная радикальная формация, содержащая класс всех нильпотентных групп N. И пусть K и L – нормальные подгруппы группы G такие, что $K \subseteq \hat{\mathrm{O}}(G) \subseteq L$. Тогда $(L/K)_\mathsf{F} = L_\mathsf{F}/K$. В частности, $(G/\hat{\mathrm{O}}(G))_\mathsf{F} = G_\mathsf{F}/\hat{\mathrm{O}}(G)$.

Лемма 2. Пусть в группе G подгруппа $\hat{\mathrm{O}}_\pi(G)$ обладает свойством C_π, K – нормальная подгруппа G, такая, что $\mathrm{O}_\pi(G) \subseteq K \subseteq \hat{\mathrm{O}}_\pi(G)$. Тогда выполняются следующие утверждения:

(1) $\hat{\mathrm{O}}(G/K)=\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)/K$;

(2) $\mathrm{F}(G/K)=\mathrm{F}_{\pi'}(G)/K$; в частности, $\mathrm{F}(G/\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G))=\mathrm{F}_{\pi'}(G)/\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)$.

Доказательство. Пусть K – нормальная подгруппа группы G, $\mathrm{O}_{\pi}(G)\subseteq K\subseteq\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)\in\mathrm{C}_{\pi}$. Докажем утверждение (1). Если в группе G нет максимальных подгрупп π'-индексов, то $\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)=G$ по определению. Так как $\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)\in\mathrm{C}_{\pi}$, то это возможно лишь в случае, когда $G-$ π-группа. Но тогда $\mathrm{O}_{\pi}(G)=K=\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)=G$ и, значит, $\hat{\mathrm{O}}(G/K)=1=\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)/K$. Поэтому считаем, что в G существуют максимальные подгруппы π'-индексов. По лемме 1[6] $\hat{\mathrm{O}}(G/\mathrm{O}_{\pi}(G))=\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)/\mathrm{O}_{\pi}(G)$, из чего следует, что $\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)$ принадлежит каждой максимальной подгруппе группы G, содержащей $\mathrm{O}_{\pi}(G)$. Значит, $\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)/K\subseteq\hat{\mathrm{O}}(G/K)$. А так как $\hat{\mathrm{O}}(G/K)\subseteq\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G/K)$ и согласно лемме 2[6] $\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)/K=\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G/K)$, то $\hat{\mathrm{O}}(G/K)=\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)/K$. Утверждение (1) доказано.

(2). Равенство $\mathrm{F}_{\pi'}(G/K)=\mathrm{F}_{\pi'}(G)/K$ вытекает из следствия 1 леммы 1 при $\mathsf{F}=\mathsf{G}_{\pi}\mathsf{N}_{\pi'}$. Так как $\mathrm{O}_{\pi}(G)\subseteq K$, то $\mathrm{F}_{\pi'}(G)/K$ – нильпотентная π'-группа и $\mathrm{F}_{\pi'}(G)/K\subseteq\mathrm{F}(G/K)$. А так как $\mathrm{F}(G/K)\subseteq\mathrm{F}_{\pi'}(G/K)=\mathrm{F}_{\pi'}(G)/K$, то $\mathrm{F}(G/K)=\mathrm{F}_{\pi'}(G)/K$. Утверждение (2) и лемма 2 доказаны.

Заметим, что для всякой группы G с подгруппой $\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)\in\mathrm{C}_{\pi}$ условия $\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)\neq G$ и $G-\pi'\mathrm{d}$-группа равносильны.

Теорема 1. Пусть $G-$ группа, $\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)\in\mathrm{C}_{\pi}$, $\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)\neq G$. Если цоколь группы $G/\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)$ π'-разрешим, то $\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)$ – собственная подгруппа группы $\mathrm{F}_{\pi'}(G)$.

Доказательство. Так как $\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)\neq G$, то в группе G существует хотя бы одна максимальная подгруппа, индекс которой является π'-числом, а $G\neq 1$. Понятно, что $G/\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)-\pi'\mathrm{d}$-группа, не совпадающая с $\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G/\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G))=\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)/\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)=1\in\mathrm{C}_{\pi}$, а цоколь факторгруппы $G/\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)/\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G/\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G))$, изоморфной $G/\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)$, π'-разрешим. Следовательно, если $\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)\neq 1$, то, исходя из индуктивного предположения относительно факторгруппы $G/\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)$ и используя следствие 1 леммы 1, получаем $1=\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G/\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G))\subset\mathrm{F}_{\pi'}(G/\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G))=\mathrm{F}_{\pi'}(G)/\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)$, откуда следует $\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)\subset\mathrm{F}_{\pi'}(G)$. Пусть теперь $\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)=1$. В этом случае $\mathrm{O}_{\pi}(G)=1$, цоколь группы $G\neq 1$ – разрешимая π'-группа, следовательно, $\mathrm{F}_{\pi'}(G)=\mathrm{F}(G)\neq 1$. Теорема доказана.

Следствие 1.1. Пусть $G-\pi'$-разрешимая $\pi'\mathrm{d}$-группа. Тогда $\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)\subset\mathrm{F}_{\pi'}(G)$.

Следствие 1.2. [7, III. 4]. Пусть G – разрешимая неединичная группа. Тогда $\hat{\mathrm{O}}(G)\subset\mathrm{F}(G)$.

Следствие 1.3. Если G – неединичная π'-разрешимая группа, не являющаяся π-группой, и K – ее нормальная подгруппа, $\mathrm{O}_{\pi}(G)\subseteq K\subseteq\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)$, то $\hat{\mathrm{O}}(G/K)$ – собственная подгруппа в $\mathrm{F}(G/K)$.

Доказательство. Следствие 1.1. позволяет записать $\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)/K\subset\mathrm{F}_{\pi'}(G)/K$. Согласно лемме 2 (1) $\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)/K=\hat{\mathrm{O}}(G/K)$, а по утверждению (2) леммы 2 $\mathrm{F}_{\pi'}(G)/K=\mathrm{F}(G/K)$. Значит, $\hat{\mathrm{O}}(G/K)\subset\mathrm{F}(G/K)$. Следствие доказано.

Следствие 1.4 [5]. Если G – неединичная π'-разрешимая группа, не являющаяся π-группой, то $\hat{\mathrm{O}}(G/\mathrm{O}_{\pi}(G))$ – собственная подгруппа в $\mathrm{F}(G/\mathrm{O}_{\pi}(G))$.

Теорема 2. Пусть $G-$ группа, $\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)\in\mathrm{C}_{\pi}$, $\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)\neq G$. Если цоколь группы $G/\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)$ π'-разрешим, то $\hat{\mathrm{O}}_{\pi}(G)=\hat{\mathrm{O}}_{\pi,\overline{\mathrm{F}_{\pi'}(G)}}(G)$.

Доказательство. Если группа G π'-нильпотентна, то утверждение теоремы, конечно, выполняется, ибо $\hat{O}_{\pi}(G) \neq G$. Пусть $G \notin \mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{N}_{\pi'}$. По теореме 1 $\hat{O}_{\pi}(G) \subset F_{\pi'}(G)$. Значит, в G существуют максимальные подгруппы, индекс каждой из которых не делится на простые числа из π и не содержащие $F_{\pi'}(G)$. Предположим, $\hat{O}_{\pi}(G) \neq 1$. По индукции $\hat{O}_{\pi,\overline{F_{\pi'}(G/\hat{O}_{\pi}(G))}}(G/\hat{O}_{\pi}(G)) = \hat{O}_{\pi}(G/\hat{O}_{\pi}(G)) = 1$, а применение следствия 1 леммы 1 позволяет заключить, что в рассматриваемом случае $\hat{O}_{\pi}(G) = \hat{O}_{\pi,\overline{F_{\pi'}(G)}}(G)$. Пусть $\hat{O}_{\pi}(G) = 1$. Тогда $\hat{O}_{\pi,\overline{F_{\pi'}(G)}}(G) \bigcap \hat{O}_{\pi,F_{\pi'}(G)}(G) = 1$. Предположим, что $\hat{O}_{\pi,\overline{F_{\pi'}(G)}}(G) \neq 1$. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G из $\hat{O}_{\pi,\overline{F_{\pi'}(G)}}(G)$. Так как цоколь группы G π'-разрешим, а $O_{\pi}(G) = 1$, то $N \subseteq F(G) = F_{\pi'}(G) \in \mathfrak{N}_{\pi'}$. Значит, $N \subseteq \hat{O}_{\pi,F_{\pi'}(G)}(G)$. Противоречие. Теорема доказана.

Следствие 2.1. Пусть G – π'-разрешимая $\pi'\mathrm{d}$-группа. Тогда $\hat{O}_{\pi}(G) = \hat{O}_{\pi,\overline{F_{\pi'}(G)}}(G)$.

Следствие 2.2 [2]. Пусть G – разрешимая неединичная группа. Тогда $\hat{O}(G) = \hat{O}_{\overline{F(G)}}(G)$.

Лемма 3. Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ – радикальные формации. Тогда $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$ – радикальная формация.

Доказательство. По теореме 1.1. [1] произведение $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$ формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ является формацией. Из определения 1.4. [1] следует, что $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$ является пустой формацией тогда и только тогда, когда хотя бы одна из формаций $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ является пустой. Пусть $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$ – непустая формация, т.е. $\mathfrak{F}_i \neq \varnothing$, i=1,2. Докажем, что класс всех тех групп G, для которых $G^{\mathfrak{F}_2} \subseteq \mathfrak{F}_1$, т.е формация $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$, является радикальной. Пусть $G \in \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$, N – нормальная подгруппа группы G. Так как формация $\mathfrak{F}_2$ S_n-замкнута, то $NG^{\mathfrak{F}_2}/G^{\mathfrak{F}_2} \simeq N/N \cap G^{\mathfrak{F}_2} \in \mathfrak{F}_2$, откуда следует $N^{\mathfrak{F}_2} \subseteq G^{\mathfrak{F}_2}$. А так как $G^{\mathfrak{F}_2} \in \mathfrak{F}_1$ и формация $\mathfrak{F}_1$ S_n-замкнута, то $N^{\mathfrak{F}_2} \in \mathfrak{F}_1$. Следовательно, $N \in \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$. Пусть теперь $H = N_1N_2$, $N_i \lhd G$, $N_i \in \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$, $i = 1,2$. Покажем, что $H \in \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$. Так как $N_i^{\mathfrak{F}_2} \in \mathfrak{F}_1$ и характеристические в N_i подгруппы $N_i^{\mathfrak{F}_2}$ нормальны в H, $i = 1,2$, то из радикальности $\mathfrak{F}_1$ следует $N_1^{\mathfrak{F}_2}N_2^{\mathfrak{F}_2} \in \mathfrak{F}_1$. Ввиду радикальности формации $\mathfrak{F}_2$, согласно следствию 1 из [8] имеет место равенство $(N_1N_2)^{\mathfrak{F}_2} = N_1^{\mathfrak{F}_2}N_2^{\mathfrak{F}_2}$, а значит, $H \in \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$. Лемма доказана.

Пусть φ_0 – некоторое линейное упорядочение множества всех простых чисел. Известно [1, с. 35], что множество всех φ_0-дисперсивных групп – локальная формация, обозначим ее через $\mathfrak{J}_{\varphi_0}$. Несложно показать, что формация $\mathfrak{J}_{\varphi_0}$ является радикальной (см., например, [9, глава 4, теорема 3.2, с. 126]). Следовательно, $\mathfrak{J}_{\varphi_0} \cap \mathfrak{G}_{\pi'} = (\mathfrak{J}_{\varphi_0})_{\pi'}$ – радикальная локальная формация всех φ_0-дисперсивных π'-групп. Из леммы 3, а также из следствия 7.13 теоремы 7.12 монографии [10], согласно которому произведение $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$ локальных формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_1$ есть локальная формация, вытекает $\mathfrak{G}_{\pi}(\mathfrak{J}_{\varphi_0})_{\pi'}$ – радикальная локальная формация.

Рассмотрим множество $\{(\mathfrak{J}_{\varphi})_{\pi'},\ \ \varphi \in \mathrm{M}\}$ формаций $(\mathfrak{J}_{\varphi})_{\pi'}$ всех φ-дисперсивных π'-групп, φ пробегает некоторое множество М линейных упорядочений множества всех простых чисел (всех простых π'-чисел). Введем следующее обозначение: $\mathfrak{J}_{\pi'}^{\mathrm{M}} = \bigcap_{\varphi \in \mathrm{M}} (\mathfrak{J}_{\varphi})_{\pi'}$. Тогда $\mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{J}_{\pi'}^{\mathrm{M}}$ – радикальная локальная формация, содержащая формацию всех π'-нильпотентных групп $\mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{N}_{\pi'}$. В случае $\pi = \varnothing$ формацию $\mathfrak{J}_{\pi'}^{\mathrm{M}}$ обозначаем $\mathfrak{J}^{\mathrm{M}} = \bigcap_{\varphi \in \mathrm{M}} \mathfrak{J}_{\varphi}$.

Теорема 3. Пусть $\mathfrak{F}$ – радикальная формация, содержащая формацию всех π'-нильпотентных групп $\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}$. И пусть $G-$ группа, $\hat{\mathrm{O}}_\pi(G)\in\mathfrak{C}_\pi$, $\hat{\mathrm{O}}_\pi(G)\neq G.$ Если цоколь группы $G/\hat{\mathrm{O}}_\pi(G)$ π'- разрешим, то $\hat{\mathrm{O}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)=\hat{\mathrm{O}}_\pi(G).$

Доказательство. Если группа $G\in\mathfrak{F}$, то утверждение теоремы справедливо. Пусть $G\notin\mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}\subseteq\mathfrak{F}$, то $\mathrm{F}_{\pi'}(G)\subseteq G_{\mathfrak{F}}$ и $G\notin\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}$, а множество всех тех максимальных подгрупп группы *G*, не содержащих $G_{\mathfrak{F}}$, индексы которых не делятся на числа из π, включает в себя множество всех максимальных подгрупп группы G, не содержащих $\mathrm{F}_{\pi'}(G)$, индексы которых не делятся на числа из π. Следовательно, $\hat{\mathrm{O}}_\pi(G)\subseteq\hat{\mathrm{O}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)\subseteq\hat{\mathrm{O}}_{\pi,\overline{\mathrm{F}_{\pi'}(G)}}(G).$ В завершение доказательства применим теорему 2.

Следствие 3.1. Пусть $G-\pi'\mathrm{d}$-группа, $\hat{\mathrm{O}}_\pi(G)\in\mathfrak{C}_\pi$ и цоколь группы $G/\hat{\mathrm{O}}_\pi(G)$ π'-разрешим. Тогда для любого множества M линейных упорядочений φ множества всех простых π'-чисел и соответствующих им формаций всех φ-дисперсивных π'-групп $(\mathfrak{J}_\varphi)_{\pi'}$ пересечение всех максимальных подгрупп группы *G*, взаимно простых с числами из π индексов и не содержащих $\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{J}^{\mathrm{M}}_{\pi'}$-радикал $G_{\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{J}^{\mathrm{M}}_{\pi'}}$ группы G, совпадает с пересечением всех максимальных подгрупп группы G, взаимно простых с числами из π индексов и не содержащих ее π'-нильпотентный радикал $\mathrm{F}_{\pi'}(G)$. Таким образом, $\hat{\mathrm{O}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{J}^{\mathrm{M}}_{\pi'}}}}(G)=\hat{\mathrm{O}}_{\pi,\overline{\mathrm{F}_{\pi'}(G)}}(G)=\hat{\mathrm{O}}_\pi(G).$

Следствие 3.2. Пусть $\mathfrak{F}$ – радикальная формация, содержащая формацию всех π'-нильпотентных групп $\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}$. И пусть G – π'-разрешимая $\pi'\mathrm{d}$-группа. Тогда $\hat{\mathrm{O}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)=\hat{\mathrm{O}}_\pi(G).$

Следствие 3.3. Пусть G – π'-разрешимая $\pi'\mathrm{d}$-группа. Тогда $\hat{\mathrm{O}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{J}^{\mathrm{M}}_{\pi'}}}}(G)=$ $=\hat{\mathrm{O}}_{\pi,\overline{\mathrm{F}_{\pi'}(G)}}(G)=\hat{\mathrm{O}}_\pi(G)$ для любого множества M линейных упорядочений φ множества всех простых π'-чисел и соответствующих им формаций всех φ-дисперсивных π'-групп $(\mathfrak{J}_\varphi)_{\pi'}$.

Следствие 3.4 [4]. Пусть G – разрешимая неединичная группа и пусть $\mathfrak{F}$ – радикальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных групп. Тогда $\hat{\mathrm{O}}(G)=\hat{\mathrm{O}}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G).$

Следствие 3.5. Пусть G – разрешимая неединичная группа. Тогда для любого множества M линейных упорядочений φ множества всех простых чисел и соответствующих им формаций φ-дисперсивных групп $\mathfrak{J}_\varphi$ пересечение всех максимальных подгрупп группы G, каждая из которых не содержит ее $\mathfrak{J}^{\mathrm{M}}$-радикал $G_{\mathfrak{J}^{\mathrm{M}}}$, совпадает с пересечением всех максимальных подгрупп группы G, каждая из которых не содержит ее подгруппу Фиттинга $\mathrm{F}(G)$, т.е. $\hat{\mathrm{O}}_{\overline{G_{\mathfrak{J}^{\mathrm{M}}}}}(G)=\hat{\mathrm{O}}_{\overline{\mathrm{F}(G)}}(G)=\hat{\mathrm{O}}(G).$

Следующая теорема дополняет следствие 3.4 и теорему работы [2].

Теорема 4. Пусть G – разрешимая неединичная группа и пусть $\mathfrak{F}$ – радикальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных групп. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) для всякой максимальной в G подгруппы M существует не содержащая $G_{\mathfrak{F}}$ максимальная в G подгруппа H такая, что $m\leq h,$ где $|G:M|=p^m$, а $|G:H|=q^h$, p и q – простые числа;

(2) для всякой максимальной в G подгруппы X, не содержащей $G_{\mathfrak{F}}$, существует максимальная в G подгруппа Y, не содержащая $F(G)$, такая, что $x \leq y$, где $|G:X| = a^x$, а $|G:Y| = b^y$, a и b – простые числа.

Доказательство. Пусть K – некоторая подгруппа группы G. Введем следующие обозначения:

$M_{\overline{K}}(G) = \{ l \mid r^l = |G:L|$, r – простое число, L – максимальная в G подгруппа, L не содержит $K \}$;

$M(G) = \{ n \mid t^n = |G:N|$, t – простое число, N – максимальная подгруппа группы $G \}$;

$$m(G) = \max_{n \in M(G)} \{n\}; \quad m_{\overline{K}}(G) = \max_{l \in M_{\overline{K}}(G)} \{l\}.$$

Понятно, что $M(G) \supseteq M_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \supseteq M_{\overline{F(G)}}(G)$. Поэтому $m(G) \geq m_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \geq m_{\overline{F(G)}}(G)$. Теоремой работы [2] доказано, что для всякой разрешимой неединичной группы G наибольшее из значений показателей степеней простых чисел среди индексов в G всех максимальных подгрупп группы G совпадает с наибольшим значением показателей степеней простых чисел среди индексов в G всех тех ее максимальных подгрупп, которые не содержат $F(G)$, т.е. $m(G) = m_{\overline{F(G)}}(G)$. Таким образом, $m(G) = m_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = m_{\overline{F(G)}}(G)$. Теорема доказана.

Следуя [6], обозначаем через $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$ пересечение всех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подгрупп группы G, индекс каждой из которых не делится на простые числа из π, $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Если в группе G нет таких максимальных подгрупп, то по определению $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G) = G$. Для непустой радикальной формации $\mathfrak{F}$ через $\Delta_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G)$, $(\Delta_{\pi,G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{F}}(G))$ обозначаем пересечение всех тех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подгрупп группы G, индекс каждой из которых не делится на простые числа из π и каждая из которых не содержит (содержит, соответственно) $\mathfrak{F}$-радикал $G_{\mathfrak{F}}$ группы G. При отсутствии максимальных подгрупп, отвечающих тем или иным указанным свойствам, соответствующие пересечения считаем равными самой группе G. В случае $\pi = \varnothing$ используем обозначения $\Delta_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G)$ и $\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{F}}(G)$ соответственно.

Лемма 4. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{F}$ – локальная S_n-замкнутая формация, содержащая класс всех нильпотентных π'-групп $\mathfrak{N}_{\pi'}$. Если в группе G подгруппа $\hat{O}_{\pi}(G)$ обладает свойством C_{π}, то $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$.

Доказательство. По теореме 1 [6], ввиду $\hat{O}_{\pi}(G) \in C_{\pi}$, $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)/O_{\pi}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G/O_{\pi}(G))$. А так как локальная формация $\mathfrak{F}$ является S_n-замкнутой и содержит класс всех нильпотентных групп $\mathfrak{N}$, то по следствию 8.7.1 [1] $\Delta^{\mathfrak{F}}(G/O_{\pi}(G)) \in \mathfrak{F}$. Значит, $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Теорема 5. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{F}$ – радикальная локальная формация, содержащая класс всех нильпотентных π'-групп $\mathfrak{N}_{\pi'}$. И пусть G – группа, $\hat{O}_{\pi}(G) \in C_{\pi}$, цоколь факторгруппы $G/\hat{O}_{\pi}(G)$ π'-разрешим. Если $G \notin \mathfrak{F}$, то $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$ – собственная подгруппа $G_{\mathfrak{F}}$.

Доказательство. Пусть G – группа, удовлетворяющая условию теоремы. Так как $\mathfrak{G}_{\pi} \subseteq \mathfrak{F}$ и $G \notin \mathfrak{F}$, то G – π'd-группа. А так как при этом $\hat{O}_{\pi}(G) \in C_{\pi}$, то $\hat{O}_{\pi}(G) \neq G$.

По теореме 1 и ввиду $\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}\subseteq\mathfrak{F}$ имеем $\hat{O}_\pi(G)\subset F_{\pi'}(G)\subseteq G_\mathfrak{F}$. Значит, в G существуют максимальные подгруппы, каждая из которых имеет π'-индекс в G и не содержит $G_\mathfrak{F}$. Предположим, что все такие подгруппы являются $\mathfrak{F}$-нормальными в G. Тогда $G^\mathfrak{F}\subseteq\hat{O}_{\pi,\overline{G_\mathfrak{F}}}(G)=\hat{O}_\pi(G)$, как следует из теоремы 3. Значит, $G/\hat{O}_\pi(G)\in\mathfrak{F}$. А так как по следствию 1 леммы 1 $G_\mathfrak{F}/\hat{O}_\pi(G)=(G/\hat{O}_\pi(G))_\mathfrak{F}$, то $G=G_\mathfrak{F}$ − противоречие с условием $G\notin\mathfrak{F}$. Таким образом, в G существуют $\mathfrak{F}$-абнормальные максимальные подгруппы, каждая из которых имеет индекс, не делящийся на числа из π и не содержащий $G_\mathfrak{F}$. Так как по лемме 4 $\Delta_\pi^\mathfrak{F}(G)\in\mathfrak{F}$, то $\Delta_\pi^\mathfrak{F}(G)\subset G_\mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Следствие 5.1. Пусть $\mathfrak{F}$ − радикальная локальная формация, содержащая класс всех нильпотентных групп $\mathfrak{N}$. И пусть G − группа, цоколь факторгруппы $G/\hat{O}(G)$ разрешим. Если $G\notin\mathfrak{F}$, то $\Delta^\mathfrak{F}(G)$ − собственная подгруппа $G_\mathfrak{F}$.

Теорема 6. Пусть $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ – радикальная локальная формация, содержащая класс всех нильпотентных π'-групп $\mathfrak{N}_{\pi'}$. И пусть G – π'-разрешимая группа, $G\notin\mathfrak{F}$. Тогда $\Delta_\pi^\mathfrak{F}(G)=\Delta_{\pi,\overline{G_\mathfrak{F}}}^\mathfrak{F}(G)$.

Доказательство. Пусть G – группа, удовлетворяющая условию теоремы. По теореме 5 $\Delta_\pi^\mathfrak{F}(G)\subset G_\mathfrak{F}$, значит, в G существуют $\mathfrak{F}$-абнормальные максимальные подгруппы, каждая из которых имеет индекс, не делящийся на числа из π, и не содержит $G_\mathfrak{F}$. Ввиду следствия 1 леммы 1 факторгруппа $G/\hat{O}_\pi(G)\notin\mathfrak{F}$. Предположим, что утверждение теоремы неверно и $\Delta_\pi^\mathfrak{F}(G)\subset\Delta_{\pi,\overline{G_\mathfrak{F}}}^\mathfrak{F}(G)$. Тогда $\Delta_\pi^\mathfrak{F}(G)=\Delta_{\pi,\overline{G_\mathfrak{F}}}^\mathfrak{F}(G)\cap\Delta_{\pi,G_\mathfrak{F}}^\mathfrak{F}(G)$. Если $\hat{O}_\pi(G)\neq 1$, то по индукции $\Delta_\pi^\mathfrak{F}(G/\hat{O}_\pi(G))=\Delta_{\pi,\overline{(G/\hat{O}_\pi(G))_\mathfrak{F}}}^\mathfrak{F}(G/\hat{O}_\pi(G))$. Ввиду леммы 2 [6] $\Delta_\pi^\mathfrak{F}(G/\hat{O}_\pi(G))=\Delta_\pi^\mathfrak{F}(G)/\hat{O}_\pi(G)$. Применяя следствие 1 леммы 1, получаем $\Delta_{\pi,\overline{(G/\hat{O}_\pi(G))_\mathfrak{F}}}^\mathfrak{F}(G/\hat{O}_\pi(G))=\Delta_{\pi,\overline{G_\mathfrak{F}/\hat{O}_\pi(G)}}^\mathfrak{F}(G/\hat{O}_\pi(G))=\Delta_{\pi,\overline{G_\mathfrak{F}}}^\mathfrak{F}(G)/\hat{O}_\pi(G)$. Следовательно, $\Delta_\pi^\mathfrak{F}(G)=\Delta_{\pi,\overline{G_\mathfrak{F}}}^\mathfrak{F}(G)$, что противоречит сделанному предположению. Значит, $\hat{O}_\pi(G)=1$. Так как $\hat{O}(G)\subseteq\hat{O}_\pi(G)=1$, то по теореме 8.6 [1] $\Delta^\mathfrak{F}(G)=Z_\infty^\mathfrak{F}(G)$. А так как, ввиду теоремы 1[6], $\Delta^\mathfrak{F}(G)=\Delta_\pi^\mathfrak{F}(G)\subset\Delta_{\pi,\overline{G_\mathfrak{F}}}^\mathfrak{F}(G)$, то $Z_\infty^\mathfrak{F}(G)\subset\Delta_{\pi,\overline{G_\mathfrak{F}}}^\mathfrak{F}(G)$. Пусть $K/Z_\infty^\mathfrak{F}(G)$ – минимальная нормальная подгруппа группы $G/Z_\infty^\mathfrak{F}(G)$ из $\Delta_{\pi,\overline{G_\mathfrak{F}}}^\mathfrak{F}(G)/Z_\infty^\mathfrak{F}(G)$. Из π'-разрешимости G следует, что $K/Z_\infty^\mathfrak{F}(G)$ – π-группа или элементарная абелева π'-группа, принадлежащая $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}\supseteq\mathfrak{N}_{\pi'}$. Пусть f – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. По лемме 7.13 из [1] подгруппа $Z_\infty^\mathfrak{F}(G)$ f-гиперцентральна в G, т.е. $G/C_G(P/L)\in f(P/L)$ для любого G-главного фактора P/L, $P\subseteq Z_\infty^\mathfrak{F}(G)$. Из S_n-замкнутости формации $\mathfrak{F}$ и теоремы 4.7 [1] следует, что $K/C_K(P/L)\in f(P/L)$. Ввиду возможности уплотнения G-главного f-центрального ряда группы $Z_\infty^\mathfrak{F}(G)$ до K-главного f-центрального ряда, приходим к выводу, что $K\in\mathfrak{F}$. Значит, $K\subseteq G_\mathfrak{F}\subseteq\Delta_{\pi,G_\mathfrak{F}}^\mathfrak{F}(G)$, и поэтому $K \subseteq \Delta^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \cap \Delta^{\mathfrak{F}}_{\pi,G_{\mathfrak{F}}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}_{\pi}(G) = Z^{\mathfrak{F}}_{\infty}(G)$. Противоречие. Следовательно, $\Delta^{\mathfrak{F}}_{\pi}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$ и теорема доказана.

Следствие 6.1. Пусть G – π'-разрешимая не π'-нильпотентная группа. Тогда $\Delta^{\mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{N}_{\pi'}}_{\pi}(G) = \Delta^{\mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{N}_{\pi'}}_{\pi,\overline{\mathrm{F}_{\pi'}(G)}}(G)$.

Следствие 6.2. Пусть G – π'-разрешимая группа, $G \notin \mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{J}^{\mathrm{M}}_{\pi'}$, M – некоторое множество линейных упорядочений множества всех простых π'-чисел. Тогда $\Delta^{\mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{J}^{\mathrm{M}}_{\pi'}}_{\pi}(G) = \Delta^{\mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{J}^{\mathrm{M}}_{\pi'}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{J}^{\mathrm{M}}_{\pi'}}}}(G)$.

Следствие 6.3 [4]. Для всякой радикальной локальной формации $\mathfrak{F}$, содержащей класс всех нильпотентных групп $\mathfrak{N}$, пересечение всех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подгрупп разрешимой не $\mathfrak{F}$-группы G совпадает с пересечением всех ее $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подгрупп, не содержащих ее $\mathfrak{F}$-радикал $G_{\mathfrak{F}}$, т.е. $\Delta^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$.

Следствие 6.4. Пусть G – разрешимая группа, $G \notin \mathfrak{J}^{\mathrm{M}}$, M – некоторое множество линейных упорядочений множества всех простых чисел. Тогда $\Delta^{\mathfrak{J}^{\mathrm{M}}}(G) = \Delta^{\mathfrak{J}^{\mathrm{M}}}_{\overline{G_{\mathfrak{J}^{\mathrm{M}}}}}(G)$.

Следствие 6.5 [3]. Пусть G – разрешимая ненильпотентная группа. Тогда пересечение $\Delta(G)$ всех максимальных ненормальных подгрупп группы G совпадает с пересечением $\Delta_{\overline{\mathrm{F}(G)}}(G)$ всех максимальных ненормальных подгрупп группы G, не содержащих ее подгруппу Фиттинга $\mathrm{F}(G)$.

Литература

1. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.
2. Монахов, В.С. Замечания о максимальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов // Доклады НАН Беларуси. – 2003. – № 4 (47). – С. 31–33.
3. Монахов, В.С. Замечание о пересечении ненормальных максимальных подгрупп конечных групп / В.С. Монахов // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2004. – № 6 (27). – С. 81.
4. Белоконь, Л.М. О пересечениях максимальных подгрупп в конечных разрешимых группах / Л.М. Белоконь // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2010. – № 5 (62). – С. 119–120.
5. Монахов, В.С. Конечные π-разрешимые группы с холловыми максимальными подгруппами / В.С. Монахов // Математические заметки. – 2008. – Т. 84, вып. 3. – С. 390–394.
6. Селькин, М.В. Пересечение максимальных подгрупп в конечных группах / М.В. Селькин, В.Н. Семенчук // Вопросы алгебры. – 1985. – Вып. 1. – С. 67–72.
7. Huppert, B. Endliche Gruppen I. / B. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 1967. – 793 p.
8. Белоконь, Л.М. Корадикалы субнормальных подгрупп конечных групп / Л.М. Белоконь // Вопросы алгебры. – 1992. – Вып. 6. – С. 13–16.
9. Bray, Henry G. Between nilpotent and solvable / Henry G. Bray, W.E. Deskins, David Johnson, John F. Humphreys, B.M. Puttaswamaiah, Paul Venzke, Gary L. Walls. – Washington, N.J. : Polygonal Publ. House, 1982. – 231 p.
10. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М. : Наука, 1989. – 256 с.

Белорусско-Российский университет

Поступила в редакцию 24.09.2013