УДК 517.984

ОЦЕНКИ РЕЗОЛЬВЕНТ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВЗВЕШЕННОГО СДВИГА

А.Б. Антоневич, Али А. Шукур

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

ESTIMATION OF RESOLVENTS FOR DISCRETE WEIGHTED SHIFT OPERATORS

A.B. Antonevich, Ali A. Shukur

Belarusian State University, Minsk, Belarus

Основным результатом работы являются оценки снизу для нормы резольвенты оператора, у которого спектр есть единичная окружность. Показано, что для произвольной функции $\varphi(\lambda)$, аналитической в единичном круге, существует оператор, у которого норма резольвенты больше чем $|\varphi(\lambda)|$.

Ключевые слова: *резольвента, дискретные операторы взвешенного сдвига.*

A lower estimation for the norm of a resolvent operator, the spectrum of which is a unite circle is considered. It is shown that for arbitrary function $\varphi(\lambda)$, that is analytic on a unit circle, there exist an operator such that its resolvent norm is greater than $|\varphi(\lambda)|$.

Keywords: *resolvent, discrete weighted shift operator.*

Введение

Пусть $B: X \to X$ есть линейный ограниченный оператор в банаховом пространстве X над полем $\mathbb{C}$. Точка $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *регулярной точкой оператора*, если обратный оператор

$$(\lambda I - B)^{-1} := R(\lambda, B)$$

существует и является ограниченным. Множество регулярных точек называется *резольвентным множеством* оператора B и обозначается $\rho(B)$. Операторно-значная функция $R(\lambda, B)$, определенная на резольвентном множестве, называется *резольвентой оператора*. Резольвента является аналитической операторно-значной функцией от λ. Множество $\sigma(B) = \mathbb{C} \backslash \rho(B)$ называется *спектром оператора*. Число

$$R(B) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(B)\}$$

называется *спектральным радиусом оператора* B. Известно [2] , что для любого оператора при приближении λ к спектру норма резольвенты растет и имеет место оценка снизу

$$\|R(\lambda, B)\| \geq \frac{1}{d(\lambda, \sigma(B))} \quad \text{для } \lambda \in \rho(B), \quad (0.1)$$

где

$$d(\lambda, \sigma(B)) = \min\{|\lambda - \mu| : \mu \in \sigma(B)\}$$

есть расстояние от λ до спектра $\sigma(B)$. В частности, если спектр оператор есть вся единичная окружность $\mathbb{S}^1$, то

$$\|R(\lambda, B)\| \geq \frac{1}{|1 - |\lambda||}. \quad (0.2)$$

Норма резольвенты явно вычисляется только для некоторых специальных классов операторов и для отдельных примеров. Известно, например, что для любого нормального оператора в гильбертовом пространстве имеет место равенство в (0.1).

В частности, если оператор унитарный (или изометрический обратимый в банаховом случае) и его спектр есть вся единичная окружность $\mathbb{S}^1$, то

$$\|R(\lambda, B)\| = \frac{1}{|1 - |\lambda||}.$$

С разных точек зрения представляет интерес получение информации о поведении нормы резольвенты при приближении λ к спектру и оценок снизу и сверху для норм резольвент операторов [4], [5], [6]. В связи с этим возникает вопрос: насколько быстро может возрастать норма резольвенты произвольного оператора при приближении к спектру?

Считается известным, что норма резольвенты может быстро возрастать при приближении к спектру, но смысл слова «быстро» при этом не уточняется. В работе дано количественное описание возможной скорости роста резольвенты для операторов, спектром которых является окружность.

1 Уточнение постановки задачи и формулировка основного результата

Прежде всего напомним известные свойства резольвенты оператора, у которого спектр лежит на единичной окружности.

***Лемма* 1.1.** *Пусть у линейного ограниченного оператора B спектр есть единичная окружность $(\sigma(B) = \mathbb{S}^1)$. Тогда при $|\lambda| > 1$ резольвента задается в виде ряда*

$$R(\lambda, B) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} B^n,$$

а при $|\lambda| < 1$ задается в виде ряда

$$R(\lambda, B) = -\sum_1^{\infty} \lambda^{n-1} B^{-n}.$$

Для нормы резольвенты имеют место оценки: при $|\lambda| > 1$

$$\frac{1}{|1-|\lambda||} \le \left\|(\lambda I - B)^{-1}\right\| \le \sum_0^{\infty} \frac{1}{|\lambda|^{n+1}} \left\|B^n\right\|, \quad (1.1)$$

при $|\lambda| < 1$

$$\frac{1}{|1-|\lambda||} \le \left\|(\lambda I - B)^{-1}\right\| \le \sum_1^{\infty} |\lambda|^{n-1} \left\|B^{-n}\right\|. \quad (1.2)$$

Ниже мы рассматриваем резольвенты при $|\lambda| < 1.$ Аналогичные результаты имеют место при $|\lambda| > 1.$

Обозначим через Φ класс функций φ, удовлетворяющих следующим условиям: φ есть аналитическая функция в единичном круге $|\lambda| < 1,$ у которой радиус сходимости степенного ряда

$$\varphi(z) = \sum_0^{\infty} \varphi_n z^n$$

есть 1 и при этом $\varphi_n > 0.$ Так как коэффициенты разложения неотрицательны, такая функция имеет особенность в точке 1.

Пусть

$$f_B^+(z) = \sum_0^{\infty} z^n \left\|B^{-n-1}\right\|. \quad (1.3)$$

В условиях леммы 1.1 у обратного оператора спектральный радиус $R(B^{-1})$ есть 1, согласно формуле Гельфанда [2] выполнено

$$R(B^{-1}) = \lim_{n\to+\infty} \left\|B^{-n}\right\|^{1/n} = 1,$$

и радиус сходимости степенного ряда (1.2) есть 1. Поэтому функция f_B^+ принадлежит введенному классу функций Φ и оценка (1.2) имеет вид

$$\left\|(\lambda I - B)^{-1}\right\| \le f_B^+(|\lambda|).$$

Функция $f(z) = \frac{1}{1-z}$ также принадлежит рассматриваемому классу, и оценка снизу в лемме 1.1 имеет вид

$$\left\|(\lambda I - B)^{-1}\right\| \ge f(|\lambda|) = \frac{1}{|1-|\lambda||}.$$

В общем случае оценки сверху из леммы 1.1 грубые и часто оказывается, что в действительности норма резольвенты существенно меньше, чем $f_B^+(|\lambda|),$ и существенно больше, чем $\frac{1}{|1-|\lambda||}$.

Возникает естественный вопрос, насколько быстрым в действительности может быть рост нормы резольвенты при приближении к спектру. Согласно лемме 1.1 сверху норма резольвенты оценивается через одну из функций класса Φ и, следовательно, не может возрастать быстрее, чем функции из этого класса. Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

***Теорема* 1.1.** *Для любой функции $\varphi \in \Phi$ существует линейный ограниченный оператор B, такой, что $\sigma(B) = \mathbb{S}^1$ и при $|\lambda| < 1$ для резольвенты оператора имеет место оценка снизу*

$$\left\|R(\lambda, B)\right\| \ge \varphi(|\lambda|). \quad (1.4)$$

Таким образом, норма резольвенты может возрастать быстрее, чем любая функция из класса $\Phi.$ Из этого следует, в частности, что не существует универсальной оценки сверху для норм резольвент, подобной универсальной оценке снизу (0.2).

Замечание. В качестве характеристики роста резольвенты часто рассматривается функция

$$M_B(r) = \max_{|\lambda|=r} \left\|R(\lambda, B)\right\|$$

и строятся ее оценки [5]. С помощью норм операторов $\left\|B^{-n}\right\|$ могут быть получены некоторые оценки снизу для этой функции. Действительно, для рассматриваемых операторов при $r < 1$ и $n \ge 0$ имеем

$$B^{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{1}{\lambda^n} (\lambda - B)^{-1} d\lambda.$$

Отсюда получаем, что

$$\left\|B^{-n}\right\| \le M_B(r) r^{-n+1}$$

и

$$M_B(r) \ge \sup_{n\ge1} r^{n-1} \left\|B^{-n}\right\| := g(B, r). \quad (1.5)$$

В отличие от неравенства (1.4), оценка снизу (1.5) через функцию $g(B, r)$ не дает оценки снизу для нормы резольвенты во всех точках, так как в некоторых точках окружности $|\lambda| = r$ норма резольвенты может быть меньше, чем $M_B(r).$

Примеры показывают, что оценка (1.5) также грубая, так как функция $g(B, r)$ может быть существенно меньше, чем $M_B(r).$ Она может оказаться даже хуже оценки (0.2). Действительно, если $\left\|B^{-n}\right\| = 1$ для всех $n,$ то оценка становится тривиальной, так как в этом случае $g(B, r) \equiv 1.$

2 Операторы взвешенного сдвига

Доказательство теоремы заключается в явном построении по функции φ дискретного оператора взвешенного сдвига B в пространстве $l_1(Z),$ обладающего требуемыми свойствами. При этом для построенного оператора норма резольвенты вычисляется в явном виде:

$$\left\|R(\lambda, B)\right\| = f_B^+(|\lambda|) \ge \varphi(|\lambda|).$$

Пусть $l_p(\mathbb{Z})$, $(p \geq 1)$ есть пространство двусторонних последовательностей комплексных чисел $u = (u(k))$, для которых конечна норма

$$\|u\|_p = \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} |u(k)|^p\right]^{1/p}.$$

Оператор сдвига W действует в этом пространстве по формуле

$$Wu(k) = u(k+1), \ k \in \mathbb{Z}. \qquad (2.1)$$

Оператором взвешенного сдвига называется оператор в $l_p(\mathbb{Z})$, действующий по формуле

$$Bu(k) = a(k)u(k+1), \ k \in Z, \qquad (2.2)$$

где $a = (a(k))$ есть заданная ограниченная числовая последовательность.

Если $a(k) \neq 0$ для $k \in \mathbb{Z}$, и последовательность $\frac{1}{a(k)}$ ограничена, то оператор B обратим и

$$B^{-1}u(k) = \frac{1}{a(k-1)}u(k-1).$$

Приведем несколько известных утверждений о таких операторах [1].

Лемма 2.1. *Пусть B есть оператор взвешенного сдвига вида* (2.2) *в* $l_p(\mathbb{Z})$. *Тогда при* $n > 0$ *норма оператора* B^n *задается формулой*

$$\|B^n\| = \sup_k \prod_{j=1}^{n-1} |a(k-j)|. \qquad (2.3)$$

Если оператор обратим, то

$$\|B^{-n}\| = \sup_k \frac{1}{\prod_{j=0}^{n-1} |a(k+j)|}. \qquad (2.4)$$

Лемма 2.2. *Пусть* $a(k) \to 1$ *при* $k \to \infty$ *и* $a(k) \neq 0$. *Тогда спектр оператора* (2.2) *есть единичная окружность и для этого оператора справедливы утверждения леммы* 1.1.

Получение оценки снизу норм резольвент начнем со следующей простой леммы.

Лемма 2.3. *В пространстве* $l_p(\mathbb{Z})$ *имеют место оценки снизу нормы резольвенты*:

$$\|R(\lambda, B)\|^p \geq \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\left(\prod_{j=1}^{n-1}|a(-j)|\right)|\lambda|^{-n}\right]^p \qquad (2.5)$$

при $|\lambda| > 1$;

$$\|R(\lambda, B)\|^p \geq \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{|\lambda|^{n-1}}{\prod_{j=0}^{n-1}|a(j)|}\right]^p \qquad (2.6)$$

при $|\lambda| < 1$.

Доказательство. Обозначим через e_0 последовательность

$$e_0(k) = \begin{cases} 0, & k \neq 0, \\ 1, & k = 0. \end{cases}$$

Поскольку очевидно, что

$$\|R(\lambda, B)\|_{l_p} \geq \|R(\lambda, B)e_0\|_p,$$

найдем элемент $R(\lambda, B)e_0$ и его норму. При $|\lambda| > 1$ резольвента задается формулой (1.1), поэтому

$$R(\lambda, B)e_0 = \sum_0^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} B^n e_0. \qquad (2.7)$$

Запишем в явном виде слагаемые в (2.7):

$$n = 0; \ \frac{1}{\lambda}e_0 = \left(\ldots, 0, 0, 0, \underbrace{\frac{1}{\lambda}}, \ldots\right),$$

$$n = 1; \ \frac{1}{\lambda^2}Be_0 = \left(\ldots, 0, 0, \underbrace{\frac{1}{\lambda^2}a(-1)}, \ldots\right),$$

$$n = 2; \ \frac{1}{\lambda^3}B^2e_0 = \left(\ldots, 0, \underbrace{\frac{1}{\lambda^3}a(-2)a(-1)}, \ldots\right).$$

Таким образом получаем, что

$$R(\lambda, B)e_0 =$$

$$= \left(\ldots, 0, 0, 0, \frac{1}{\lambda}, \underbrace{\frac{1}{\lambda^2}a(-1)}, \ldots, \frac{1}{|\lambda|^n}\prod_{j=1}^{n-1}|a(-j)|, \ldots\right)$$

и

$$\|R(\lambda, B)e_0\|_p^p = \sum_0^{\infty}\left[\frac{1}{|\lambda|^n}\prod_{j=1}^{n-1}|a(-j)|\right]^p.$$

При $|\lambda| < 1$ резольвента задается формулой (1.2), поэтому

$$R(\lambda, B)e_0 = \sum_1^{\infty} \lambda^{n-1}B^{-n}e_0. \qquad (2.8)$$

Записав в явном виде слагаемые в (2.8), аналогично получаем, что

$$R(\lambda, B)e_0 =$$

$$= \left(\ldots, \frac{-\lambda^n}{\prod_{j=0}^{n-1}|a(j)|}, \ldots, \underbrace{\frac{-\lambda}{a(1)a(0)}}, \underbrace{\frac{1}{a(0)}}, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots)\right)$$

и

$$\|R(\lambda, B)e_0\|_p^p = \sum_1^{\infty}\left[\frac{|\lambda|^{n-1}}{\prod_{j=0}^{n-1}|a(j)|}\right]^p.$$

Теорема 2.1. *Пусть* $a(k) \to 1$ *при* $k \to \infty$, $a(k) \neq 0$, $a(k) \leq a(k+1) \leq 1$ *при* $k \geq 0$ *и* $1 \leq a(k) \leq$ $\leq a(k+1)$ *при* $k < -1$. *Тогда норма резольвенты оператора* (2.2) *в пространстве* $l_1(\mathbb{Z})$ *задается формулой:*

$$\|R(\lambda, B)\| = \sum_{n=0}^{+\infty}\prod_{j=1}^{n-1}|a(-j)||\lambda|^{-n} =$$

$$= f_B^-(|\lambda|) = \sum_{n=0}^{+\infty}|\lambda|^{-n-1}\|B^n\|, \ \text{при} \ |\lambda| > 1;$$

$$\|R(\lambda, B)\| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\prod_{j=0}^{n-1}|a(j)|}|\lambda|^{n-1} =$$

$$= f_B^+(|\lambda|) = \sum_{n=1}^{+\infty}|\lambda|^{n-1}\|B^{-n}\| \ \text{при} \ |\lambda| < 1.$$

Доказательство. В силу условия монотонного возрастания коэффициентов при $k<-1$ и условия, что $a(k)\le 1$ при $k\ge 0$, получаем, что супремум в (2.3) достигается при $k=0$, т. е.

$$\left\|B^n\right\|=\prod_{j=1}^{n-1}|a(-j)|.$$

Поэтому оценка снизу (2.7) из леммы 2.3 совпадает с оценкой сверху (1.1) из леммы 1.1.
Аналогично, в силу условия, что $a(k)\le a(k+1)$ при $k<-1$ и условия, что $a(k)\ge 1$ при $k\ge 0$ получаем, что супремум в (2.4) достигается при $k=0$, т. е. равен $\prod_{j=0}^{n-1}\frac{1}{|a(j)|}$. Поэтому

$$\left\|B^{-n}\right\|=\prod_{j=0}^{n-1}\frac{1}{|a(j)|}$$

и оценка снизу (2.8) из леммы 2.3 совпадает с оценкой сверху (1.2) из леммы 1.1.

В доказательстве теоремы 1.1 будет построен оператор взвешенного сдвига, коэффициенты которого удовлетворяют условиям теоремы 2.1 и выполнено равенство (2.6). Для выполнения утверждения теоремы коэффициенты $a(k)$ оператора взвешенного надо подобрать так, чтобы было выполнено условие

$$f_B^+(|\lambda|)\ge\varphi(|\lambda|).$$

Здесь осложнение заключается в том, что для произвольной функции из класса Φ невозможно построить оператор B так, чтобы имело место равенство

$$f_B^+(|\lambda|)=\varphi(|\lambda|).$$

Это связано с тем, что коэффициенты разложения функции f_B^+ есть числа $\left\|B^{-n}\right\|$, а для норм степеней оператора выполнено неравенство

$$\left\|B^{-n-m}\right\|\le\left\|B^{-n}\right\|\left\|B^{-m}\right\|.$$

Таким образом, у функций вида $f_B^+(\lambda)$ коэффициенты разложения удовлетворяют дополнительным условиям и они составляют только часть класса Φ.

***Лемма* 2.4.** *Для любой функции* $\varphi\in\Phi$ *существует аналитическая функция* $\psi\in\Phi$, *такая, что для коэффициентов разложения*

$$\psi(z)=\sum_0^{+\infty}\psi_n z^n$$

имеют место неравенства $\phi_n\le\psi_n$, *и при этом справедливы соотношения* $\psi_n^2\le\psi_{n-1}\psi_{n+1}$ *и последовательность частных* $\frac{\psi_{n+1}}{\psi_n}$ *монотонно убывая стремится к* 1.

При построении функции ψ будет использовано преобразование Фенхеля – Лежандра [3]. Обычно такое преобразование связано с рассмотрением выпуклых (вниз) функций. Нам потребуется вариант, связанный с рассмотрением вогнутых (выпуклых вверх) функций, который отличается от классических формул знаками.

***Определение* 2.1.** *Пусть задана функция* $f(x)$ *со значениям на расширенной числовой прямой. Функция* f^*, *определяемая равенством*

$$f^*(y)=\sup_x(f(x)-xy)\qquad(2.9)$$

называется сопряженной к f (*по Лежандру*). *Второй сопряженной к* f *называется функция* f^{**}, *определяемая равенством*

$$f^{**}(x)=\inf_y(xy+f^*(y)).\qquad(2.10)$$

Известно, что функция f^{**} выпукла вверх и это есть наименьшая из выпуклых вверх функций, мажорирующих f.

Доказательство леммы 2.4. Без ограничения общности можем считать, что $\varphi_n\ge 1$. Рассмотрим последовательность $\gamma_n=\ln\varphi_n$. Зададим на полупрямой $\mathbb{R}^+=[0,+\infty)$ непрерывную кусочно-линейную функцию $\gamma(x)$, такую, что $\gamma(n)=\gamma_n$ и функция линейна на каждом отрезке $[n,n+1]$. Пусть $\tilde\gamma(x)$ есть наименьшая выпуклая вверх функция, мажорирующая $\gamma(x)$. Как отмечено выше, такая функция может быть задана с помощью преобразования Фенхеля – Лежандра по формулам (2.9)–(2.10): $\tilde\gamma=\gamma^{**}$. Положим $\tilde\gamma_n=\tilde\gamma(n)$, $\psi_n=e^{\tilde\gamma_n}$.

Проверим, что для построенной последовательности выполнены требуемые свойства.

Прежде всего отметим, $\tilde\gamma(x)\ge\gamma(x)\ge 0$.

В общем случае в теории преобразования Фенхеля-Лежандра рассматриваются функции, которые могут принимать значения $\pm\infty$. Покажем сначала, что функция $\tilde\gamma(x)$ принимает только конечные значения.

Из условия

$$\overline{\lim}\,\varphi_n^{1/n}=1$$

получаем, что

$$\overline{\lim}\frac{\gamma_n}{n}=0.$$

Это означает. что $\forall y>0\ \exists N=N(y)$ такое, что для $x\ge N$ выполнено $\gamma(x)\le yx$, т. е. $\gamma(x)-xy\le 0$. Так как функция $\gamma(x)-xy$ непрерывна, она на отрезке $[0,N(y]$ ограничена. Поэтому для всех положительных y выполнено

$$\gamma^*(y)=\sup_x(\gamma(x)-xy)<+\infty.$$

Отсюда следует, что

$$\tilde\gamma(x)=\inf_y(xy+\gamma^*(y))\le x+\gamma^*(1)<+\infty.$$

По построению, для $x>0, y>0$ выполнено неравенство

$$\tilde{\gamma}(x) \le xy + \gamma^*(y).$$

Поэтому для любого $y>0$ имеем

$$0 \le \overline{\lim} \frac{1}{x}\tilde{\gamma}(x) \le y,$$

откуда

$$\lim \frac{1}{x}\tilde{\gamma}(x) = 0, \ \lim \frac{1}{n}\tilde{\gamma}(n) = 0.$$

Из этого получаем, что

$$\lim\nolimits_{n\to\infty} \psi_n^{1/n} = 1. \qquad (2.11)$$

Из выпуклости вверх функции $\tilde{\gamma}$ следует, что выполнено неравенство

$$\tilde{\gamma}_n \ge \frac{1}{2}\left[\tilde{\gamma}_{n+1} + \tilde{\gamma}_{n-1}\right].$$

Обозначим $\Delta_n = \tilde{\gamma}_{n+1} - \tilde{\gamma}_n$. Так как

$$\Delta_n - \Delta_{n-1} = \tilde{\gamma}_{n+1} - \tilde{\gamma}_n - \tilde{\gamma}_n + \tilde{\gamma}_{n-1},$$

из записанного выше свойства выпуклости получаем, что последовательность Δ_n монотонно убывает и, следовательно, имеет предел

$$\lim_{n\to+\infty} \Delta_n := C.$$

Если $C>0$, то

$$\tilde{\gamma}_n \ge C(n-N) + C_0.$$

Эта оценка противоречит (2.11).

Поэтому

$$\lim_{n\to+\infty} \Delta_n = 0.$$

Из этого следует требуемое свойство последовательности ψ_n:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\psi_{n+1}}{\psi_n} = 1.$$

Заметим, что из монотонного убывания последовательности Δ_n следует монотонное убывание последовательности частных $\frac{\psi_{n+1}}{\psi_n}$.

Замечание. Свойство $\psi_{n+m} \le \psi_n \psi_m$ следует из выпуклости функции $\tilde{\gamma}$.

Доказательство теоремы 1.1. Пусть ψ_n есть последовательность, построенная в лемме 2.4 по функции φ. Зададим последовательность $a(k)$ по правилу

$$a(k) = \begin{cases} 1, & k<0; \\ \frac{1}{\psi_0}, & k=0; \\ \frac{\psi_{k-1}}{\psi_k}, & k>0. \end{cases}$$

Для этой последовательности выполнены все условия теоремы 2.1. Поэтому, согласно теореме 2.1, для резольвенты оператора $\mathrm{B} = \mathrm{aW}$ в пространстве $l_1(\mathbb{Z})$ при $|\lambda|<1$ выполнено

$$\|R(\lambda, B)\| = \psi(|\lambda|) \ge \varphi(|\lambda|).$$

Замечание. Если все $a(k)=1$, то оператор сдвига W является изометрическим и обратимым и для резольвенты имеет место равенство (0.2). Рассматриваемые операторы имеют вид $B = W + K$, где K есть оператор взвешенного сдвига с коэффициентами $a(k)-1$. Такой оператор K является компактным и квазинильпотентным (его спектр состоит из одной точки 0). Поэтому рассматриваемый вопрос связан с еще одним общим вопросом – насколько сильно может измениться поведение резольвенты при возмущении оператора с помощью компактного. Как видно из теоремы 1.1, возмущение оператора с помощью компактного может привести к сколь угодно сильному изменению поведения резольвенты.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Антоневич*, *А.Б.* Линейные функциональные уравнения. Операторный подход / А.Б. Антоневич. – Минск: Университетское, 1988.– 230 с.

2. *Данфорд*, *Н.* Линейные операторы. Спектральная теория / Н. Данфорд, Дж. Шварц. – Москва: Мир, 1966. – 896 с.

3. *Магарил Ильяев*, *Г.Г.* Выпуклый анализ и его приложения // Г.Г. Магарил Ильяев, В.М. Тихомиров. – М.: Книжный дом «Либерком», 2011. – 172 с.

4. *Zabrejko*, *P.P.* Error estimates for successive approximations and spectral properties of linear operators/ P.P. Zabrejko // Numerical functional analysis and optimization. – 1990. – Vol. 11, № 788. – P. 823–838.

5. *Olavi Nevanlinna*. On growth of the resolvent operators for power bounded operators / Olavi Nevanlinna // Banach center publications. – Warszawa. – 1997. – Vol. 38. – 18 p.

6. *Resolvent conditions and powers of operators* [Electronic resource] / Olavi Nevanlinna – Helsinki university of technology Institute of mathematies research reports, 1999. – Mode of access: https://math.aalto.fi/reports/a424.pdf. – Data of access: 10.05.2014.

Поступила в редакцию 01.07.14.